EXERCICES SUPPLEMENTAIRES : vers l'examen partiel de ***JANVIER***…

EXERCICE 1. D'après CRPE, post 2013…

Le quadrilatère **ABCD** est un trapèze (*convexe*) isocèle dont une des bases est le segment **[AB]** et dont les diagonales se coupent en un point **O**, tel que : **AB** = 10cm ; **OA** = 6cm et **OC** = 8cm. Faire une figure à main levée.

1) Calculer **CD** (*valeur exacte !*).

2) Construire alors ce trapèze, aux vraies dimensions, en utilisant une règle graduée et un compas.

EXERCICE 2. D'après CRPE, post 2013…

On considère les nombres entiers N et q tels que : $N < 4200$ et $q = 82$.

Dans la division euclidienne de N par un nombre entier d, on obtient le quotient q et le reste r. Ecrire l'égalité « complète » qui correspond à cette division euclidienne.

1) Dans cette question, $r = 45$.

a) Déterminer d pour $N = 3899$.

b) Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N ; d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

2) Dans cette question, $r = 112$. Dans le cas général où $N < 4200$, rechercher l'ensemble des couples (N ; d) possibles dans cette division euclidienne. Justifier les réponses.

3) *Généralisation*. Discuter, selon la valeur de r, l'existence de couples (N ; d) dans cette division euclidienne.

EXERCICE 3. Vrai ou Faux, Pourquoi ?

Indiquer si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses en justifiant la réponse. *Rappel du barème, a priori*. Une réponse exacte mais non justifiée ne rapporte aucun point. Une réponse fausse n'enlève pas de point, cool !

Affirmation 1 : La somme de cinq nombres entiers consécutifs est un multiple de 5.

Affirmation 2 : La somme des angles d'un pentagone convexe est égale à 540°.

Pour l'affirmation qui suit, on dispose du plan d'une maison à l'échelle 1/50.

Affirmation 3 : Les aires sur le plan sont 50 fois plus petites que les aires réelles.

Shéhérazade commence à lire un conte un lundi soir. Elle lit 1001 nuits consécutives. *Affirmation 4* : Elle terminera un dimanche soir.

EXERCICE 4. Il reste un peu de place dans cette page…

Soient n un nombre entier naturel et $\mathbf{W}n$ le nombre entier naturel dont l'écriture décimale ne contient que le chiffre 1 répété n fois. (*On écrit des « 1 » à la file jusqu'à la quantité* n *désirée, exemples* : **W**2 = 11, **W**3 = 111, …)

Ecrire les nombres **W**5, **W**11 et **W**12. Le but de l'exercice est de prouver quelques propriétés de divisibilité de ces nombres ainsi formés.

1) Pour quelles valeurs de n, le nombre $\mathbf{W}n$ est-il divisible par 11 ? Justifier.

2) Pour quelles valeurs de n, le nombre $\mathbf{W}n$ est-il divisible par 33 ? Justifier.

EXERCICE 5. Original ! D'après CRPE.

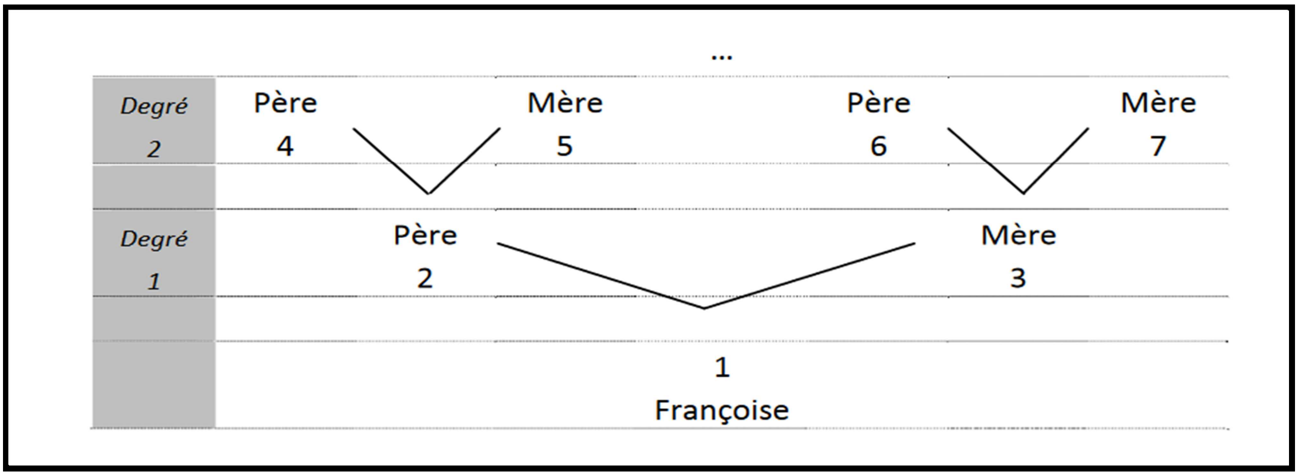
Françoise désire réaliser son arbre généalogique. Elle a appris une méthode pour numéroter ses ascendants : la « méthode de SOSA ».

