Les TRANSFORMATIONS GEOMETRIQUES du PLAN : corrigé.

Les commentaires qui sont rédigés dans cette page s'appuient essentiellement sur les trois ouvrages suivants :

- ☺ **GEOMETRIE**, M. CARRAL, éditions Ellipses.
- ☺ **Les MATHEMATIQUES au CRPE**, A. DESCAVES, éditions Hachette Education.
- ☺ **« Travaux géométriques 6è »**, C. TAVEAU et A. KUZNIAK, éditions Nathan Pédagogie.

La problématique : passer de l'expérience du « mouvement » des figures dans le plan et de certaines de leurs transformations au concept de transformation géométrique du plan.

On commence par quelques commentaires sur le mot : « **TRANSFORMATION** ».

On peut distinguer plusieurs niveaux gradués dans l'approche du concept de **TRANSFORMATION**. Ces niveaux permettront de passer de la notion PHYSIQUE de transformation d'un objet à une GEOMETRIE basée sur l'étude de transformations, plus particulièrement d'un « groupe de transformations » d'un espace donné.

1. ***Transformation physique d'un objet matériel***. C'est le sens commun du mot transformation qui est explicite : un OBJET est TANSFORME par une OPERATION exercée sur lui. Par exemple, on peut chiffonner une feuille de papier : dans ce cas, la feuille de papier non chiffonnée devient autre, tout en restant une feuille de papier. Il est aussi possible qu'on ne reconnaisse pas l'objet initial une fois qu'il a été transformé. …
2. ***Transformation d'une figure géométrique en une autre.*** On est dans une première approche géométrique. Contrairement au cas précédent, l'état initial de l'objet est conservé, et on compare cet objet avec son transformé ou son image. Seuls, les deux états comptent : on ne s'intéresse pas aux états intermédiaires. C'est un début de détemporalisation, ce qui est spécifique des mathématiques. Par exemple, des approches basées sur l'idée de mouvement géométrique (*à ne pas confondre avec le mouvement physique*) se préoccupent du « passage » d'un état initial à un état final : déplacement, retournement, rotation, projection, agrandissement, réduction[1], … Dans ce niveau, on « agit » globalement sur un objet.
3. ***Transformation ponctuelle agissant sur tout l'espace***. A ce niveau, il n'y a pas que la figure qui est transformée. N'importe quel point possède un transformé ou une image dans l'espace de travail et donc c'est l'espace qui devient l'objet de la transformation. C'est assez difficile à « problématiser » pour l'enseignement, on travaille cet « aspect » au lycée.
4. ***Des « propriétés » définissent la transformation.*** Il y a ici une autre rupture importante à analyser. A partir de ce niveau, on s'intéresse moins aux actions, mais plus aux propriétés des transformations qui vont permettre d'agir sur les figures et sur le plan. On cherche ainsi des invariants qui vont alors permettre de définir une transformation par rapport à une autre : isométrie, quelles conservations : longueurs, angles, rapports, … ?
5. ***Les transformations à la base de la géométrie.*** Evolution la plus abstraite et la plus aboutie de la géométrie : la géométrie se définit comme l'étude des propriétés laissées invariantes par un groupe opérant sur un espace. C'est la géométrie des mathématiciens, cette conception de la géométrie date de la fin du XIXième siècle.

On peut alors retenir que l'idée principale qui préside au concept de transformation géométrique du plan est que ce ne sont pas les figures qui se déplacent dans l'espace physique, mais ce sont les transformations, en tant qu'applications abstraites, qui associent à une figure son ou ses images (*les figures transformées*).

Etudier ces transformations, c'est déterminer les principes géométriques qui les définissent, en même temps que les propriétés géométriques restant invariantes dans ces transformations.

