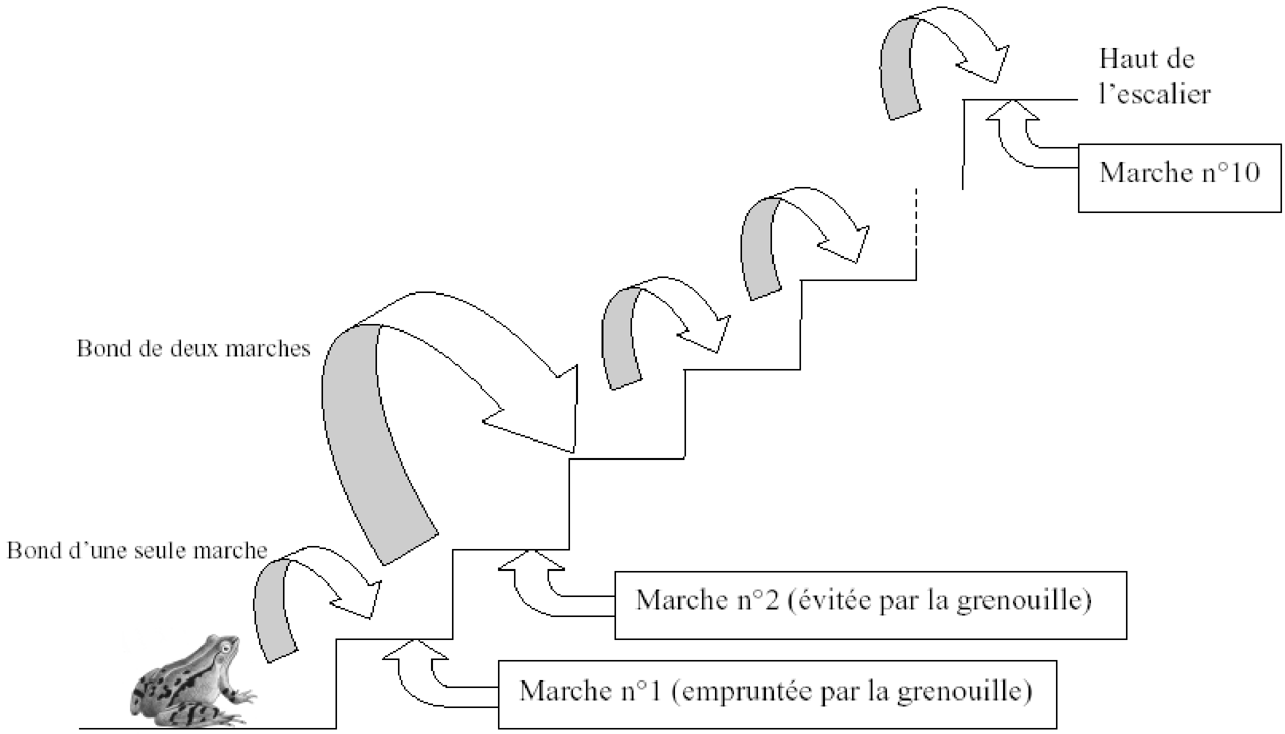
# **<u>EXERCICE</u>**. D'après un **CB** de l'académie de RENNES. (*<u>Sujet **COPIRELEM**</u>*).

Une grenouille veut monter un escalier. (*C'est une idée comme une autre !*).
À chaque saut, elle peut gravir une marche ou deux marches d'un coup. Le but de cet exercice est de déterminer le nombre de façons différentes qu'elle a pour monter un escalier de dix marches.




Il existe une possibilité pour monter un escalier à une marche, deux possibilités pour monter un escalier à deux marches et trois possibilités pour monter un escalier à trois marches.

**1)** Déterminer le nombre de possibilités pour monter un escalier à quatre marches ? Justifier.

**2)** Utiliser un « arbre de choix » pour déterminer le nombre de possibilités pour monter un escalier à cinq marches.

Appelons U(***n***) le nombre de façons différentes de monter un escalier à ***n*** marches.
On a ainsi : U(1) = 1 (*En effet, il y a une seule façon de monter un escalier à une marche*) ; U(2) = 2 et U(3) = 3 (*Voir ci-dessus*).

**3) a)** Déterminer U(6). Justifier.

**3) b)** Trouver une relation entre U(***n***), U(***n***–1) et U(***n***–2) pour tout entier ***n*** supérieur ou égal à 3. Justifier la réponse.

