# Partie 3 d’un sujet d’examen partiel M1 = Problème 3, sujet CRPE

**1.** À quel(s) niveau(x) de classe, les élèves rencontrent-ils la technique opératoire « usuelle » de la multiplication de deux nombres entiers naturels ? Présenter cette technique à partir de l’exemple suivant : 459 × 37 ; en précisant les pré-requis nécessaires.

*Occasion idéale pour aller jeter un œil non distrait dans les programmes 2016 !*

**2.** Voici ci-dessous, six multiplications « posées » par des élèves de cycle III. Elles sont toutes incorrectes ou fausses. On s’intéresse aux multiplications posées **b**), **d**) et **e**). Relever les erreurs commises. Pour chacune d’elles, formuler une hypothèse sur l’origine de ces erreurs.

*Remarque*. Les retenues et autres écritures liées aux différents calculs figurent telles quelles dans la (re)copie ci-dessous des opérations produites par les élèves.

a)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 5 | 9 | | |
| | x | | 3 | 7 | 3 | 3 |
| | | 1 | | | | |
| | 3 | 1 | 8 | 6 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 7 | 7 | 0 | | |
| 1 | 6 | 9 | 5 | 6 | | |

b)

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4 | 5 | 9 | | |
| x | | 3 | 7 | 6 | 4 |
| | | 1 | | | |
| 3 | 2 | 1 | 3 | 2 | 1 |
| 1 | 3 | 7 | 7 | | |
| 4 | 5 | 9 | 0 | | |

c)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 4 | 5 | 9 | | |
| | x | | 3 | 7 | 1 | 1 |
| | 1 | 1 | | | | |
| | 2 | 8 | 6 | 2 | 2 | 3 |
| 6 | 6 | 7 | 8 | 0 | | |
| 1 | 9 | 6 | 4 | 2 | | |

d)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | 4 | 5 | 9 | | |
| | | x | 3 | 7 | | 6 | 4 |
| | | | 0 | 0 | 0 | 2 | 1 |
| | 3 | 2 | 1 | 3 | 0 | | |
| 1 | 3 | 7 | 7 | 0 | 0 | | |
| 1 | 6 | 9 | 8 | 3 | 0 | | |

e)

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5 | 6 |
| x | | 3 | 4 |
| | 1 | 1 | |
| | | 2 | 4 |
| | 2 | 0 | 0 |
| | | 1 | 8 |
| | | 7 | 5 |
| | 3 | 1 | 7 |

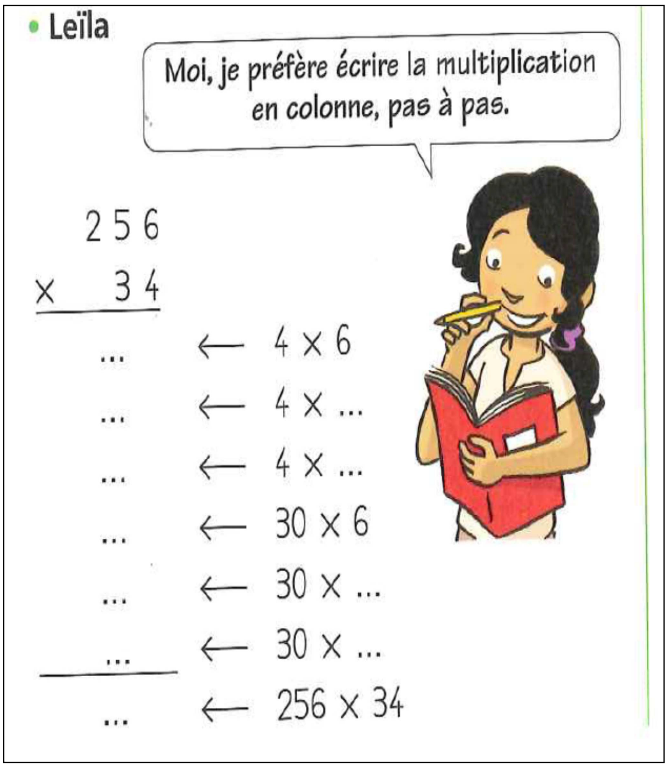
f)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 2 | 5 | 6 | | |
| | x | | 3 | 4 | 2 | |
| | | 1 | | | | |
| 1 | 0 | 0 | 2 | 4 | 1 | 1 |
| 6 | 1 | 6 | 8 | 0 | | |
| 7 | 1 | 7 | 0 | 4 | | |

Devant toutes ces erreurs dans la non-maîtrise par les élèves de l'algorithme « usuel » de la multiplication posée, un enseignant choisit d'expérimenter deux autres techniques opératoires de la multiplication.