---

[1] **1)** L'idée de **symétrie** est a priori perceptive : elle renvoie à une certaine idée de l'harmonie et de la beauté. Dès l'école, des techniques de travail (pliage, calque, …) sont fournies aux élèves pour qu'ils réalisent des figures symétriques ou pour qu'ils s'interrogent sur le fait qu'une figure possède ou non un ou des éléments de symétrie. La **symétrie axiale** occupe à ce niveau une place importante, à la fois d'un point de vue social et (*bien entendu*) d'un point de vue mathématique.
2) La superposition de deux figures peut se faire par un **déplacement**, un **retournement**, un **glissement**, une **rotation**, … Ces « actions » constituent les fondements du concept d'**ISOMETRIE** : *conservation des longueurs et conservation des angles*.
3) L'observation d'une ombre portée sur le sol ou ailleurs renvoie à l'idée de **projection**. Dans ce cas, les figures se déforment, mais on conserve des rapports entre les longueurs des segments projetés et celles de leurs projections.
4) Les cas où il est nécessaire d'**agrandir** ou de **réduire** des figures selon un rapport donné renvoient à la notion de **similitude** (*figures semblables ou de même forme*). Les longueurs ne sont pas conservées, les angles oui. *Il y a d'autres transformations* !

Les ACTIVITES.

ACTIVITE 1. Réponse : pour les six cadres contenant les couples de figures, il y en a quatre (**1**, **2**, **3** et **5**) où on peut tracer la figure **B** à partir de la figure **A** à l'aide du papier calque.

Cadre 1. On calque **A**, on retourne (*donc sans plier*), le calque pour obtenir **B**. Comment retourner le calque ? La transformation géométrique permettant de passer de **A** à **B** est la symétrie axiale. Il s'agit donc de déterminer l'axe de symétrie. Pour ce faire, on peut tracer le segment qui joint deux points homologues (« = » *un point et son image*), puis tracer la médiatrice de ce segment. *A tracer*.

Cadre 2. On calque **A**, on ne retourne pas le calque, mais on le fait « tourner » exactement d'un demi-tour autour d'un point pour obtenir **B**. Comment être sûr qu'on a fait un demi-tour exactement ?

La transformation géométrique permettant de passer de **A** à **B** est la symétrie centrale. Il s'agit donc de déterminer le centre de la symétrie. Pour ce faire, on peut tracer le segment qui joint deux points homologues, déterminer le milieu de ce segment : c'est le centre de symétrie. *A tracer*.

Cadre 3. On calque **A**. On fait tourner le calque d'un certain angle (*ici 60°*) autour d'un point pour obtenir **B**. La difficulté pratique consiste à faire exactement un tiers d'un demi-tour (*dans le bon sens*) ou un sixième de tour complet (*dans le bon sens*) autour du centre de rotation (*à déterminer*). Idée : 60°, ça fait penser à quoi ? …

La transformation géométrique permettant de passer de **A** à **B** est la rotation. Il s'agit donc de déterminer le centre de la rotation et l'angle de la rotation. *Le sens de cette rotation est le sens direct qui correspond au sens contraire des aiguilles d'une montre*. Pour ce faire, on peut tracer deux segments, chacun joignant deux points homologues. Ensuite, on peut tracer la médiatrice de chaque segment. Les deux médiatrices se coupent au centre de la rotation. Pour obtenir l'angle, on trace l'angle de sommet le centre de la rotation avec un côté passant par un point (remarquable ou non) de **A** et un autre côté passant par le point homologue de la figure **B** du point choisi sur la figure **A**. *A tracer*.

Cadre 4. Pas de possibilité de passer de **A** à **B** après avoir calqué **A**. Cependant, on « voit » que la figure **B** est une réduction de la figure **A**.

La transformation géométrique permettant de passer de **A** à **B** est une homothétie. Il s'agit donc de déterminer le centre et le rapport de cette homothétie. On peut tracer deux demi-droites, chacune d'origine un point (*remarquable ou non*) de **A** et passant par le point homologue sur la figure **B** du point choisi sur **A**. Le point d'intersection de ces deux demi-droites fournit le centre de l'homothétie. Pour obtenir le rapport, il convient de calculer un quotient : lequel ? *A tracer et à calculer*.

Cadre 5. On calque **A** et on fait glisser, sans « slalomer » ou de façon rectiligne le calque dans une certaine direction et sur une certaine « distance » pour obtenir **B**.