**3) c)** Si on utilise un tableur pour obtenir rapidement le nombre de possibilités qu'a la grenouille pour monter un escalier ayant de nombreuses marches, on peut construire le tableau suivant :

A1 ▾ fx Numéro de la marche:

| | A | B |
|---|---|---|
| 1 | Numéro de la marche: | Nombre de façons d'y accéder: |
| 2 | 1 | |
| 3 | 2 | |
| 4 | 3 | |
| 5 | 4 | |
| 6 | 5 | |
| 7 | | |
| 8 | | |

Sachant que dans les cellules ***B2*** et ***B3***, il faut écrire les deux premiers nombres donnés à la question **1)**, quelle formule doit-on entrer dans la cellule ***B4*** pour obtenir ensuite rapidement les résultats escomptés ?

**4)** Déterminer le nombre de possibilités qu'a la grenouille pour monter un escalier de 10 marches. Idem pour un nombre très grand de marches qu'on peut choisir.

## ***Questions complémentaires.***

Des travaux d'élèves de cycle III relatifs au problème que leur professeur des écoles leur a proposé sont proposés **en ANNEXES 1 et 2**.

Le texte est le suivant :

« *Une grenouille veut monter un escalier de cinq marches. À chaque saut, elle monte d'une seule marche ou de deux marches d'un coup. Combien de « chemins différents » a-t-elle pour monter cet escalier ?* ».

En référence aux instructions officielles 2002, pas 2008, à quel « type de problème » correspond cet énoncé ?

Donner deux difficultés que peut poser ce problème à des élèves de cycle III.

Analyser les productions des élèves **A**, **B**, **C** et **D** en termes de réussite. Préciser le type de procédure utilisée, et relever les erreurs éventuelles.

**ANNEXE 1**

Elève **A**

Recherche :


Réponse :

Il y a 3 chemin diferant pour monté l'escalier

1. 1 bon - 2 bons - 1 bon - 1 bons.

2. 2 bons - 1 bon - 2 bons

3. 1 bon - 1 bon - 1 bon - 1 bon - 1 bon

Elève **B**

Recherche :

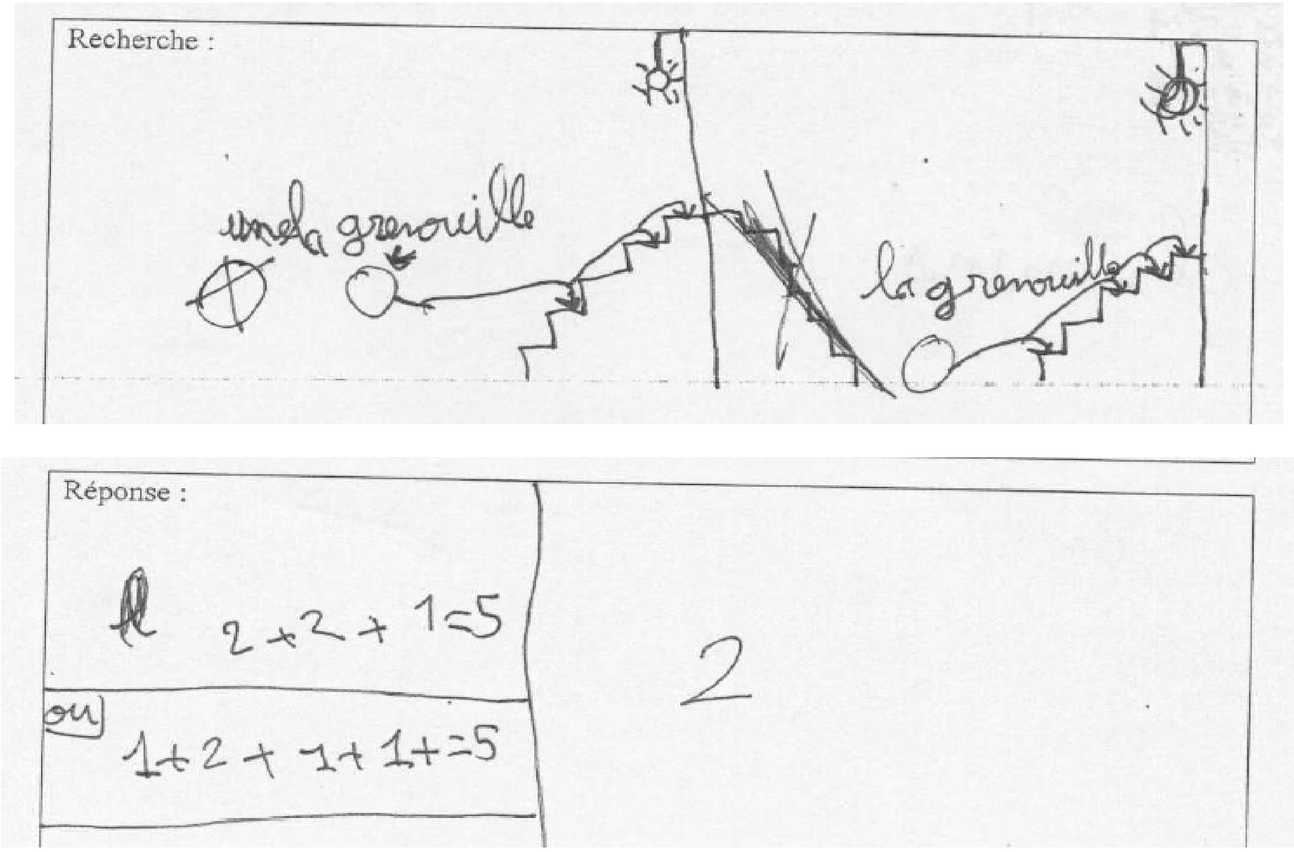
$2+1+2=5$ ; $1+2+2=5$ ; $2+2+1=5$ ; $1+1+1+1+1=5$ ; $2+1+1+1=5$ ; $1+2+1+1=5$ ; $1+1+2+1=5$ ; $1+1+1+2=5$