**3.** Étude d'une première nouvelle technique : la technique de Leïla (<u>*Source*</u> : manuel de la collection Euro Math, programmes 2008).

***<u>Extrait 1</u>***.




**a)** Utiliser cette technique pour calculer la valeur du produit : $459 \times 37$.

**b)** Donner deux propriétés mathématiques qui justifient cette technique.

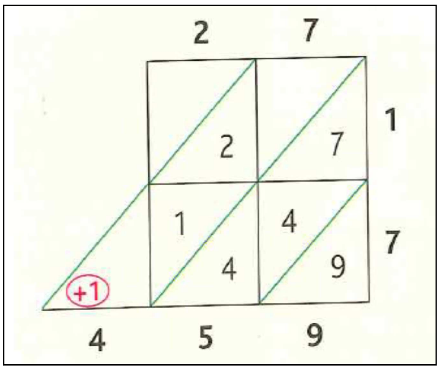
**c)** Donner trois pré-requis nécessaires pour mobiliser cette technique.

**d)** Donner un point fort et un point faible de la technique de Leila.

**e)** On veut utiliser la technique de Leila pour « revisiter » la technique usuelle. Comment passer de l'une à l'autre ? En quoi la technique de Leila peut-elle redonner du sens à la technique usuelle ?

**4.** Étude d'une deuxième nouvelle technique : la multiplication dite « per Gelosia », illustrée par l'extrait 2 ci-contre.

***<u>Extrait 2</u>***




**a)** Utiliser la technique « per Gelosia » pour calculer la valeur du produit : $459 \times 37$.

**b)** Donner deux propriétés mathématiques qui justifient cette technique.

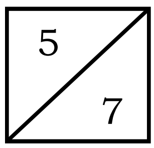
**c)** Donner deux pré-requis nécessaires pour mobiliser cette technique.

**d)** Donner un point fort et un point faible de cette technique.

**5.** Dans cette question, on s'intéresse à la multiplication « per Gelosia ».

**a)** Pour calculer un certain produit, un élève a écrit le nombre 57 dans une des cases du tableau.

Pourquoi est-on certain qu'il a commis une erreur ?




**b)** Quel(s) chiffre(s) peut-on écrire dans la demi-case du bas, sachant que le chiffre inscrit dans la demi-case du haut est le 2. Justifier. Même question avec le chiffre 8.

**c)** Quel(s) chiffre(s) peut-on écrire dans la demi-case du haut, sachant que le chiffre inscrit dans la demi-case du bas est le 4. Justifier.

<u>*Changement de nature des nombres en jeu*</u> : nombres décimaux, écrits sous leur forme usuelle, et technique opératoire de la multiplication

**6.** On s'intéresse maintenant au produit : 25,6 × 3,4.

Voici, ci-contre, la production d'un élève :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 2 | 5, | 6 |
| × | | 3, | 4 |
| 1 | 0 | 2 | 4 |
| | 7 | 6 | 8 |
| 1 | 7 | 9, | 2 |

**a)** Analyser les deux erreurs commises.

**b)** Proposer une hypothèse sur chacune de ces erreurs.

**c)** Proposer une remédiation possible pour cet élève.

## Pour aller plus loin… Ok, allons-y !

Puisqu'on y est, on va « densifier » notre interrogation sur les ***nombres décimaux***. *Bonne idée !*

<u>*Entrée choisie*</u> : introduction des nombres décimaux à l'école primaire. Etude de quelques questions, avec le niveau de connaissances à ce niveau de l'année. *Une étude plus complète de quelques éléments théoriques et mathématiques sera développée en TD.*

**(i)** Niveaux de classe et « exigences » ?

**(ii)** Quelques erreurs et écueils à éviter…

**(iii)** Structuration de l'enseignement : par quoi commencer ?, pourquoi ?, « liens » avec les entiers ?, « ruptures » avec les entiers ?…

**(iv)** Pourquoi privilégier l'entrée par les ***fractions décimales*** ? <u>*Corollaire*</u> : expliciter une trame de progression possible. Justifier et argumenter…