Dans cette numérotation SOSA, le sujet, ici Françoise, notée **F**, porte le numéro « 1 ». On l'inscrit tout en bas de l'arbre généalogique.

Au degré 1 de parenté, on trouve son père qui porte alors le numéro « 2 » et sa mère qui porte le numéro « 3 ».

Au degré 2 de cette parenté, on trouve alors quatre numéros. Le père du père de **F** porte le numéro « 4 », la mère du père de **F** porte le numéro « 5 », le père de la mère de **F** porte le numéro « 6 » et la mère de la mère de **F** porte le numéro « 7 ». And so on…

Dans cette numérotation, à partir du degré 1, chaque degré ne comporte que des couples mixtes. On admet que les numéros pairs désignent des hommes et les numéros impairs désignent des femmes. *Cf. la trame de l'arbre généalogique ci-dessous.*



1) On s'intéresse aux nombres d'ascendants, à un degré donné.

a) Donner le nombre d'ascendants au degré 3. Justifier éventuellement.

b) Donner le nombre d'ascendants au degré n, en fonction de n. Sans justification.

2) On s'intéresse maintenant au lien « direct » entre une personne apparaissant dans l'arbre et son descendant direct (*homme* ou *femme*).

a) Soit p le numéro d'un homme de l'arbre généalogique de **F**. Exprimer en fonction de p, sans justification, le numéro de son descendant direct dans cet arbre.

b) Soit m le numéro d'une femme de l'arbre généalogique de **F**. exprimer en fonction de m, sans justification, le numéro de son descendant direct dans cet arbre.

On continue d'étudier des cas dans cet arbre généalogique, avec des prénoms « doubles » : ***Dominique*** et ***Camille***.

c) On sait que ***Dominique*** porte le numéro d et que ***Camille*** est son descendant direct dans l'arbre généalogique de **F**. Donner la ou les conditions sur d pour que ***Dominique*** et ***Camille*** soient de même sexe. Justifier.

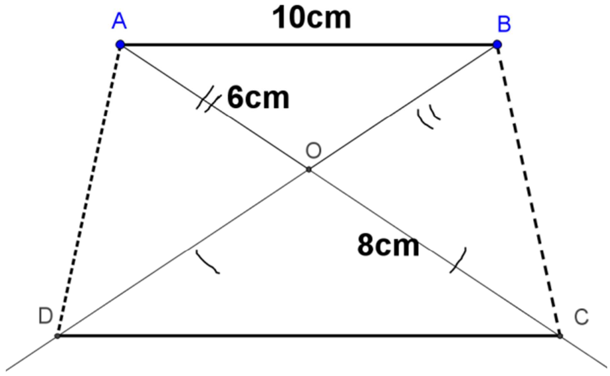
3) La personne portant le numéro 191 est-elle un ascendant du côté du père de **F** ou du côté de la mère de **F**. Justifier.

4) ***Claude*** est la personne de l'arbre généalogique de **F** portant le numéro 257. Combien compte-t-on d'hommes sur le chemin qui relie ***Claude*** à **F**. Justifier.