Réponse :

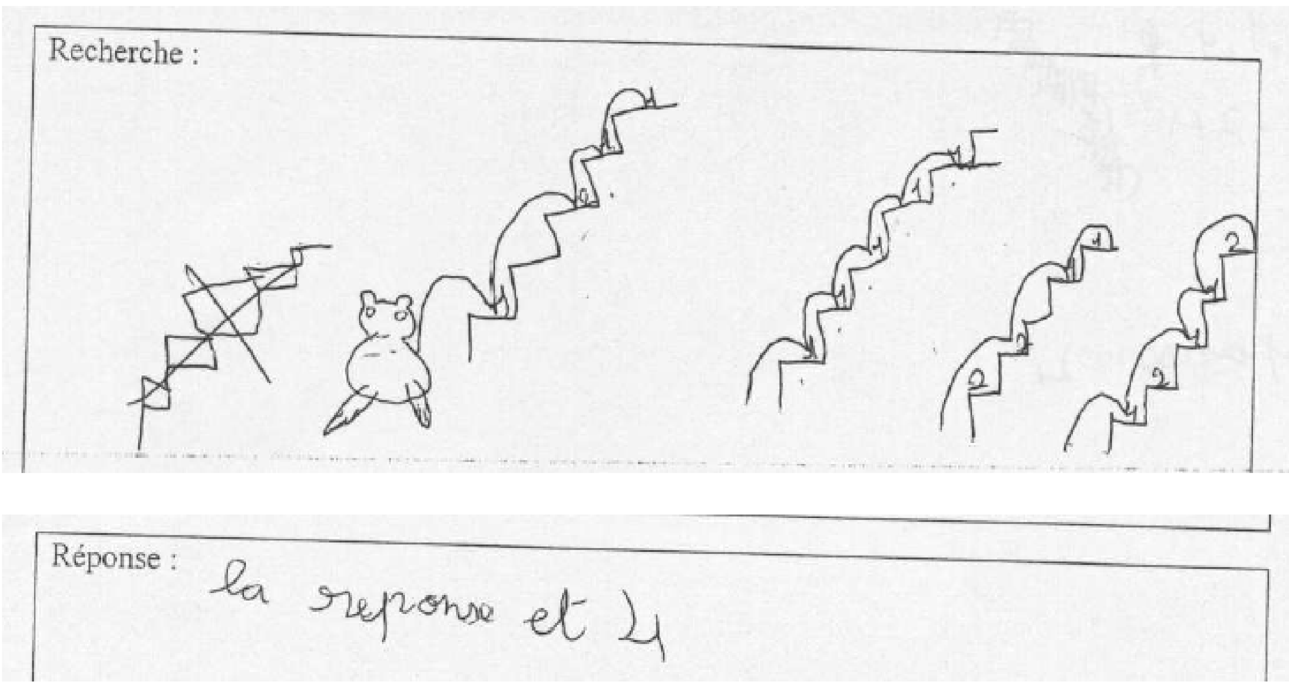
La grenouille peut monter 8 façons différente.