Pour finir, *au moins provisoirement*, quelques questions en vrac :

**1)** Lire, à voix haute, de différentes manières, le nombre 17,83. Donner alors quelques points-forts et points faibles de chacune de ces lectures.
**2)** Donner quelques difficultés structurelles liées à l'enseignement des nombres décimaux. Exemplifier et justifier…
**3)** Un enseignant de cycle III demande à ses élèves d'écrire des deux égalités comme ci-dessous. Quel peut être alors le projet et la visée d'apprentissage(s) de cet enseignant ?
Deux égalités : $\frac{1783}{100} = 17 + \frac{8}{10} + \frac{3}{100}$ ; $\frac{49}{100} = 0 + \frac{8}{10} + \frac{9}{100}$ …

# PISTES de CORRECTION…GCD, Copirelem et PW

1. Cf. les programmes officiels 2016 pour « confirmer » les éléments de réponse ci-dessous.

Les élèves rencontrent la multiplication et l'utilisent pour effectuer des multiplications d'un entier par un nombre à un chiffre en classe de CE1, souvent à partir de « l'équivalence » : *multiplication = addition répétée ou addition réitérée*. A ce niveau de classe, la multiplication est plutôt posée en ligne.

Cette technique évolue et s'amplifie lorsque le multiplicateur possède plus d'un chiffre, à partir du CE2. La disposition des calculs en colonnes va prendre plus de place (*toute la place ?*) en CM1.

D'où les deux pré-requis essentiels : (***i***) connaissance par application en acte des tables de multiplication et (***ii***) connaissance des principes et des règles de la numération : décomposition canonique, groupements et échanges. Sans oublier (***iii***), calculer une somme de plusieurs termes.

Note importante du « correctionneur » : on est dans l'enseignement-apprentissage d'une *technique*, donc, surtout pas d'argumentaire sur le « sens » de l'opération multiplication, tout à fait *hors sujet* ici ! Et ensuite, la fameuse « *gestion des retenues* » est spécifique de la technique enseignée et ne peut donc pas faire partie des pré-requis.

Présentation d'une technique, en posant à la main l'opération : 459 × 37. Il convient alors de poser le calcul demandé à la main et de « discourir » sur la technique emblématique (*décalages, « gestion » des retenues, en mémoire ou écrites, les sommes partielles ou totales…*). Evidemment, il ne s'agit pas du tout de pré-requis : contre-sens (*bis*) !

2. Ce qui compte, c'est de repérer « l'essentiel » et de proposer des hypothèses (*mathématiquement*) cohérentes.

Opération **b)** : erreur de « décalage » dans le calcul des produits partiels. Les produits de 459 par 7 et de 459 par 3 sont effectués correctement (*tables connues, retenues bien gérées*). Mais l'élève n'a pas tenu compte du fait que le produit par 3 représente en réalité un produit par 30. Il a donc calculé le produit : 459 × (7 + 3) et non pas 459 × (7 + 30). Le produit (4590 = 3213 + 1377) trouvé est cohérent avec cette « mauvaise » décomposition.

*Hypothèse* : délicat, mais en voilà une. Un multiplicateur à deux chiffres, c'est comme deux multiplicateurs à un chiffre : on effectue les calculs « chiffre par chiffre » et on somme le tout. Ce qui semble en jeu, ce sont les principes et règles de la *NUMERATION* insuffisamment maîtrisés.

Opération **d)** : mauvais « alignement » des nombres. Multiplication par 370 au lieu de multiplication par 37 : apparition d'un zéro dans une « case » blanche. C'est une interprétation du « 0 0 0 » à la première ligne du développement du calcul. Les calculs intermédiaires sont corrects, mais cette surcharge de zéros rend le résultat incompréhensible. Mais, ça ressemble à une multiplication posée, avec des zéros à la place des décalages, *comme elle a fait la maîtresse au tableau* !

*Hypothèse* : effet-contrat (Cf. CM2). Il manque un chiffre pour avoir autant de chiffres au multiplicande qu'au multiplicateur, et donc, on met « 0 ». Là aussi, mis-connaissances des principes et règles de la *NUMERATION*.