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES : éléments de correction…

EXERCICE 1. D'après CRPE, post 2013… *Pistes de correction*

<u>*Eléments d'analyse de la figure*</u>. Le quadrilatère **(ABCD)** est un Tz isocèle dont une des bases est **[AB]** : « petite » ou « grande » base, <u>*bonne question*</u> ; l'autre base est alors **[CD]** ? Ensuite, on a : **O** pt d'intersection des diagonales (qui sont égales dans un Tz iso, ah oui !) ; <u>*une question*</u> : le point **O** est-il le milieu commun des diagonales ? NON !



Ci-contre, une figure qui a une bonne tête !
En plus, ça peut ressembler à une « ***configuration papillon*** » (les parallèles ?).

On y va : Théorème de Thalès (lequel : *énoncé direct* ou *énoncé réciproque* ?)

Préciser les conditions d'application qui vont permettre d'écrire les égalités : $\frac{\mathbf{OB}}{\mathbf{OD}} = \frac{\mathbf{OA}}{\mathbf{OC}} = \frac{\mathbf{AB}}{\mathbf{CD}}$
D'où : 6/8 = 10/**DC**. Calculs… **DC** = 40/3(cm)

On va donc pouvoir construire la figure aux instruments autorisés (*compas et règle graduée*). Une proposition de programme de construction.
Il semble plus facile de commencer par la base **[AB]**…

1) Tracer **[AB]** tel que **AB** = 10cm ;
2) Construire le point **O** tel que **(ABO)** soit isocèle en **O**, avec **AO** = **BO** = 6cm ;
3) Tracer **[BO)** et marquer le point **D** tel que **OD** = 8cm ;
4) Tracer **[AO)** et marquer le point **C** tel que **OC** = 8cm ;
5) « Terminer » la figure…

Pour les ceusses qui n'en veulent se casser la tête, suite. Qu'est-ce qu'on pourrait bien calculer, modulo quelques informations qui manquent, ***qu'on peut*** ou ***qu'on ne peut pas obtenir*** ? Valeurs de **AD** = **BC** ; Hauteur du Tz ; Périmètre de **(ABCD)** ; Aire de **(ABCD)**…

EXERCICE 2. D'après CRPE, post 2013… *Pistes de correction*

It smells good la **division euclidienne**, encore et toujours…

Division euclidienne dans l'ensemble des entiers naturels : $N = d \times q + r$, avec $0 \leq r < d$

1) On se place dans le cas où $r = 45$, avec $q = 82$, on a donc : $N = d \times 82 + 45$, avec $45 < d$

a) $N = 3899$. On peut poser la division avec la potence… A écrire…

On part de l'égalité : 3899 = d × 82 + 45, d'où 82 × d = 3899 – 45 = 3849, ce qui donne $d = \frac{3849}{82} = 47$.

On a bien 45 < 47 (reste < diviseur) et donc alles gut, ouf !

b) Les couples possibles : il faut vérifier la condition sur le *reste* et le *diviseur*. On part de l'égalité : $N = d \times 82 + 45$, avec $45 < d$. Or, $N < 4200$, donc $d \times 82 + 45 < 4200$, c'est-à-dire : $d \times 82 < 4200 - 45 = 4155$; d'où une nouvelle inégalité : $d < \frac{4155}{82} \approx 50{,}671$ et donc $d \leq 50$. Les valeurs possibles pour d sont : 46 ou 47 ou 48 ou 49 ou 50. On remplace d par chacune des cinq valeurs dans l'égalité de départ, il y a donc cinq calculs à effectuer ; on trouve alors les nombres N associés ; respectivement : 3817, 3899, 3981, 4063 et 4145. D'où les couples demandés : (3817 ; 46), (3899 ; 47) ; (3981 ; 48) ; (4063 ; 49) ; (3145 ; 50). Vérifier…

2) On se place dans le cas où $r = 112$. On part donc de l'égalité : $N = d \times 82 + 112$, avec $112 < d$.
On a : $112 < d$, donc, $82 \times 112 < 82 \times d$, c'est-à-dire : $9184 < 82 \times d$ ou $82 \times d > 9184$. On ajoute le reste de « chaque côté » : $82 \times d + 112 > 9184 + 112$, c'est-à-dire : $N > 9296$. Or, l'énoncé précise que $N < 4200$, et pour cette question, on trouve une valeur de $N > 9296 > 4200$, d'où une contradiction avec la condition de départ. Il n'y a donc pas de couple solution dans le cas où $r = 112$.

