PROBABILITES : EXERCICES et PROBLEMES, suite…

Note de ***PW***. Les exercices et problèmes qui suivant ont pour la plupart été posés en examens partiels CC ou CT du Master MEEF, en M1.

EXERCICE 1 : CT, session 1, mai 2013. *Boules et Jetons.*

On dispose d'une urne et de deux boîtes numérotées **A** et **B**. L'urne contient deux boules indiscernables au toucher : une ***rouge*** et une ***bleue***. On prélève une boule de l'urne. Si c'est la boule ***bleue***, on prélève un jeton dans la boîte **A** qui en contient cinq, indiscernables au toucher et numérotés de « 1 » à « 5 ». Si c'est la boule ***rouge***, on prélève un jeton dans la boîte **B** qui en contient trois, indiscernables au toucher et numérotés de « 1 » à « 3 ».

1) Proposer un arbre modélisant cette situation.

2) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

a) Evènement ***A*** : « on a prélevé un jeton dans la boîte **A** ».

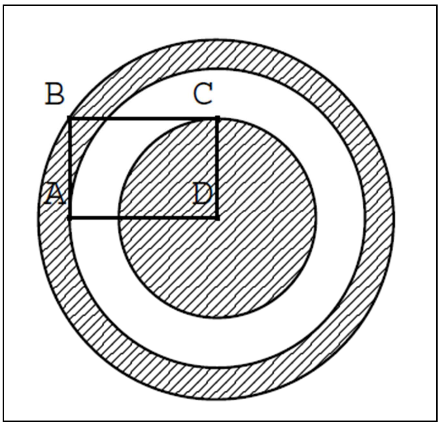
b) Evènement « 5 » : « on a prélevé un jeton portant le « n°5 » ».

c) Evènement « 2 » : « on a prélevé un jeton portant le « n°2 » ».

EXERCICE 2 : épreuve de préparation au CRPE, avril 2012. *Pat et Polo.*

La figure ci-contre représente une cible.

Le rectangle **ABCD** ci-contre est tel que **CD** = 5cm et **AD** = 12cm. On a tracé trois cercles de centre **D** passant respectivement par chacun des trois autres sommets du rectangle. Le but de l'exercice est d'étudier deux paris que se lancent Pat et Polo.



1. Premier pari.

Polo affirme que les deux zones grisées de la cible ont la même aire. Ce que conteste Pat ! Qui a raison pour le premier pari ? Expliquer…

2. Deuxième pari (*concernant des probabilités*).

Pat affirme que lorsqu'on lance une fléchette, il a environ 2,5 fois plus de chances d'atteindre la zone blanche que le « reste » de la cible. Ce que conteste Polo !

Pour évaluer ces probabilités, on formule les deux hypothèses suivantes.

(i) Si on décide de lancer une fléchette sur cette cible circulaire, la fléchette atteindra « toujours » la cible.

(ii) La probabilité d'atteindre une zone et l'aire de cette zone sont proportionnelles.

Déterminer la probabilité d'atteindre la zone blanche. Qui a raison pour le deuxième pari ?

EXERCICE 3 : sujet CRPE, avril 2014. *Dé non cubique.*

On considère un dé à quatre faces en forme de tétraèdre régulier. Ses quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Le résultat d'un lancer est le nombre indiqué sur la face sur laquelle repose le dé. Le dé est supposé équilibré.

1. On a lancé le dé six fois et on a obtenu la série de résultats : 1 ; 2 ; 4 ; 1 ; 1 ; 2.
Au 7éme lancer, la probabilité d'obtenir le nombre 1 et celle d'obtenir le nombre 3 sont-elles différentes ?

2. On lance le dé deux fois de suite.

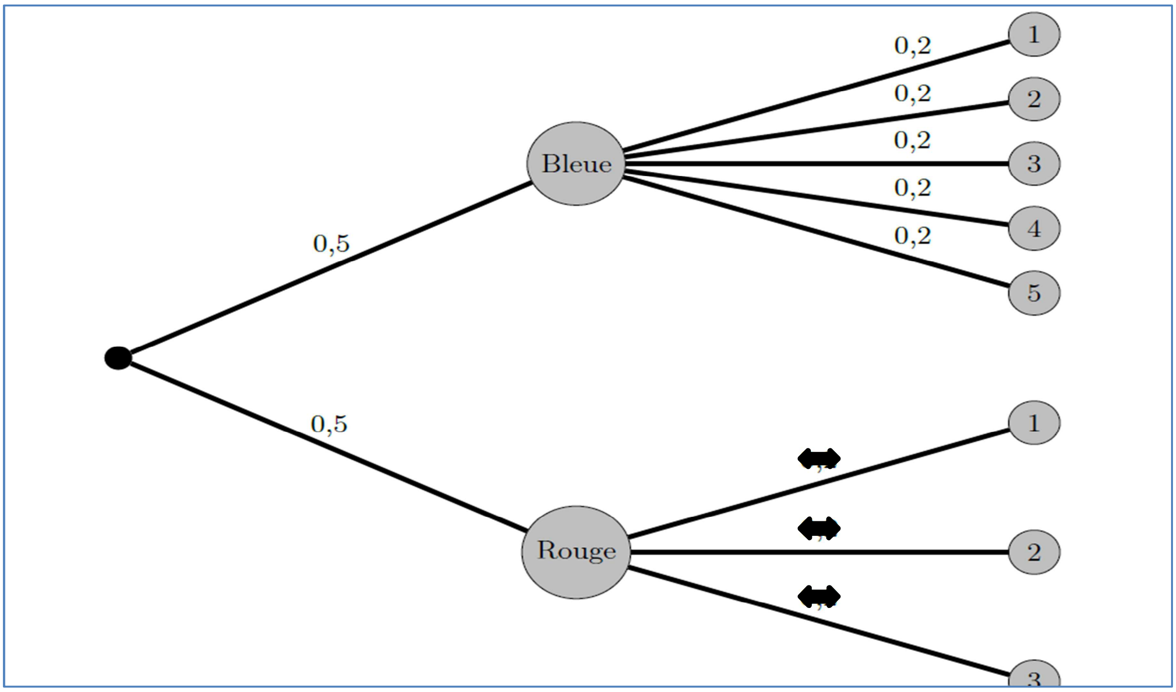
a) Quelle est la probabilité d'obtenir une seule fois le nombre 1 lors de ces deux lancers ?