Opération **e)** : très interesting ! Multiplication de 6 par 4 et de 25 par 4 puis multiplication de 6 par 3 et de 25 par 3. *Hypothèse* : effet-contrat (Cf. CM2) : cet élève a dû effectuer beaucoup de multiplications avec des nombres à deux chiffres : sa technique est (presque bonne, erreur sur le 3 × 25. *Elle « ressemble à moitié » à la technique de Leïla …*« Mauvais » repérage de la valeur des chiffres en fonction de leur position dans l'écriture d'un nombre. C'est donc encore et toujours une affaire de *NUMERATION* avant tout !

3.

$$
\begin{array}{r}
459 \\
\times \quad 37 \\
\hline
63 \\
350 \\
2800 \\
270 \\
1500 \\
12000 \\
\hline
16983
\end{array}
$$

> Note du correctionneur pour le CRPE : on demandait d'appliquer la technique de Leïla. Donc l'opération posée ci-contre était attendue sur la copie.
>
> *Il faut prendre des points là où il y en a* ! Cf. page suivante pour une autre disposition de la multiplication à la Leïla.

| **400** | **50** | **9** | × |
|---|---|---|---|
| 400 × 30 = … | 50 × 30 = … | 9 × 30 = … | **30** |
| 400 × 7 = … | 50 × 7 = … | 9 × 7 = … | **7** |

Il ne reste plus qu'à additionner les six cases du tableau ci-dessus pour obtenir le produit cherché.

***b)*** Cette technique utilise :
- la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition
- la décomposition canonique d'un nombre entier : tout nombre entier admet une et une seule décomposition dans la base dix du système de numération.

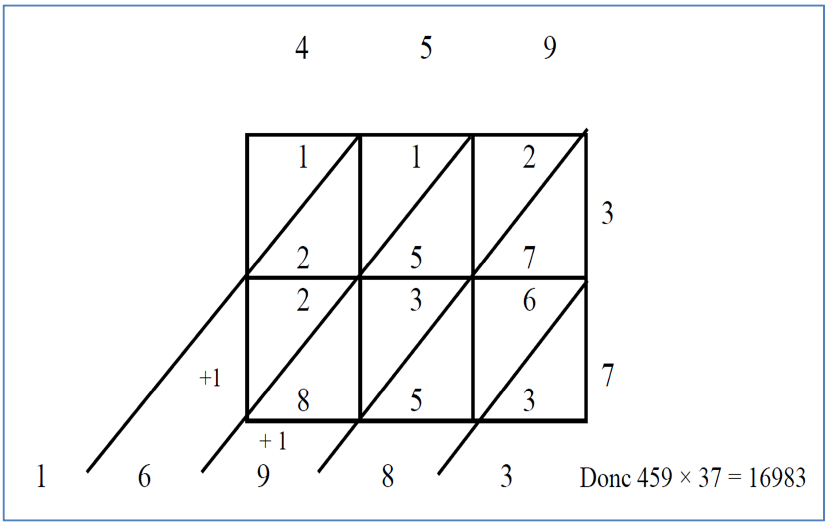
***c)*** Pré requis ou plutôt connaissances pour cette mobiliser cette technique :
- connaître les tables de multiplication ;
- connaitre une technique opératoire de l'addition ;
- connaître et appliquer les deux propriétés ci-dessus : distributivité et décomposition canonique.

***d)*** <u>Un point-fort</u> : on n'utilise pas de retenue pour cette multiplication, <u>autre point – fort</u> : plus besoin de faire un décalage pour tenir compte du « zéro » ou du « point », suivant les *manies* de la même maîtresse dont il était question page précédente. Hihihi…

<u>Un point-faible</u> : le nombre de termes à additionner peut être important. *Il y en a d'autres…*

***e)*** Le passage à la technique usuelle à partir de la technique de Leïla permet d'anticiper le « principe » de la retenue dans une multiplication posée à la main. Une fois la technique de Leïla bien comprise, cette dernière peut permettre de mieux comprendre la fameuse « gestion » des retenues de la technique usuelle, qui, elle est plus rapide. <u>Mais, on ne fait pas la course</u>.

4.




<u>Note du correctionneur, bis</u> : on demandait d'appliquer la technique « *Per Gelosia* ». Donc l'opération posée ci-contre était attendue sur la copie.

Il faut prendre des points là où il y en a, *bis repetita* !

