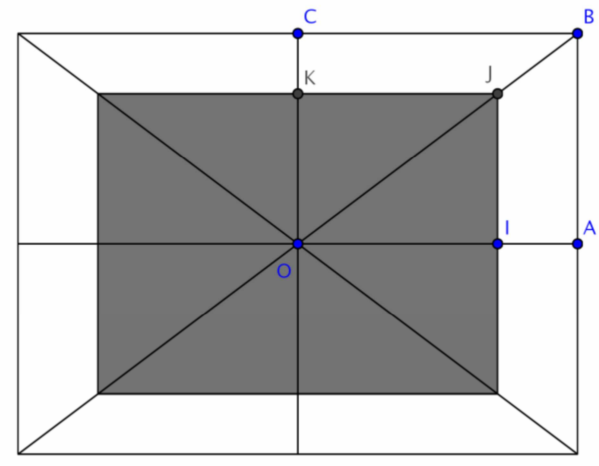
EXERCICES DE PREPARATION AU CRPE

EXERCICE 1 (*d'après « sujet O » du MEN, CRPE*)

Pour jouer au tir à l'arc, Arthur veut construire une cible en carton rectangulaire.

Il a fait un schéma de cette cible, qui est reproduit ci-dessous : les supports des diagonales du rectangle gris, au centre de la cible, et du grand rectangle sont confondus.



Arthur a nommé sur son schéma quelques points particuliers. Il sait que :

- Les quadrilatères **OIJK** et **OABC** sont des rectangles ;
- La droite **(OB)** est une diagonale commune à ces deux rectangles;
- Le point **I** appartient au segment **[OA]** et **OI** = 40cm;
- Le point **J** appartient au segment **[OB]**, avec **JB** = 20cm et **JI** = 30cm;
- Le point **K** appartient au segment **[OC]**.

PARTIE A

1. Arthur dispose d'une feuille de carton rectangulaire au format A0 (norme ISO 216), dont les dimensions en millimètres sont de 841 sur 1189. La feuille est-elle assez grande pour y dessiner la cible ? Justifier.

2. Calculer l'aire du rectangle **OIJK**.

3. Calculer l'aire du rectangle **OABC**.

PARTIE B

Arthur a fabriqué la cible prévue, qui est divisée en deux zones distinctes. La première zone, appelée cœur de cible, est la zone grisée de la cible. La deuxième zone est la zone blanche restante.

Arthur tire des flèches sur la cible avec son arc. On admet que :

- Arthur ne rate jamais la cible : la probabilité qu'une flèche donnée atteigne la cible est donc 1.
- La probabilité qu'une flèche atteigne une zone est proportionnelle à l'aire de cette zone ;

Arthur tire une flèche avec son arc.

1. Montrer que la probabilité que la flèche d'Arthur atteigne le cœur de cible est égale à $\frac{25}{49}$.

2. Déterminer la probabilité que la flèche d'Arthur atteigne la zone blanche de la cible.

PARTIE C

*Dans cette partie les hypothèses de la partie **B** restent valables.*

Arthur tire successivement et de façon indépendante ***n*** flèches avec son arc, où ***n*** est un entier naturel non nul.

La probabilité p_n de l'événement : « *Sur* ***n*** *flèches tirées, au moins une atteint le cœur de cible* » est donnée par la formule suivante (admise) :

$$P_n = 1 - (\frac{24}{49})^n$$

1. Calculer une valeur approché de p_2 , arrondie au dix millième. Interpréter le résultat obtenu.
2. Arthur utilise un tableur pour déterminer les valeurs de p_n en fonction de n , à 10^{-3} près. Une copie de sa feuille de calcul est reproduite ci-dessous :

	A	B
1	Valeur de n	Valeur de p_n
2	1	0,510
3	2	0,760
4	3	0,882
5	4	0,942
6	5	0,972
7	6	0,986
8	7	0,993
9	8	0,997
10	9	0,998
11	10	0,999
12	11	1,000
13		

a. Donner la formule qui, entrée dans la cellule ***B2***, puis recopiée vers le bas, permet de compléter la colonne **B**.
b. Arthur souhaite avoir une probabilité d'au moins 0,9, qu'une au moins de ses flèches atteigne le cœur de cible. Quel nombre minimum de tirs doit-il effectuer ?
c. Interpréter les valeurs de la ligne 12 (cellules ***A12*** et ***B12***) de cette feuille de calcul.