**ANNEXE 2**

Elève **C**




Elève **D**



# PISTES de SOLUTION

Ce problème original est un « ***problème pour chercher*** » (*Dénombrement*), au sens des programmes 2002, pas 2008. Une lecture attentive de ces programmes est tout à fait explicite !

**1)** Nombre de possibilités de monter un escalier à quatre marches. Plusieurs méthodes de résolution.

***Méthode 1.***

Une possibilité de monter un escalier de quatre marches par sauts de une ou deux marches correspond à une décomposition du nombre « 4 » sous forme d'une somme dont les termes sont un ou deux. On cherche alors toutes les décompositions possibles ainsi constituées :

$4 = 1 + 1 + 1 + 1$ ; $4 = 2 + 1 + 1$ ; $4 = 1 + 2 + 1$ ; $4 = 1 + 1 + 2$ ; $4 = 2 + 2$.

Ces cinq décompositions additives de « 4 » donnent le nombre de possibilités de monter un escalier de quatre marches par sauts d'une ou deux marches.

***Méthode 2.***

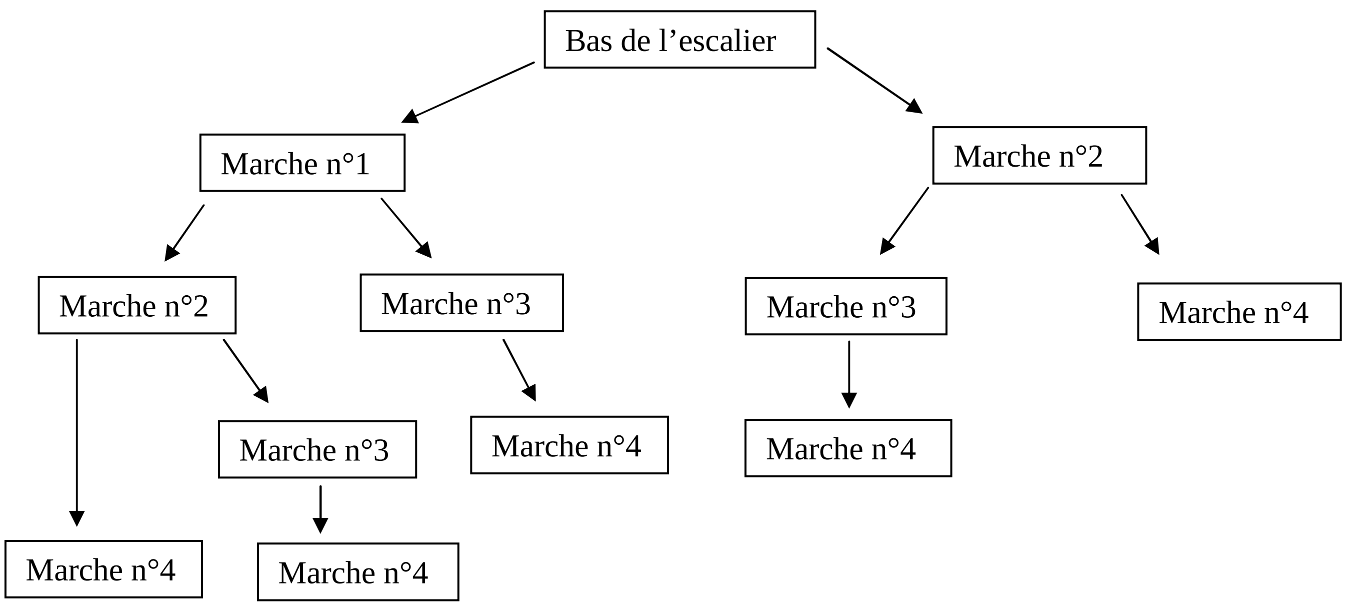
On numérote les quatre marches ①, ②, ③ et ④. Une possibilité de monter un escalier de quatre marches par sauts d'une ou deux marches correspond à une liste des marches empruntées. Il suffit alors d'écrire toutes les listes de marches empruntées : **①, ②, ③, ④** ; **①, ②, ④** ; **①, ③, ④** ; **②, ③, ④** et **②, ④**. Ces cinq listes sont les 5 possibilités de monter un escalier de quatre marches.

***Méthode 3.***

On peut remarquer que pour atteindre la marche numéro ④, la grenouille vient soit de la marche numéro ③ (avec un bond de une marche), soit de la marche ② (avec un bond de deux marches). Or on sait qu'il y a trois possibilités différentes d'arriver à la marche numéro ③ et deux possibilités différentes d'arriver à la marche numéro ②. Elle a donc au total 3 + 2 = 5 possibilités d'arriver en haut de l'escalier de ④ marches.