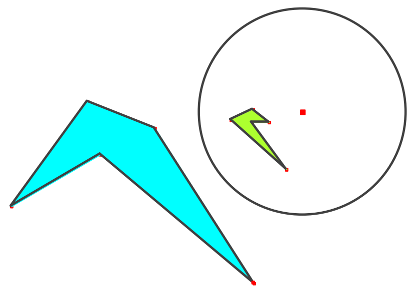
La transformation géométrique permettant de passer de **A** à **B** est une translation. Il s'agit donc de déterminer le vecteur de la translation ou les points remarquables définissant cette translation par une caractérisation avec un parallélogramme. Correction faite en TD.

Cadre 6. Enfin une transformation qui « transforme » ! Pas de possibilité de passer de **A** à **B** après avoir calqué **A**. Il s'agit d'une transformation ponctuelle du plan qui s'appelle une inversion.

Voir la figure ci-dessous.

On se donne une figure **F** quelconque, un cercle. On transforme chaque sommet de **F** par cette inversion. On « obtient » une figure **F'** qu'on peut voir dans le cercle ci-contre. Cette transformation ne conserve pas la « forme », mais elle conserve les angles. On est très loin du programme.

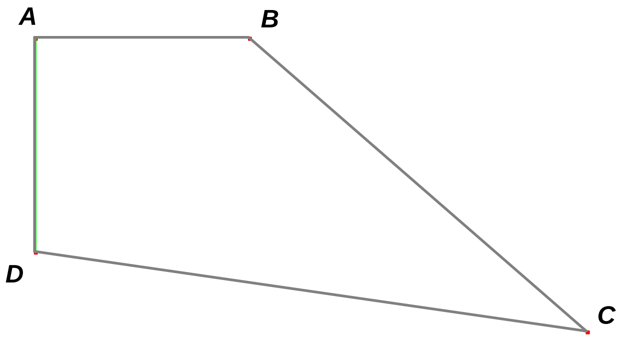
C'est juste à titre culturel !



<u>ACTIVITE 2.</u>

On n'a droit qu'au **<u>pliage – découpage</u>**. Bon d'accord.

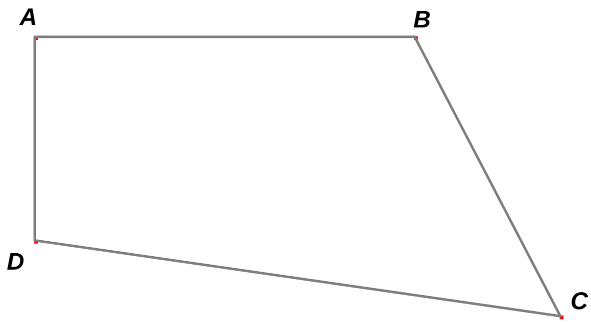
On peut quand même proposer deux méthodes pour la première figure ci-contre. Figure à reproduire et pliages – découpages à effectuer.



1) On plie suivant la médiatrice de [AB]. (*On plie ce segment sur lui-même en amenant A sur B*). On peut alors faire le premier découpage. On plie ensuite suivant la médiatrice de [AD]. (*On plie ce segment sur lui-même en amenant A sur D*). On peut faire le deuxième découpage.
A la qualité des pliages et des découpages près, on a obtenu un CARRE.
<u>Propriété mathématique mobilisée</u> : les deux médiatrices des côtés sont aussi axes de symétrie du carré.

2) <u>Autre pliage</u> : on plie suivant la diagonale [DB]. On découpe suivant le « triangle » ainsi formé. A la qualité du pliage et des découpages près, on a obtenu un CARRE.
<u>Propriété mathématique mobilisée</u> : la diagonale d'un carré est axe de symétrie du carré. *Autre technique ?*

On s'intéresse maintenant à cette deuxième figure.