***b)*** Cette technique utilise les propriétés mathématiques suivantes :
- la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition ;
- tout nombre entier peut être décomposé dans la base décimale. *Encore !!!*

*En fait, les propriétés mathématiques sont les mêmes pour toutes les techniques présentées, de par leur rigueur et leur robustesse… En conséquence, ces techniques ont un avenir scolaire…*

***c)*** Pré requis ou plutôt connaissances pour cette technique : idem opération de Leïla.
- connaître et appliquer les tables de multiplication : ici, en plus, c'est un enjeu direct !
- connaitre une technique opératoire de l'addition. (…)

***d)*** Cette technique présente les avantages suivants :

- elle est plus « simple » que la méthode usuelle moderne ;
- les erreurs sont faciles à détecter : chaque cellule ne contient qu'un nombre-produit ou nombre-résultat d'une table de multiplication (*Cf. question suivante*) ;
- pas de gestion des retenues de la multiplication, les seules retenues proviennent d'une addition ;
- on peut s'arrêter et reprendre le calcul quand on veut ;
- pas de décalage de ligne à « gérer » ; pas de difficulté pour les zéros intercalés comme dans 205 ;
- enfin, en termes de différenciation et du traitement des erreurs, ainsi que de leur localisation dans le tableau, c'est immédiat : on lit le tableau et on peut voir l'erreur dans telle ou telle case.

Son *gros* (*le mot est un peu fort !*) inconvénient est une certaine lourdeur de mise en œuvre car il faut dessiner un tableau, avec la trace de plusieurs diagonales (*Ce qui peut malgré tout constituer un bon exercice de tracés géométriques !*). Si on dispose différemment le tableau, on a les mêmes inconvénients.

Autre point-faible, plutôt point délicat : calculer « en diagonale » des sommes partielles de nombres à un chiffre et reporter la retenue (*éventuelle*) dans la « diagonale » au-dessus.

**5.** ***a)*** On ne peut pas avoir 57 car 57 n'est pas un « nombre-produit » ou un nombre-résultat d'une table de multiplication. Autrement dit : 57 n'est pas le produit de deux nombres à un chiffre.

***b)***

- Si on a un « 2 » dans la demi-case du haut, cela signifie que ce « 2 » est un chiffre des dizaines. Et donc, pour avoir le chiffre des unités, c'est-à-dire, celui qui se trouve dans la demi-case du bas, on cherche dans les tables de multiplication tous les produits de deux nombres à un chiffre compris entre 20 et 29 : il y a 20, 21, 24, 25, 27 et 28. *Sauf oubli, totalement involontaire !*
- On peut avoir dans la demi-case du bas un « 1 » avec un « 8 » dans la demi-case du haut car : 9 × 9 = 81. Par contre, on ne peut pas avoir de chiffre dans la demi-case du bas avec un « 9 » dans la demi case du haut car le plus grand nombre qu'on peut avoir avec un produit de deux nombres à un chiffre est 81 (= 9 × 9).

***c)*** <u>*Une piste*</u> : proposer une solution qui « marche ». <u>*Exemple*</u> : on peut avoir dans la demi-case du haut un « 2 » sachant que dans la demi-case du bas on a un « 4 », car on peut avoir 24 = 4 × 6.

Maintenant, on généralise. On peut passer en revue tous les nombres à deux chiffres se terminant par « 4 » et regarder parmi ceux-ci ceux qui sont des nombres-produits ou des nombres-résultats, au sens défini à la question précédente. Autres bonnes solutions : 04 (= 2 × 2 = 1 × 4), 14 (= 2 × 7), 54 (= 9 × 6), 64 (= 8 × 8), sont possibles. Les nombres 34, 44, 74, 84 et 94 ne conviennent pas. On peut aussi s'en sortir comme ça.

**6.** ***a)*** Les deux erreurs :

- erreur de décalage dans le calcul d'un produit partiel ;
- produit calculé faux : ordre de grandeur non respecté, le produit de deux dixièmes donne un centième ; ou, argument du même style en s'intéressant au nombre de chiffres après la virgule.

***b)*** Hypothèses à chercher sur le terrain du ***savoir*** (*mathématique, of course !*)…

- Sur le nombre de chiffres après la virgule qui donne un produit calculé faux. Jusqu'à la multiplication posée de deux nombres décimaux, dont l'enseignement-apprentissage fait généralement suite à celui de l'addition et de la soustraction, pour ces deux opérations, le nombre de chiffres après la virgule est conservé, voire diminué (!). Il suffit de poser 25,6 + 3,4 ou 25,6 – 3,4. Ce théorème en acte, « associé » à la volonté psycho-scolaire de bien écrire les chiffres les uns sous les autres et la virgule sous la virgule favorisent cette mis-connaissance.