***Méthode 4.***

Un arbre de choix est aussi possible pour obtenir le résultat.




Les « feuilles » de cet arbre de choix (les extrémités des branches) sont au nombre de cinq. Les branches de cet arbre sont toutes les possibilités différentes de parvenir à la marche numéro ④.

**La grenouille a donc cinq possibilités différentes de monter un escalier de 4 marches.**

**2)** Arbre de choix pour un escalier à cinq marches.

<u>*Remarque.*</u>

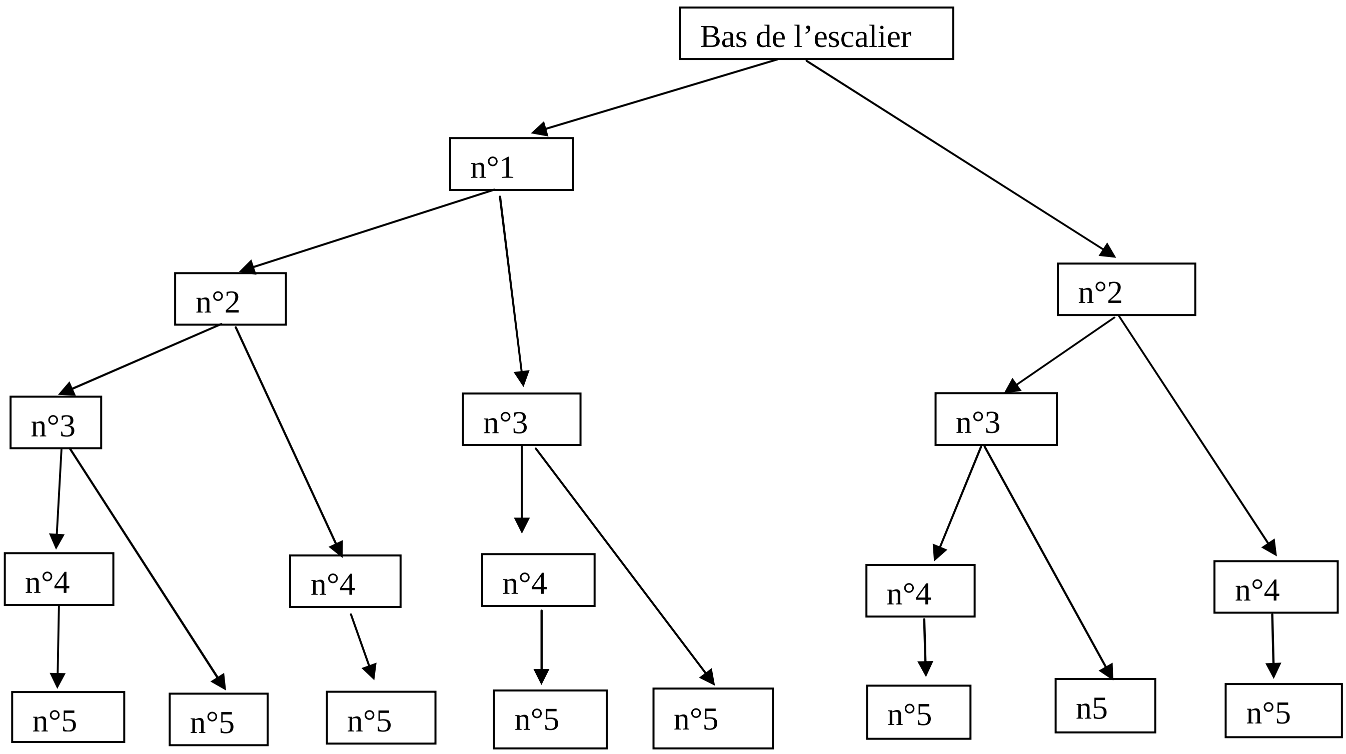
Au moins deux types d'arbres de choix sont réalisables ici :

*L'un dans lequel on obtient le résultat en comptant le nombre de « feuilles » ;*

*L'autre dans lequel chaque nœud est associé à un numéro de marche indiqué au dessous. La valeur d'un nœud correspond au nombre de possibilités pour atteindre la marche associée à ce nœud.*