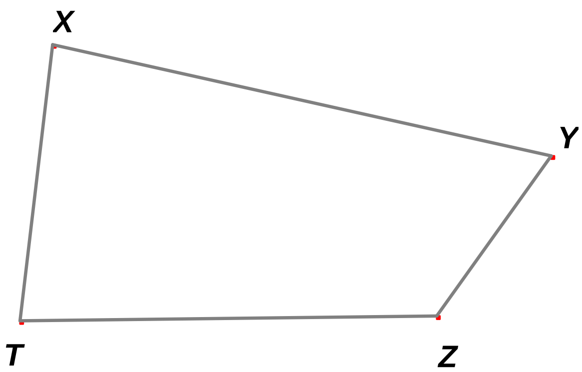


On ne dispose alors plus que d'une seule méthode pour construire un rectangle par **pliage – découpage :** on reprend la méthode **1)** exposée ci-dessus. Figure à reproduire et pliage – découpage à effectuer.

<u>Attention</u> ! Si on plie suivant la diagonale [BD], on n'obtient pas un rectangle : en effet, la diagonale du rectangle n'est pas axe de symétrie.

<u>Dernier cas</u> : un parallélogramme par pliage – découpage ?

Dans ce cas, ce n'est pas possible : en effet, un parallélogramme n'a pas d'axe de symétrie ! Oui, mais il possède un centre de symétrie.



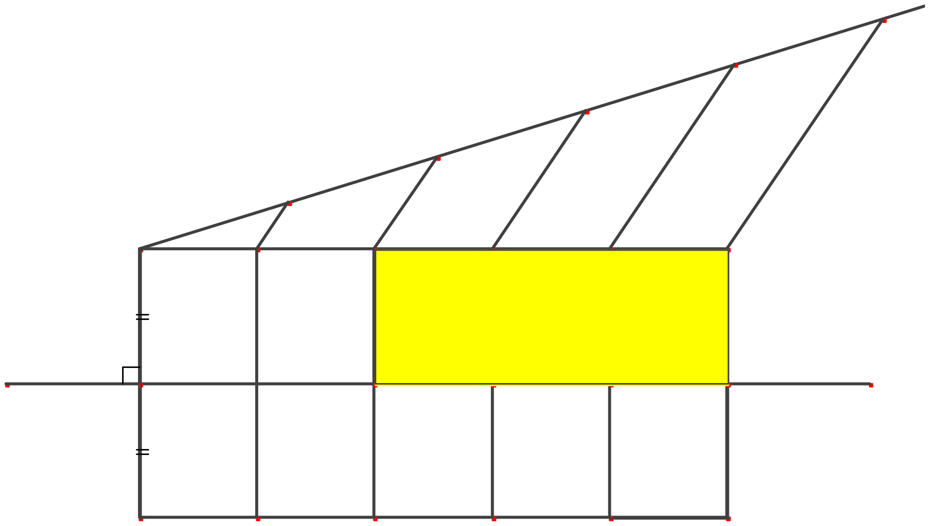
<u>Changement de consigne</u> : on peut maintenant faire du pliage, du découpage, du calque et des déplacements.

Plier selon le segment [TY]. Replier suivant ce segment en amenant T sur Y. Le point W, point d'intersection des deux plis est le centre du « futur » parallélogramme, puisqu'il est le milieu de la diagonale [TY]. Avec un calque, reproduire le triangle (TYZ). Faire tourner exactement d'un demi – tour le calque autour de W.
Suite à cette transformation, on obtient alors un parallélogramme. Figure ci-dessus à reproduire et programme à appliquer. *On peut passer aux exercices plus traditionnels*

Les EXERCICES.

EXERCICE 1.

Figure :
Voir ci-contre.



Pour pouvoir construire le rectangle coloré ou grisé **W**, on peut déjà partager **R** en dix « petits rectangles », puis de colorier trois petits rectangles pour obtenir **W**. Comment partager **R** en dix ? On dispose de deux techniques :

1. Partager la longueur en 10 segments de même longueur et conserver la largeur. Ce n'est pas la solution choisie. *On peut utiliser la technique qui suit pour trouver la solution*.
2. Partager la longueur en 5 segments de même longueur et partager la largeur en 2 segments de même longueur. Voir figure ci-dessus.