3) *Plus délicat* : on cherche une double condition concernant l'existence de couples (N ; d) : une condition nécessaire *CN* et une condition suffisante *CS*.
CN. On a : $N = 82 \times d + r$, avec $(0 \leq)\ r < d$. L'égalité nous permet d'écrire une autre égalité : $d = \frac{(N-r)}{82}$.
Comme on a : $(0 \leq)\ r < d$; on a alors : $(0 \leq)\ r < \frac{(N-r)}{82}$;
On multiplie par 82 chaque membre : $(0 \leq)\ 82 \times r < (N - r)$, c'est-à-dire (en ajoutant r) : $0 \leq 83 \times r < N$
Comme $N < 4200$, on a $83 \times r < 4200$ et donc $r \leq \frac{4200}{83} \approx 50{,}602$, c'est-à-dire $r \leq 50$. Pour qu'un couple (N ; d) existe, avec les bonnes conditions ($N < 4200$ et $q = 82$), il faut donc que $r \leq 50$.
Oui, mais pour $r = 50$, on trouve une valeur de $N > 4200$; en effet, $82 \times 51 + 50 = 4182 + 50 > 4200$. Donc, on élimine la valeur 50. La *CS*, pour l'existence de tels couples, est alors $r \leq 49$. Vérifier…

EXERCICE 3. D'après CRPE, post 2013… *Pistes de correction*

Affirmation 1 : **vraie**. Les cinq entiers consécutifs peuvent s'écrire : $(n - 2)$, $(n - 1)$, n, $(n + 1)$ et $(n + 2)$. C'est pour simplifier les calculs ! La somme $S = (n - 2) + (n - 1) + n + (n + 1) + (n + 2) = 5n - 3 + 3 = 5n$: écriture générique d'un multiple de 5.

Affirmation 2 : **vraie**. Réaliser une telle figure et tracer deux diagonales : on obtient trois triangles qui pavent ainsi le pentagone. D'où le calcul : 3 × 180° = 540°. *Rigoureusement, il faudrait prouver que TOUS les pavages de trois triangles conviennent*. Bon…

Affirmation 3 : **on ne sait pas** ! Ah bon : cela dépend de la fin de la lecture : avant ou après l'heure fatidique : minuit ! *On va se chamailler, hihihi…*

Début de lecture un lundi soir : donc, la première nuit de lecture est celle qui va de dimanche à lundi. Du coup, la septième nuit sera celle du dimanche au lundi suivant.

Une petite division euclidienne : 1001 = 7 × 143 + 0 (pas de reste : cool !). La lecture aura donc lieu tous les soirs pendant 143 semaines, sachant que sa dernière nuit de lecture sera la nuit du dimanche au lundi achevant cette 143ème semaine. D'où, deux cas possibles :

(i) Fin de lecture avant minuit : affirmation **vraie** ;
(ii) Fin de lecture après minuit : affirmation **fausse** !

EXERCICE 4. D'après CRPE, post 2013… *Pistes de correction*

On a : $W5 = 11111$; $W11 = 11111111111$ et $W12 = 111111111111$. Tester alors quels sont ceux qui sont divisibles par 11, facile.

1) *Conjectures* : je possède un nombre pair de « 1 », je suis divisible par 11 ; je possède un nombre impair de « 1 », je ne suis pas divisible par 11. *Clefs* : décomposition canonique et parité.
A rédiger… 11 = 1 × 11, 1111 = 101 × 11, 111111 = 10101 × 11, …

2) *Il faut ici rajouter une condition* : la somme des « 1 » doit être multiple de trois. Les nombres 3 et 11 étant premiers entre eux, il faut donc les deux conditions : celle de la question 1) et celle de cette question. A rédiger.

EXERCICE 5. D'après CRPE, post 2013… *Pistes de correction COPIRELEM*

1) a) Deux ascendants par personne, il y a donc deux ascendants pour Françoise (degré 1) ; et donc, deux × deux ascendants au degré 2 ; et donc (deux × deux) × deux = huit au degré 3 and so on. (Note de ***PW*** : 0,25 point à ne pas perdre le jour du CRPE !)

1) b) Généralisation. *Conjecture* : il y a 2^n ascendants au degré n. une démonstration par récurrence (Hors Programme du CRPE, mais on en va pas s'en priver !).