***<u>Méthode 1</u>***

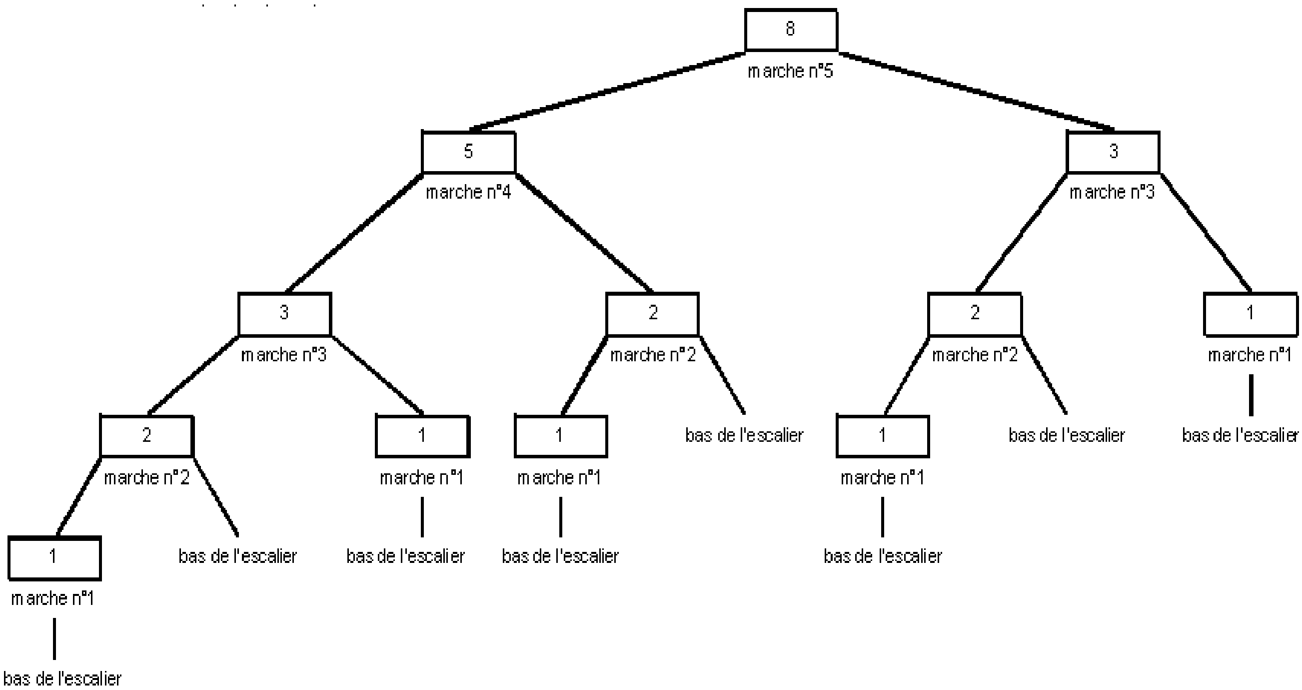
Le nombre de possibilités de monter un escalier à cinq marches est donné par le nombre de feuilles de cet arbre de choix.




**Il y a donc 8 possibilités pour la grenouille de monter un escalier de cinq marches.**

***<u>Méthode 2</u>***

Pour créer l'arbre de choix page suivante, on commence par la case supérieure (marche ⑤) et on regarde les différentes possibilités d'atteindre les marches inférieures. On arrive à la marche numéro ⑤ soit par la marche numéro ④ soit par la marche numéro ③. Et ainsi de suite jusqu'au bas de l'escalier. Ensuite on marque dans la case, le nombre de possibilités d'atteindre la marche correspondante (ce nombre de possibilités s'obtient en ajoutant les deux nombres de possibilités d'atteindre les marches immédiatement en dessous).




Il y a 8huit possibilités de se retrouver en bas de l'escalier (il y huit « feuilles »).

**Il y a donc huit possibilités pour monter un escalier de cinq marches.**

**3) a)** Valeur de U(6).

*<u>Remarque</u>. Les méthodes exposées dans les questions 1) et 2) sont encore valables. On ne les détaille donc pas, on les résume.*

***<u>Méthode 1.</u>***

Liste des différentes décompositions additives de six avec des uns et des deux. On trouve 13 décompositions donc 13 possibilités de monter un escalier de six marches.

***<u>Méthode 2.</u>***

Liste de tous les chemins en numérotant les marches de ① à ⑥. On trouve 13 chemins distincts donc 13 possibilités de monter un escalier de six marches.