- En traçant la médiatrice de la largeur de **R**, on partage cette dimension en deux segments de même longueur. Donc pas de difficulté pour la largeur.
- Pour partager un segment – longueur de **R** en cinq segments de même longueur, on peut utiliser le théorème de Thalès.
  Un(*e*) (*ébauche de*) programme de construction : (*déjà rédigé dans les précédents **TD** de géométrie*).

Tracer une demi-droite d'origine un sommet de **R**.
Choisir un écartement quelconque avec le compas ou un gabarit et reporter cinq fois cet écartement sur la demi-droite en partant de son origine. Marquer les cinq points.
Tracer le segment ***[s]*** qui joint le dernier point obtenu par les reports successifs sur la demi-droite et le deuxième sommet d'un segment – longueur de **R**.
Tracer alors quatre parallèles à ***[s]***, passant respectivement par les quatre points marqués sur la demi-droite. Ces parallèles coupent le segment – longueur du rectangle en quatre points.

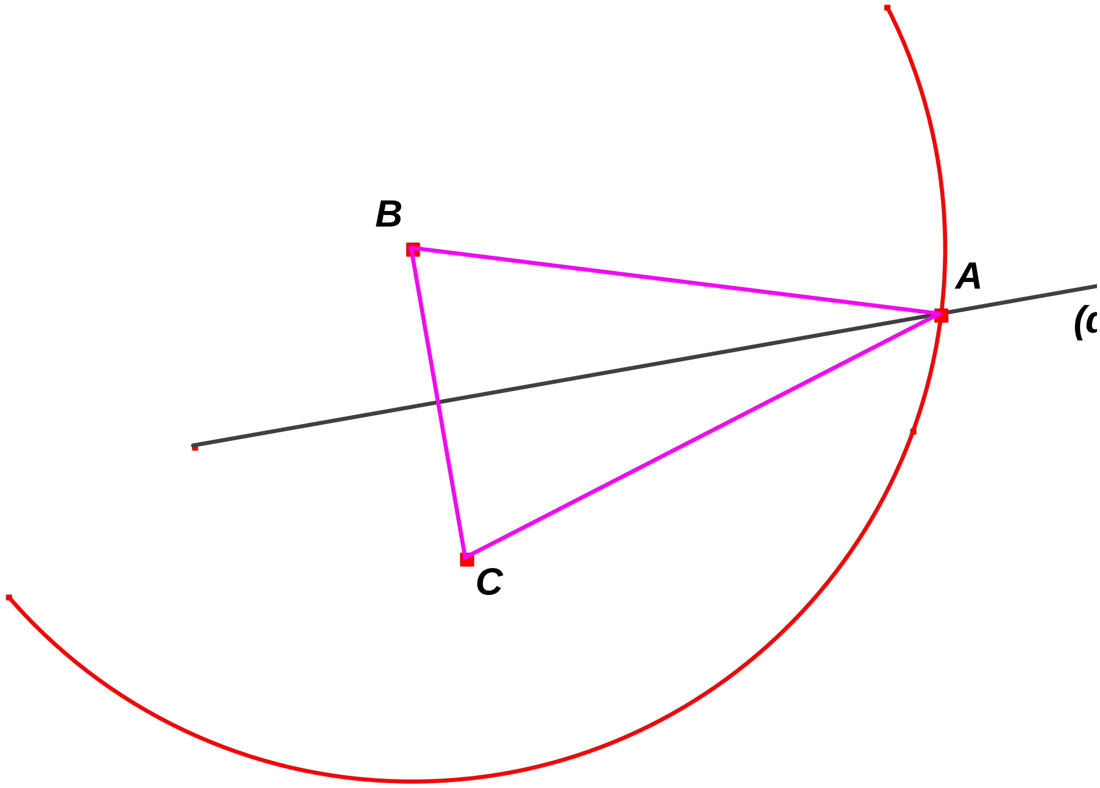
Ces parallèles découpent sur la longueur de **R** cinq segments de même longueur. Il ne reste plus qu'à colorier le rectangle **W**.

EXERCICE 2.