(i) *Initialisation* : au degré 1, il y a 2 ascendants et $2 = 2^1$;

(ii) *Hérédité* : on suppose qu'au degré n, il y a 2^n ascendants. Il s'agit alors de montrer qu'au degré $(n + 1)$, il y a $2^{(n+1)}$ ascendants. Or, au degré $(n + 1)$, chacun des 2^n ascendants au degré n a deux parents, donc en tout, il y a $2 \times 2^n = 2^{(n+1)}$, ce qui signifie que la propriété est héréditaire.

(iii) *Conclusion* : cette propriété est donc vraie pour tout entier n, ce qui confirme la véracité de la conjecture.

2) Une remarque pour commencer : les hommes occupent les « places » paires et les femmes occupent les « places » impaires. *Ah oui, j'avais pas vu*… Ça peut aider…

Autrement dit : pour une personne qui a un numéro x quelque part dans l'arbre, son père a pour numéro $2x$ et sa mère a pour numéro $2x + 1$.

D'où les deux réponses :

Le descendant direct d'un homme de numéro p (nombre pair) a pour numéro $p/2$;

Une femme possède un numéro m (nombre impair), son mari possède alors le numéro $(m - 1)$, dans ce cas, son descendant direct possède alors le numéro $(m - 1)/2$.

Pourquoi Dominique et Camille : prénoms mixtes, zut, il faudra donc étudier plusieurs cas. Sans réfléchir, il y a quatre cas, lesquels ? A écrire…

Cas où Dominique et Camille sont tous les deux des hommes. Le numéro de Dominique étant d, celui de Camille est $d/2$, aussi divisible par deux, ce qui oblige d à être divisible par quatre.

Réciproquement, si d est multiple de 4, alors Dominique et Camille sont des hommes.

Cas où Dominique et Camille sont toutes les deux des femmes. Le numéro de Dominique étant impair, on a d impair et donc $(d - 1)/2$ est aussi impair. Ce qui signifie que $(d - 1)/2 - 1$ est pair, c'est-à-dire : $(d - 3)/2$ est pair, il existe donc un entier k tel que $(d - 3)/2 = 2k$, ou $(d - 3) = 4k$, ou $d = 4k + 3$ = impair.

Réciproquement, si d = multiple de 4 + 3, alors les numéros de Dominique et de Camille sont aussi impairs.

Conclusion : Dominique et Camille sont de même sexe si d = multiple de 4 = $4k$ ou si d = multiple de 4 + 3 = $4k + 3$. Inutile d'étudier le cas où les deux personnes sont de sexe opposé. (Note de ***PW*** : quel est le sens du « ou » dans la conclusion ?)

3) et 4) Etudes de cas particuliers. Il y a plusieurs méthodes…

Numéro 191, donc porté par une femme. Son mari porte alors le 190. Cherchons le degré d'ascendance, c'est-à-dire entre quelles puissances de 2 se situe 191. On a : $128 < 191 < 256$, c'est-à-dire : $2^7 < 191 < 2^8$. La personne se situe donc au degré 7, avec 128 ascendants de Françoise. Première moitié du côté du père et deuxième moitié du côté de la mère. D'où le partage : de 128 à 128 + 63 : on est du côté du père et de 128 + 64 à 255, on est du côté de la mère. Il suffit donc de placer 191 dans la bonne moitié : 191 = 128 + 63, donc cette personne est du côté du père de Françoise. Yes !

Claude porte le numéro 257, c'est une femme : on s'intéresse ici aux descendants directs hommes. Le premier descendant direct porte alors le numéro (257 – 1)/2 = 128. On continue, mais on va plutôt utiliser le fait que 128 = 2^7 : il y a donc sept hommes sur le chemin de Claude à Françoise. Yes, bis !

Pour aller plus loin, on peut reprendre tout ce travail en comptant en base 2, c'est-à-dire uniquement avec des « 0 » ou des « 1 ».

Passionnant. On affecte le nombre 1 à ***F***, puis le nombre 10 à son père et 11 à sa mère, au degré 1 ; on continue, au degré 2, on a, dans l'ordre, les nombres 100, 101, 110 et 111 ; and so on…

Un petit coup d'Internet pour les ceussses qui n'en sont curieux…