b) Quelle est la probabilité que le nombre obtenu au deuxième lancer soit strictement supérieur au nombre obtenu au premier lancer ?

Eléments de correction

EXERCICE 1. Boules et Jetons.

1) On obtient l'arbre ci-dessous.



2) a) On prélève un jeton dans la boîte **A** lorsqu'on tire la boule **bleue**. On a donc ***p*(A)** = 0;5.
b) Pour prélever un jeton portant le n°5, il faut d'abord avoir tiré une boule **bleue** (une chance sur deux) puis tirer le jeton n°5 (une chance sur cinq). On a donc ***p***« 5 » = 0;5 × 0;2 = 0;1.
c) Pour prélever un jeton portant le n°2, il faut soit d'abord avoir tiré une boule **bleue** (une chance sur deux) puis tirer le jeton n°2 (une chance sur cinq), soit d'abord avoir tiré une boule **rouge** (une chance sur deux) puis tirer le jeton n°2 (une chance sur trois). On a donc ***p***« 2 » = 0;5 × 0;2 + 0;5 × 1/3 = 1/10 + 1/6 = 16/60 = 4/15.

EXERCICES 2 et 3. Pat et Polo et le Dé non cubique.

Exercices non corrigées : se reporter au cours CELENE, chapitre 10 et se reporter aux annales COPIRELEM

Il reste un peu de place : un dernier petit exercice ! Le problème du Duc de Toscane.

On lance trois dés équilibrés à six faces numérotées de 1 à 6. On calcule la somme des valeurs affichées sur les faces supérieures.

Au XVIème siècle, le Duc de Toscane avait remarqué qu'il obtenait « un peu plus souvent 10 que 9 » ; pourtant, il avait l'impression qu'il y avait autant de façons d'obtenir « 10 » que « 9 ».

DENOMBREMENT. Déterminer toutes les décompositions du nombre « 9 » en somme de trois nombres entiers compris entre 1 et 6. Même question avec le nombre « 10 ».
Au vu des résultats précédents, pourquoi le Duc de Toscane avait-il l'impression qu'il y avait autant de façons d'obtenir « 10 » que « 9 » ?

PROBABILITES. On lance trois dés : un bleu, un blanc et un rouge. Les faces de chaque dé sont toujours numérotées de $\boxed{1}$ à $\boxed{6}$. Déterminer toutes les issues différentes pour lesquelles on obtient : (i) Un, quatre et quatre ; (ii) Trois, trois et trois ; (iii) Un, deux et six.

Calculer alors la probabilité de l'événement **E** : « obtenir une somme égale à 9 ».

Calculer celle de l'événement **F** : « obtenir une somme égale à 10 ».

Conclusion : La remarque du Duc de Toscane était-elle fondée ?

Pistes de correction du problème du Duc de Toscane…

Pour trouver toutes les décompositions additives de « 9 » sans répétition, on peut procéder de la façon suivante. On choisit le premier dé (en commençant par la plus grande valeur 6 et en diminuant jusqu'à 1) et on déduit les valeurs possibles des deux autres dés de manière à avoir une somme égale à 9. Pour éviter les répétitions, la valeur du deuxième dé est d'abord choisie la plus grande possible puis diminuée tant qu'elle reste supérieure ou égale à la valeur du dernier dé. Idem pour « 10 ».

Mais on peut s'y prendre autrement, du moment qu'on trouve les décompositions…

DENOMBREMENT

Question 1. Les décompositions qui donnent 9.	9 = 1 + 2 + 6	Question 2. Les décompositions qui donnent 10.	10 = 2 + 2 + 6
	9 = 1 + 3 + 5		10 = 1 + 3 + 6
	9 = 2 + 2 + 5		10 = 1 + 4 + 5
	9 = 1 + 4 + 4		10 = 2 + 3 + 5
	9 = 2 + 3 + 4		10 = 2 + 4 + 4
	9 = 3 + 3 + 3		10 = 3 + 3 + 4

<u>Conclusion</u>. Si on « regarde » toutes les décompositions ci-dessous, sans ordre, il y a donc autant de façons d'obtenir « 10 » que « 9 ». Donc, l'impression du Duc de Toscane est légitime.