***<u>Méthode 3.</u>***

Arbres de choix (deux possibilités comme dans la question 2). Il suffit alors de compter les feuilles (13) ou de lire le résultat dans la case supérieure (13). Ainsi il y a 13 possibilités de monter un escalier de six marches.

***<u>Méthode 4.</u>***

Pour parvenir à la marche ⑥ : on a effectué soit un bond de deux à partir de la marche ④ soit un bond de un à partir de la marche ⑤. Le résultat est donné par la somme du nombre de possibilités pour parvenir à la marche ④ et du nombre de possibilités pour parvenir à la marche ⑤.
Ainsi : U (6) = U(4) + U(5). Or on sait que U(4) = 5 et U(5) = 8, donc U(6) = 13. **On a $\boxed{\mathbf{U(6) = 13}}$.**

**3) b)** Relation entre U($\boldsymbol{n}$), U($\boldsymbol{n}$–1) et U($\boldsymbol{n}$–2).

Pour atteindre la marche $\boldsymbol{n}$, la grenouille peut venir de la marche $\boldsymbol{n} - 2$ ou de la marche $\boldsymbol{n} - 1$. Elle a alors U($\boldsymbol{n}$–2) possibilités pour atteindre la marche $\boldsymbol{n} - 2$ et U($\boldsymbol{n} - 1$) possibilités pour atteindre la marche $\boldsymbol{n} - 1$, donc : U($\boldsymbol{n}$) = U($\boldsymbol{n} - 2$) + U($\boldsymbol{n} - 1$) (avec $\boldsymbol{n}$ supérieur ou égal à 3).

**Ainsi : $\boxed{\mathbf{U(\boldsymbol{n}) = U(\boldsymbol{n} - 1) + U(\boldsymbol{n} - 2)}}$.**

**3) c)** Utilisation du tableur.

Pour que le logiciel fournisse les résultats demandés, il faut attribuer à la cellule **B4** la somme des valeurs des cellules **B2** et **B3** ; soit entrer les formules suivantes **=B2+B3** ou **=SOMME(B2;B3)** ou **=SOMME(B2:B3).**

Pour obtenir la suite des nombres de cas possibles, on « tire » vers le bas le résultat obtenu dans la cellule **B4**. Il y a plusieurs façons de programmer les cellules : et donc, toute bonne programmation est acceptée, of course !

**4)** Nombre de possibilités de monter un escalier à dix marches.

*Remarque :*

*Parmi les différentes procédures possibles, les décompositions additives, la liste complète des différentes marches empruntées, un arbre de choix montrent leur limite en raison du «grand nombre» de possibilités qu'a la grenouille de monter un escalier de dix marches.*

La méthode développée dans la question 3) est la plus adaptée. La présentation des calculs peut se faire sous la forme d'un tableau dans lequel les deux premiers nombres de possibilités sont entrés (Une possibilité d'atteindre la marche ①, deux possibilités d'atteindre la marche ②, puis, le nombre figurant dans chacune des cases s'obtient en ajoutant les nombres des 2deux cases précédentes.

| Numéro de la marche (**k**) | ① | ② | ③ | ④ | ⑤ | ⑥ | ⑦ | ⑧ | ⑨ | ⑩ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre U(***n***) de possibilités d'atteindre la marche numéro n°(**k**) | **1** | **2** | **3** | **5** | **8** | **13** | **21** | **34** | **55** | **89** |

On a : 89 = 34 + 55. **La grenouille a donc 89 possibilités pour monter un escalier de 10 marches.**

*Remarque : La suite définie dans cet exercice porte le nom de **suite de Fibonacci**.*

## ***Questions complémentaires.***

**1)** Type de problème. *Voir l'entête de l'exercice !*

Pour résoudre ce problème, les élèves ne connaissent pas encore de solution experte. L'objectif associé à la « résolution de ce problème » est de développer chez les élèves un comportement de recherche et des compétences d'ordre méthodologique : émettre des hypothèses et les tester, faire et gérer des essais successifs, élaborer une solution originale et en éprouver la validité, argumenter. Ce problème est donc de type **"Problème pour chercher"**. (Au sens des programmes 2002, pas 2008).

**2)** Difficultés de ce problème.

Ce problème présente des difficultés de plusieurs ordres.

Difficultés relatives à l'énoncé : dans l'énoncé, l'expression « chemins différents » est difficile à interpréter. En effet, le chemin est le même : « aller du bas de l'escalier jusqu'à la 5$^{\text{ème}}$ marche » mais la grenouille peut le faire en effectuant des bonds différents. Le maître sera amené à préciser cette expression : cela participe de la dévolution du problème aux élèves.