Sur l'erreur de décalage. On a toujours l'exigence de bien écrire les chiffres (*hypothèse de surface*) ; mais surtout, c'est sur le territoire des mathématiques qu'il faut chercher une hypothèse consistante. Avec les nombres décimaux aussi, il y a aussi une et une seule décomposition canonique, mais on descend en-dessous de l'unité et là, c'est difficile. On ne sait pas « qui est multiplié par qui » si on ne sait pas le rang des unités en jeu et comme on est « en-dessous » de l'unité, cela peut « compenser » le décalage.

## Pour aller plus loin…

**(i)** Niveaux de classe : le cycle III, c'est-à-dire du CM1 à la classe de sixième, avec une progressivité dans la « qualité » des nombres décimaux étudiés (*jusqu'aux centièmes au CM1, jusqu'aux dix-millièmes au CM2, et « plus loin » en sixième, avec reprise de l'étude de ces nombres, en liens avec la notion de quotient, très délicat !*).

**(ii)** L'utilisation sociétale de ces nombres est parfois contre-productive à leur compréhension. *Exemples* : 12euros et 35cts, rapport avec 12,35euros ? ; 1m70 (avec implicitement l'unité cm) = 1,7m, aïe, … Ces usages ne favorisent évidemment pas les apprentissages mathématiques…

*Une clef* : mettre en évidence une « insuffisance » des nombres entiers pour résoudre d'anciens problèmes, mais aussi de nouvelles catégories de problèmes : *proportionnalité, approximations « fines », comparaisons, rangements, mesures plus « fines », extension des opérations, …* *Exemple* : prix de quatre crayons (*identiques*) = 10 euros, prix d'un seul crayon ? On peut s'en sortir avec les habitudes sociétales : prix en euros et cts et du coup, quel lien avec l'écriture à virgule usuelle ? *Autre exemple* : les nombres décimaux commencent à « remplir » les trous de la droite régulièrement graduée avec les entiers…

**(iii)** *Incontournable* : entrée dans l'univers des nombres décimaux avec la notion de ***fraction***. *Cf. les très bonnes recommandations des programmes*. Et oui ! A l'entrée en cycle III, que faut-il **savoir** et **savoir-faire** ? *Rappel* : liens et rapports de nature dialectique entre ces deux versants complémentaires de la ***connaissance***, au sens anglo-saxon de « ***knowledge*** ».

On y va : maîtriser les trois aspects essentiels de la numération décimale, en plus d'un degré de maîtrise affirmé dans les techniques opératoires, usuelles ou non. Aspect dit « *algorithmique* », en lien avec la droite graduée, aspect « *groupements* », aspect « *échanges* ». (*Commentaires en **TD***). Exercer le calcul dit calcul « *raisonné* », en compléments du calcul dit « *automatisé* » (*Commentaires en **TD***)…

**(iv)** Débat en ***TD*** ! Il y a tellement de « choses » non molles à dire… Au CM1 : « fractions » usuelles simples (*partages égaux*) ; travaux sur les bandes (*bande-unité et bandes « dérivées »*) ; couper en dix = oui, mais comment ? ; changements de formats d'écriture : fraction décimale, décomposition canonique, nouvelle écriture à virgule ; comparaisons et rangements, avec ou sans l'ostensif droite graduée (mucho important !), intercalations, « créations » de nombres, opérations (of course !)… Au CM2 : idem CM1, plus, densification du côté des opérations, résolution de nouveaux problèmes… Et au collège…

### On termine par les petites questions de la fin du document

**1)** Plusieurs lectures du nombre 17,83 : la lecture « usuelle » ou sociétale (*trop facile*) vs d'autres lectures plus « justes » d'un point de vue formel. (*Exemples en **TD***). Danger de la lecture « usuelle » : nombre décimal = juxtaposition de deux nombres entiers et conséquence : « maladie » mathématique incurable en gestation…

**2)** ***Ya du taf*** !!! On y reviendra lors du ***TD*** « maths ».

**3)** Pratique de ces égalités essentielles pour introduire l'écriture à virgule. *Débat*…