EXERCICE 2 (*d'après Concours Blanc de Blois*)

En informatique, on appelle « octet » une suite de huit chiffres pris dans l'ensemble {0 ; 1}
Par exemple, « 01001110 » et « 10000110 » sont des octets : deux listes de huit chiffres comportant des « 0 » ou des « 1 »

1. Combien d'octets différents peut-on former ?
2. On écrit au hasard un octet.

Soient **A**, **B** et **C** les événements suivants :

A : « L'octet contient « 1 » aux deux premières places ».
B : « L'octet se termine par « 0 » ».
C : « L'octet contient « 1 » aux deux premières places et il se termine par « 0 » ».

Calculer ***p***(**A**), ***p***(**B**) et ***p***(**C**). Que représente l'événement **C** par rapport aux événements **A** et **B**.
<u>*Rappel*</u> : ***p***(**A**) désigne la probabilité de l'événement **A**.

EXERCICE 3 (*d'après concours blanc de Blois*).

Voici une représentation de 574 députés (*<u>rappel</u> : en France, il y a 577 députés !*), après une élection (*législative*), selon deux tendances politiques et selon le sexe :

	DAUCHE	***GROITE***
Hommes	275	242
Femmes	44	13

1. Le pourcentage de députés féminins s'obtient en calculant :

$\frac{44}{275}+\frac{13}{242}$	$\frac{44+13}{574}$	$\frac{275+242}{44+13}$	$\frac{44}{242}+\frac{13}{275}$	$\frac{275\times 13}{244\times 44}$

Trouver le « bon » calcul et expliquer pourquoi les autres sont faux.

2. Voici la même répartition complétée d'une zone grisée représentant les députés de moins de 45 ans.

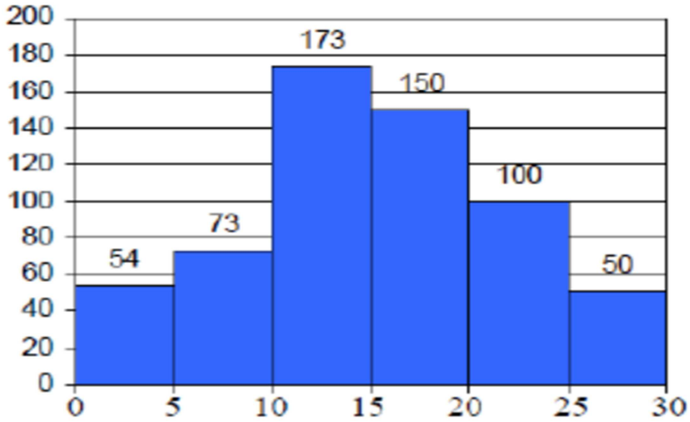
	DAUCHE		***GROITE***	
Hommes	237	38	44	198
Femmes	36	8	0	13

Parmi les cinq propositions suivantes, lesquelles sont **VRAIES** ? Lesquelles sont **FAUSSES** ? Justifier.

A. Il y a environ 10% de députés femmes parmi les députés de plus de 45 ans.
B. Il y a environ 22% de députés femmes de ***DAUCHE*** de moins de 45 ans parmi les députés femmes.
C. Il y a environ 90% de députés femmes parmi les députés de moins de 45 ans.
D. Il y a environ 22% de députés hommes de ***GROITE*** parmi les députés hommes.
E. Il y a environ 16% de députés hommes de moins de 45 ans parmi les députés hommes.

EXERCICE 4

Une enquête sur l'argent de poche mensuel de 600 jeunes a donné les résultats regroupés sous la forme de l'histogramme suivant :



1. Compléter le tableau suivant :

Somme d'argent en euros x_i	Effectif n_i	Fréquence f_i	Angle en degrés
$[0;5[$			
$[5;10[$			
$[10;15[$			
$[15;20[$			
$[20;25[$			
$[25;30[$			
Total	600	1	360

2. Regrouper les données sous la forme d'un diagramme à secteurs ou « diagramme-camembert ».

3. Calculer le montant moyen. *Indication* : on admet que le montant moyen de l'argent de poche de l'intervalle [15 ; 20[est 17,5 euros.