PROBABILITES

L'expérience aléatoire est : « *lancer trois dés, un dé bleu, un dé blanc et un dé rouge* ». Dans ce cas, l'ensemble des issues possibles correspond à l'ensemble des triplets (score du dé bleu, score du dé blanc, score du dé rouge).

1. Avec un dé bleu, un dé rouge et un dé blanc, pour obtenir :

- « un, quatre et quatre », il y a trois façons : (4 (*bleu*) ; 4 (*blanc*) ; 1 (*rouge*)) ; (4 ; 1 ; 4) ; (1 ; 4 ; 4)
- « trois, trois, trois », il n'y a qu'une seule façon : (3 ; 3 ; 3)
- « un, deux, six », il y a six façons :

(6 ; 2 ; 1) ; (6 ; 1 ; 2) ; (1 ; 6 ; 2) ; (1 ; 2 ; 6) ; (2 ; 1 ; 6) ; (2 ; 6 ; 1)

<u>Remarque</u> : ici, « l'ordre » compte. Relire attentivement la description de l'expérience !

2. Avec un dé bleu, un dé rouge et un dé blanc, pour obtenir :

- « *un, deux, six* » : il y a, *avec ordre*, six possibilités ;
- « *un, trois, cinq* » : il y a, *avec ordre*, six possibilités ;
- « *deux, deux, cinq* » : il y a, *avec ordre*, trois possibilités ;
- « *un, quatre, quatre* » : il y a, *avec ordre*, trois possibilités ;
- « *deux, trois, quatre* » : il y a, *avec ordre*, six possibilités ;
- « *trois, trois, trois* » : il y a une seule possibilité.

Donc, le nombre de toutes les possibilités pour obtenir « 9 » avec trois dés distincts (un bleu, un rouge et un blanc) est 25 (= 6 + 6 + 3 + 3 + 6 + 1) ; en rappelant qu'ici l'ordre compte.
Le nombre de toutes les possibilités (*avec ordre*) de lancer trois dés distincts est : 6 × 6 × 6 = 216, car il y a équiprobabilité des issues, donc, en notant $\boldsymbol{p}(\mathbf{E})$ la probabilité cherchée, on a : $\boldsymbol{p}(\mathbf{E}) = \frac{25}{216}$.

3. On raisonne de la même façon : on cherche le nombre de possibilités d'obtenir « 10 ». Détails des possibilités :

- « *deux, deux, six* » : il y a, avec ordre, trois possibilités : (2 ; 2 ; 6) ; (2 ; 6 ; 2) ; (6 ; 2 ; 2)
- « *un, trois, six* » : il y a, avec ordre, six possibilités :

(1 ; 3 ; 6) ; (1 ; 6 ; 3) ; (3 ; 1 ; 6) ; (3 ; 6 ; 1) ; (6 ; 3 ; 1) ; (6 ; 1 ; 3)

- « *un, quatre, cinq* » : il y a, avec ordre, six possibilités :

(1 ; 4 ; 5) ; (1 ; 5 ; 4) ; (4 ; 1 ; 5) ; (4 ; 5 ; 1) ; (5 ; 4 ; 1) ; (5 ; 1 ; 4)

- « *deux, trois, cinq* » : il y a, avec ordre, six possibilités :

(2 ; 3 ; 5) ; (2 ; 5 ; 3) ; (3 ; 2 ; 5) ; (3 ; 5 ; 2) ; (5 ; 2 ; 3) ; (5 ; 3 ; 2)

- « *deux, quatre, quatre* » : il y a, avec ordre, trois possibilités : (2 ; 4 ; 4) ; (4 ; 2 ; 4) ; (4 ; 4 ; 2)
- « *trois, trois, quatre* » : il y a, avec ordre trois possibilités : (3 ; 3 ; 4) ; (3 ; 4 ; 3) ; (4 ; 3 ; 3)

Donc, le nombre de toutes les possibilités pour obtenir « 10 » avec trois dés distincts (un bleu, un rouge et un blanc) est 27 (= 3 + 6 + 6 + 6 + 3 + 3) ; ici aussi, l'ordre compte.

Sachant que le nombre de toutes les possibilités (avec ordre) de lancers trois dés distincts est 216, voir question précédente ; en notant $\boldsymbol{p}(\mathbf{F})$ la probabilité de l'évènement **F**, on a : $\boldsymbol{p}(\mathbf{F}) = \frac{27}{216}$.

<u>Conclusion</u>. On a donc : $\boldsymbol{p}(\mathbf{E}) < \boldsymbol{p}(\mathbf{F})$, donc, la remarque du Duc de Toscane est plutôt fondée, « 10 » est plus « favorable » que « 9 », alors que les nombres de décompositions sont égaux !!!

« ***Bizarre, comme c'est Bizarre, vous avez dit Bizarre ?*** »…