Difficultés relatives à la recherche et la production de la solution : les élèves peuvent avoir des difficultés à élaborer une procédure personnelle en respectant les diverses contraintes : escalier à 5 marches, sauts de une marche ou de deux marches ; les élèves peuvent avoir des problèmes d'organisation pour trouver toutes les possibilités ; les élèves peuvent avoir des difficultés à mettre en relation leur recherche (trouver des «chemins différents») et la réponse attendue (un nombre) ; les élèves peuvent avoir des difficultés à conclure et être sûrs d'avoir énuméré toutes les possibilités.

**3)** Analyse de productions d'élèves.

| | Réussite | Procédure | Erreurs |
|---|---|---|---|
| **A** | L'élève **A** trouve trois possibilités correctes, ce qui est incomplet. Sa réponse « trois chemins » est donc fausse. | Il utilise une procédure de type dessin. Il prend en compte les contraintes du problème : l'élève dessine un escalier à 5 marches et matérialise les bonds de 1 ou de 2 marches par des arcs accompagnés d'une référence à la longueur de ces bonds.<br>L'élève utilise un seul dessin pour représenter 3 « chemins » différents (succession de bonds orientés).<br>Il répond au problème par une phrase-réponse cohérente avec ses recherches en reprenant les termes de la question posée. Il détaille chacun des « chemins » trouvés en listant, pour chaque solution, la succession des « bonds ». | Il confond les termes ***bond*** et ***marche*** (Remarque : cela n'a pas d'incidence sur la recherche menée).<br>Il n'a pas réussi à « visualiser » et à représenter toutes les possibilités.<br>Il fait deux erreurs d'orthographe. |
| **B** | L'élève **B** a trouvé les huit possibilités attendues.<br>Sa réponse est juste. | Il utilise une procédure de type numérique.<br>La prise en compte des contraintes du problème est vérifiable par la présence des nombres 5, 1 et 2 dans sa recherche.<br>L'élève produit des décompositions additives du nombre 5 utilisant les termes 1 et 2 ; elles sont présentées sous la forme d'additions posées en colonne<br>L'élève s'intéresse d'abord aux décompositions de 5 contenant deux termes « 2 », puis zéro terme « 2 » et enfin un seul terme « 2 ». C'est une stratégie d'énumération correcte.<br>Enfin, il répond à la question du problème en rédigeant une phrase en liaison avec la question posée. | Pas d'erreur. |
| **C** | L'élève a trouvé deux possibilités correctes mais il en manque.<br>Sa réponse « 2 » est fausse. | Il utilise pour ses recherches une procédure de type dessin ; ensuite il représente numériquement les 2 chemins dessinés en écrivant les deux décompositions additives de 5 correspondantes.<br>Il respecte les contraintes du problème : l'élève dessine des escaliers à 5 marches et représente les sauts de 1 ou de 2 marches par des flèches orientées.<br>L'élève dessine un escalier pour chaque nouvelle recherche.<br>L'élève répond ensuite au problème en indiquant simplement « 2 » dans le cadre-réponse | Il n'a pas réussi à « visualiser » et à représenter toutes les possibilités.<br>Dans la deuxième égalité, le dernier « **+** » n'a pas lieu d'être. |
| | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **D** | La réponse de l'élève « 4 » est fausse. | Il utilise une procédure de type dessin.<br>Il prend en compte les contraintes du problème : l'élève dessine des escaliers à 5 marches, matérialise les bonds de 1 ou de 2 marches par des arcs (non orientés). Il indique la longueur du bond sur chaque marche empruntée.<br>L'élève dessine un escalier pour chaque nouvelle recherche.<br>Ensuite, il répond par une phrase succincte qui comporte le nombre « 4 » mais qui ne reprend pas les termes de la question posée par le problème. | Deux erreurs :<br>non cohérence entre la longueur de certains bonds et les informations numériques associées sur les deux derniers dessins.<br>Escalier 3 :<br>On voit 3 bonds de longueur 2 marches, 2 marches et 1 marche alors que l'élève a noté les nombres 2, 2, 1, 1.<br>Escalier 4 :<br>On voit 4 bonds de longueur 1 marche, 2 marches, 1 marche et 1 marche alors que l'élève a noté les nombres 1, 2, 1, 1, 2.<br>L'élève a représenté deux fois le « même chemin » sur les dessins 1 et 4 mais ne semble pas s'en apercevoir puisqu'il dénombre 4 chemins différents. |