ELEMENTS DE CORRECTION

EXERCICE 1

PARTIE A

1. Le théorème de Pythagore dans le triangle **OIJ** rectangle en **I** permet d'obtenir **OJ** = 50cm.
Le théorème de Thalès dans le triangle **OAB**, avec **I** appartenant à **[OA]**, **J** appartenant à **[OB]**, et **(AB) // (IJ)**, donne $\frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{IJ}} = \frac{\mathbf{OB}}{\mathbf{OJ}}$, d'où **AB** = 42 cm.
Le théorème de Pythagore dans le triangle **OAB** rectangle en **A** permet d'obtenir **OA** = 56 cm.
Par symétrie, la cible d'Arthur est un rectangle de dimensions 84 cm sur 112 cm. La feuille rectangulaire au format ***A0*** a pour dimensions 84,1 cm sur 118,9 cm, ce qui prouve qu'Arthur pourra bien construire sa cible dans cette feuille de carton.
2. L'aire du rectangle **OIJK** est égale à 1200 cm^2.
3. L'aire du rectangle **OABC** est égale à 2352 cm^2.

Remarques :

1) On peut aussi utiliser l'homothétie de centre **O** et de rapport $\frac{7}{5}$ qui transforme le rectangle **OIJK** en le rectangle **OABC**.
2) Il n'est pas demandé de justifier les angles droits ou le parallélisme des droites qui sont admis par l'énoncé.

PARTIE B

1. Par raison de symétrie, la probabilité ***p*** que la flèche atteigne le cœur de cible est donnée par la formule : $\boldsymbol{p} = \frac{4 \times \text{Aire(OIJK)}}{4 \times \text{Aire(OABC)}} = \frac{1200}{2352} = \frac{25}{49}$

2. L'événement « ***La flèche atteint la zone blanche*** » est l'événement contraire de « ***la flèche atteint le cœur de cible*** ». On en déduit que la probabilité de cet événement est égale à $\frac{24}{49}$.
<u>Remarque</u> : *on peut aussi calculer l'aire de la zone blanche.*

PARTIE C

1. (*Calculs*) $\boldsymbol{p_2}$ = 0,76009995... ≈ 0,7601 (*valeur décimale arrondie au dix millième*). En tirant deux flèches, Arthur a donc plus de trois chances sur quatre d'atteindre au moins une fois le cœur de cible.

2. a) La formule à utiliser est : $\boxed{\texttt{= 1 – (24/49)\^{} A2}}$, que l'on peut recopier vers le bas pour compléter la colonne B.
b) La probabilité $\boldsymbol{p_n}$ doit être au moins égale à 0,9, ce qui correspond à $\boldsymbol{n}$ = 4 ; Arthur doit donc tirer quatre flèches au minimum.
c) Une interprétation erronée serait d'affirmer que lorsqu'Arthur tire onze flèches, la probabilité d'atteindre au moins une fois le cœur de cible est égale à 1, ce qui est faux. On peut le prouver :
- par un raisonnement logique : il est possible qu'aucune des 11 flèches n'atteigne le cœur de cible ;
- en revenant à la formule et en faisant le calcul avec une machine : on trouve l'encadrement : $0,9996 \leq \boldsymbol{p_{11}} < 1$.

La valeur « 1 » de la case B12 est la valeur arrondie au millième.

EXERCICE 2

1. Il y a deux possibilités pour la première place puis deux possibilités pour la deuxième place et ainsi de suite. Donc il y a : $2^8 = 256$ octets différents.
2. **Evénement A :**

Il y a une possibilité pour la première place, puis une possibilité pour la deuxième place puis deux possibilités pour les autres places. Il y a $1 \times 1 \times 2^6 = 64$ possibilités pour l'événement **A**. Donc $\boldsymbol{p}(\mathbf{A}) = \frac{64}{256} = \frac{1}{4}$

Evénement B :

Il y a deux possibilités pour la première place, idem pour les autres places sauf pour la dernière place. Il y a $2^7 \times 1 = 128$ possibilités pour l'événement **B**. Donc $\boldsymbol{p}(\mathbf{B}) = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}$

Evénement C :

Il y a une possibilité pour la première place, puis une possibilité pour la deuxième place, une possibilité pour la dernière place puis deux possibilités pour les autres places.
Il y a $1 \times 1 \times 2^5 \times 1 = 32$ possibilités pour l'événement **C**. Donc $\boldsymbol{p}(\mathbf{C}) = \frac{32}{256} = \frac{1}{8}$

En langage probabiliste, on a $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cap \mathbf{B}$.

EXERCICE 3

1. La bonne réponse est : $\frac{44 + 13}{574} = \frac{57}{574}$ (*Un peu moins de 10 % !*). Les autres réponses sont fausses.