Construction : voir page suivante.
Justification.

Le triangle **(ABC)** est isocèle en **A**, donc en particulier, **(d)** est axe de symétrie de **(ABC)**. De plus, comme le point **A** est le sommet principal, il appartient donc à **(d)**. C'est-à-dire : **A = (d) $\cap$ Cercle (centre B,** rayon **7cm)**. Il y a deux positions possibles : on en choisit une.

On construit ensuite le point **C** comme image du point **B** par la symétrie d'axe **(d)**.



<u>EXERCICE 3.</u>

<u>Construction</u> : non reproduite dans ce corrigé, voir la justification ci-dessous. Figure à construire.
<u>Justification</u>.

Un des trois sommets du triangle **(*T*)** appartient à **(Δ)**. Soit **H** ce point. La droite **(Δ)** est aussi la médiatrice du côté opposé à **H**. Comme le côté de ce triangle mesure 5cm, on trace alors le cercle de centre **H** et de rayon 5cm. Il reste à placer les deux autres sommets. Pour ce faire, on peut construire l'image de **(Δ)** par la rotation de centre **H** et d'angle **30°** : on obtient une droite qui va couper le cercle en deux points, on en choisit un, on l'appelle **I**, qui est alors un sommet du triangle équilatéral. On n'a plus qu'à construire l'image de **I** par la symétrie d'axe **(Δ)** pour obtenir le troisième sommet **P**.

Astucieux, isn't it ?

<u>EXERCICE 4.</u>

Faire éventuellement la figure.

Un triangle équilatéral possède trois axes de symétrie. Chaque axe est à la fois hauteur, bissectrice, médiane et médiatrice. L'erreur vient du fait que l'élève a utilisé une « propriété » qu'il s'est fabriqué, en affirmant que le point d'intersection, s'il existe, de deux axes de symétrie devient centre de symétrie. Cette propriété est vraie lorsque les deux axes de symétrie sont <u>perpendiculaires</u>[2], dans ce cas uniquement, le point d'intersection est centre de symétrie. Or, les axes de symétrie d'un triangle équilatéral ne sont pas perpendiculaires, ils forment un angle de 120°. Ce point de concours de ces axes de symétrie est centre de rotation pour le triangle, qui est globalement conservé par la rotation de centre le point de concours et d'angle 120°.

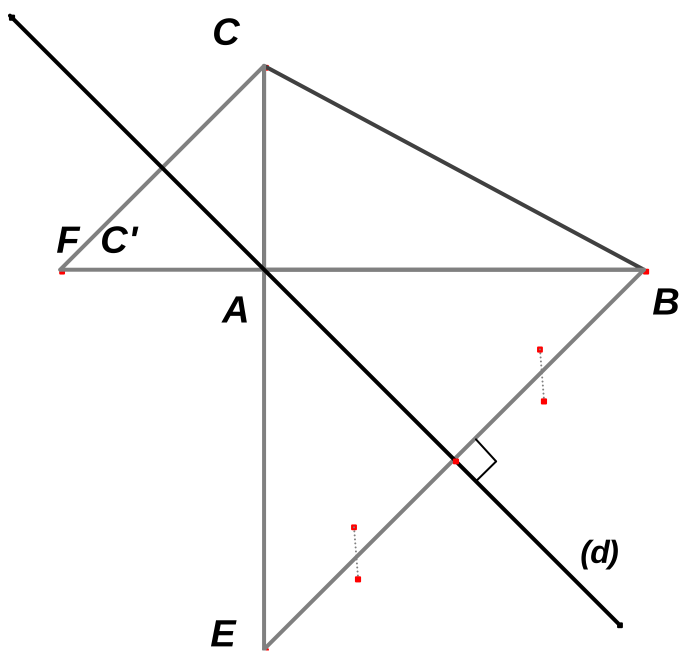
---

[2] Une symétrie centrale est une rotation particulière (*rotation d'angle 180° « = » un « demi-tour »*), mais on peut aussi la définir d'une autre façon : une symétrie centrale est la composée de deux symétries axiales d'axes perpendiculaires. « *Faire agir <u>successivement</u> deux pliages d'axes perpendiculaires revient à faire un demi-tour* ».

EXERCICE 5.

Figure : voir ci-contre.

Les triangles **(ABC)**, **(ACF)** et **(ABE)** sont rectangles en **A**. (*codage de l'angle droit oublié sur la figure*).



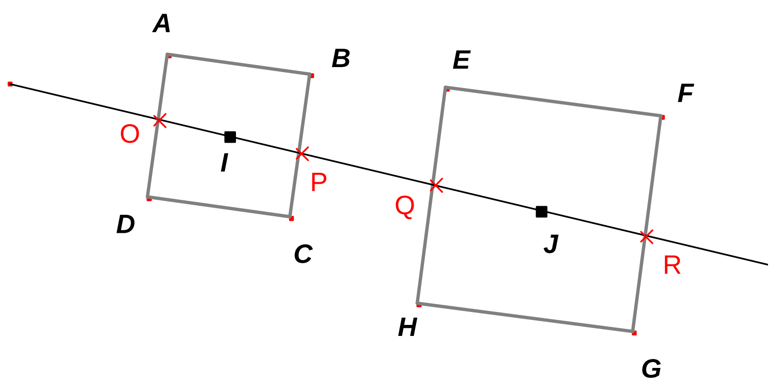
Solution : l'image du triangle **(ABC)** dans la symétrie d'axe **(d)** est le triangle **(AEF)**.

(Une) preuve.

1) Dans la symétrie d'axe **(d)**, l'image du point **B** est le point **E**. En effet, **(d)** est la médiatrice de **[BE]**.
2) Dans cette même symétrie, l'image de **A** est lui-même : **A** est invariant, car **A** appartient à **(d)**.
3) Là, ça se complique !
- ☺ Le point **C** appartient à la droite **(EA)**. En effet, les angles **∠BAC** et **∠BAE** sont droits (*par construction*). D'où : **∠CAE = 180°**.
- ☺ On appelle **C'** le symétrique de **C** dans la symétrie d'axe **(d)**. le point **C'** appartient donc à l'image de la droite **(EA)** dans la symétrie d'axe **(d)** : c'est la droite **(BA)**.
- ☺ Comme **C'** est l'image de **C**, on a **AC'** = **AC**. Le point **C'** appartient à la droite **(AB)**. Le point **F** appartient à la droite **(AB)**, avec **AF** = **AC** (*rappel* : *(ACF) isocèle en A*).
- ☺ *Conclusion* : les points **F** et **C'** sont confondus. L'image du triangle **(ABC)** par la symétrie d'axe **(d)** est le triangle **(AEF)**. (*On a déterminé les images des sommets, d'où les images des segments, …, la symétrie conservant tout ce qu'il faut, dont la forme, on a le résultat*).

EXERCICE 6.

Exercice très « fin » !
Pour déterminer une droite, il suffit d'en « connaître » deux points. Il y a des chances pour que la droite cherchée passe par des points « particuliers », pas des points « *au pif* » ou au hasard ! On appelle **I** et **J** les centres respectifs des carrés **(ABCD)** et **(EFGH)**. Faisons l'hypothèse que **(IJ)** est (*justement*) la droite qui partage les deux carrés en deux parties égales.



Au travail : recherche d'une preuve.
Les points **I** et **J** sont respectivement centres de symétrie des carrés **(ABCD)** et **(EFGH)** : **I** et **J** sont centres d'une rotation d'angle **180°**. On note **O**, **P**, **Q** et **R** les points d'intersection de **(IJ)** avec les côtés **[AD]**, **[BC]**, **[EH]** et **[FG]** (*voir figure*).
- ☺ Dans la rotation de centre **I** et d'angle **180°**, le trapèze **(OABP)** a pour image le trapèze **(PCDO)** (*à rédiger : image de A = ?, image de B = ?, …*), ces deux trapèzes sont **superposables** (*conservation des longueurs, des angles, de la « forme » par rotation*). La droite **(OP)** partage donc le carré **(ABCD)** en deux parties égales.