<u>Quelques contrôles</u> : 237 + 38 = 275, 44 + 198 = 242 et 36 + 8 = 44. C'est déjà ça !
En étudiant le tableau ou diagramme ci-dessus, on peut déjà affirmer qu'il y a 36 + 13 = 49 députés femmes ayant plus de 45 ans. Les deux sexes mélangés, il y a en tout 49 + 237 + 198 = 484 députés ayant plus de 45 ans.

2. **A.** Il y a environ 10% de députés femmes parmi les députés de plus de 45 ans.

Affirmation *VRAIE*. En effet, $\frac{49}{484} \approx 10{,}12$. Pourcentage arrondi à 10 %.

B. Il y a environ 22% de députés femmes de ***DAUCHE*** de moins de 45 ans parmi les députés femmes.
Affirmation *FAUSSE*. En effet, il y a 8 députés femmes de ***DAUCHE*** ayant moins de 45 ans parmi les 57 députés femmes. Or, $\frac{8}{57} \approx 0{,}14$, donc il y a (environ) 14 % de députés femmes de ***DAUCHE*** parmi les députés femmes.

C. Il y a environ 90% de députés femmes parmi les députés de moins de 45 ans.
Affirmation *FAUSSE*. En effet, il y a 8 députés femmes parmi les 90 (= 38 + 44 + 8 + 0) députés ayant moins de 45 ans. Or $\frac{8}{90} \approx 0{,}08$, donc il y a (environ) 8 % de députés femmes parmi les moins de 45 ans.

D. Il y a environ 22% de députés hommes de ***GROITE*** parmi les députés hommes.
Affirmation *FAUSSE*. En effet, il y a 44 députés hommes de ***GROITE*** ayant moins de 45 ans parmi les 517 députés hommes. Or $\frac{44}{517} \approx 0{,}085$, donc il y a un peu plus de 8 % de députés hommes de ***GROITE*** ayant moins de 45 ans parmi les députés hommes.

E. Il y a environ 16% de députés hommes de moins de 45 ans parmi les députés hommes.

Affirmation *VRAIE*. En effet, il y a 82 députés hommes ayant moins de 45 ans parmi les 517 députés hommes. On a : $\frac{82}{517} \approx 0{,}158$. Pourcentage arrondi à 16 %.

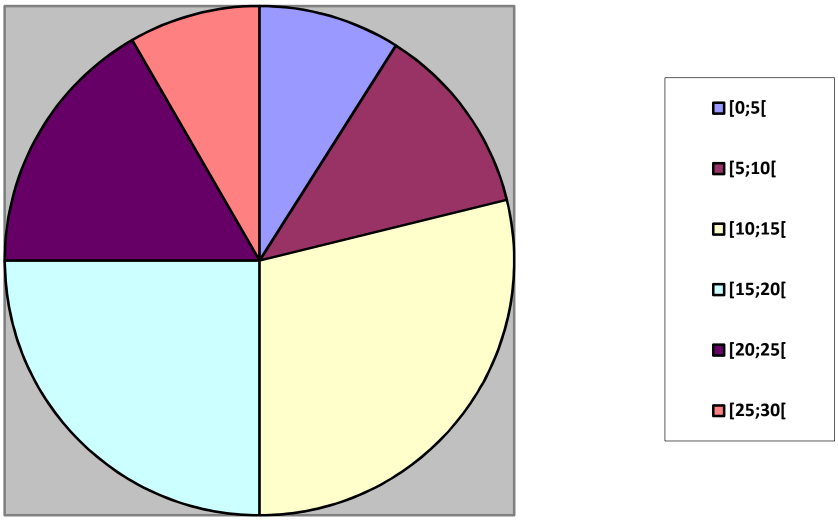
EXERCICE 4

1.

Somme d'argent, en euros, x_i	Effectifs n_i	Fréquence f_i	Angle, en degrés
[0 ; 5[	54	54/600	32,4
[5 ; 10[	73	73/600	43,8
[10 ; 15[	173	173/600	103,8
[15 ; 20[	150	150/600	90
[20 ; 25[	100	100/600	60
[25 ; 30[	50	50/600	30
TOTAL	600	1	360

Pour l'angle associé : $\frac{54}{600} \times \frac{360}{100} = 32{,}4(°)$ et de même pour les autres valeurs. Calculs à effectuer…

2.



3. Moyenne $\overline{\mathbf{x}} = \frac{54\times2{,}5 + 73\times7{,}5 + 173\times12{,}5 + 150\times17{,}5 + 100\times22{,}5 + 50\times27{,}5}{600} \approx 15{,}2(€)$