☺ De même, on démontre que la droite **(QR)** partage le carré **(EFGH)** en deux parties égales (*à rédiger, en calquant la rédaction précédente*).

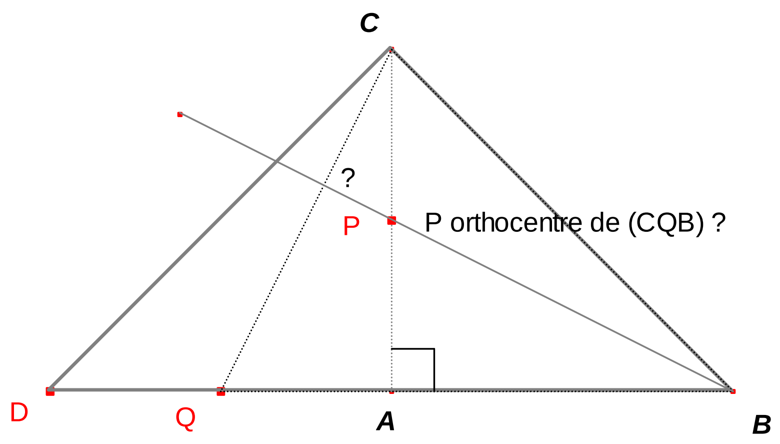
☺ <u>Conclusion</u> : la droite **(IJ)** partage les deux carrés **(ABCD)** et **(EFGH)** en deux parties égales. L'hypothèse formulée ci-dessus est vraie[3].

En fait, cette propriété est vraie pour les quadrilatères qui admettent un centre de symétrie. Donc, cette propriété est vraie pour les rectangles, les parallélogrammes, les losanges.

<u>EXERCICE 7.</u>

1. On peut fabriquer un tableau de correspondances pour la rotation de centre **A** et d'angle **90°**.

Point à transformer :	Point-image dans la rotation :
A	**A**
B	**C**
C	**D**
P	**Q**



Deuxième tableau de correspondance : images de quelques objets.

« Objet » à transformer :	« Objet-image » dans la rotation.
Droite (BC).	**Droite (CD).**
Segment [BC].	**Segment [CD].**

De plus, on a :

☺ **$\angle BCD = B\widehat{C}D = 90°$,** car l'angle formé par une droite et son image a pour mesure l'angle de la rotation, çàd 90°.

☺ **BC = CD**, car une rotation conserve les longueurs.

<u>Conclusion</u> : le triangle **(BCD)** est rectangle isocèle en **C**.

2. L'image de la droite **(BP)** dans la rotation de centre **A** et d'angle **90°** est la droite **(CQ)**.
On a donc : **(BP) ⊥ (CQ)**.
Autrement dit, cela signifie que dans le triangle **(QCB)**, **[BP)** est la hauteur issue de **B** relative à **(CQ)**.
On sait aussi que **[CA)** est la hauteur issue de **C** relative à **(AB)** (*(ABC) triangle RECTANGLE et isocèle en A : énoncé*).

<u>D'où</u> : le point **P** est le point commun à deux hauteurs dans le triangle **(CQB)**, ce qui signifie que le point **P** est **l'orthocentre** du triangle **(CQB)**.

<u>EXERCICE 1</u> : suite et fin.

Pour construire le rectangle **T**, on peut procéder comme pour le rectangle **R**. On peut aussi utiliser la fameuse propriété du « **k**, **k²**, **k³** ». En effet, si on divise par trois les dimensions (*longueur* et *largeur*) d'un rectangle, son aire est divisée par 3² = 9. On peut facilement construire **T**, sachant que $\frac{4}{9} = 4 \times \frac{1}{9}$.

A construire ! *Voilà pour cette fiche, à la suivante !*

---

3 On vient de faire une démonstration par « ***analyse – synthèse*** ». ***<u>Analyse</u>*** : on « décortique » le problème et on émet une hypothèse (forte !) sur la solution. ***<u>Synthèse</u>*** : on cherche à prouver l'hypothèse émise par un raisonnement approprié.