Quelques exercices et problèmes, partie mathématique avec ou sans question complémentaire, mettant en jeu des mathématiques « utiles » à tout futur PE. *Sans oublier le Partiel de Janvier !*

Thèmes : NUMERATION, NOMBRES et OPERATIONS

EXERCICE 1. (En guise d'apéritif).

(a) Quelques écritures d'un même nombre dans des bases différentes.
(i) $(537)_{10}$ = ? $(...)_3$; (ii) $(97\boldsymbol{a}15\boldsymbol{b})_{12}$ = ? $(…)_{10}$. (*Notation et rappel* : $(537)_{10}$ signifie qu'on s'intéresse au nombre 537 en base 10).

(b) Quelques exercices classiques de dénombrement.
(i) Les poignées de mains. Dans un groupe, il y a 17 personnes. Chacune d'elle serre la main de toutes les autres (*une et une seule fois, en dehors de tout contexte grippal*). Combien de poignées de mains sont-elles ainsi échangées ? Donner deux techniques, dont une accessible au primaire, à décrire précisément.

(ii) Promenade à Marseille. On propose un circuit touristique (!) qui comprend la visite de quatre endroits célèbres de cette ville : le Stade Vélodrome (noté **S**), le Vieux Port (noté **V**), la prison des Baumettes (notée **B**) et le quartier du Mistral (noté **M**). Pour optimiser la visite, on doit connaître tous les circuits possibles, afin de définir le plus rentable. On suppose que chaque site n'est visité qu'une seule fois, tout en tenant compte de l'ordre des visites. *Par exemple*, le circuit (**SVBM**) est différent du circuit (**BVSM**). Déterminer le nombre de circuits possibles. Combien de circuits commencent par **M** ? Combien y a-t-il de circuits où les visites de **M** et de **V** ne sont pas consécutives ?

EXERCICE 2. (A partir de travaux d'évaluation liés à la numération décimale de position).

Etude d'un document (source **INRP**) concernant le début du cycle III (classe de CE2), avant 2008.

A. Ecrire en chiffres les nombres suivants :

Quatre-vingt-quatre	
Soixante-dix-sept	
Vingt-huit	
Deux cent trente-deux	
Trois mille vingt	
Dix-huit mille	

B. Dans l'armoire du directeur de l'école, il y a 517 cahiers. On lui livre cinq paquets de 10 cahiers et trois caisses de 100 cahiers. Combien y a-t-il maintenant de cahiers dans l'armoire ?

C. Quel nombre obtient-on en additionnant 66 dizaines et 6 centaines ?

D. Remplacer chaque point d'interrogation par un chiffre pour que les nombres (*tous à trois chiffres*) ainsi obtenus soient rangés du plus grand au plus petit.

215	**?13**	**198**	**1?7**	**166**	**1?5**	**159**

E. Les timbres postaux sont vendus par carnets de 10. Combien de carnets faut-il acheter pour timbrer 254 enveloppes ?

F. Compléter les calculs suivants (*pour nous, afin que les égalités soient vérifiées*)

F.1. 2 + (**?** × 10) + (100 × **?**) = 542. ***F.2.*** (7 × 100) + (**?** × 1000) + 5 + (**?** × 10) = 6725.
F.3. (**?** × 10) + (6 × **?**) = 246.

Résoudre chacun des quatre exercices. En particulier, pour l'exercice **D**, donner toutes les solutions.
Pour chacun de ces exercices, préciser le ou les points de contenus abordés, accompagner cette analyse des compétences mises en jeu pour les résoudre.

EXERCICE 3. (D'après CRPE externe, années 2000 – 2004)

A. On s'intéresse au nombre **W** = 82 675 318 × 998 201.
A.1. Déterminer le nombre de chiffres de **W**.

A.2. Démontrer que le chiffre des dizaines de **W** est 1 et que celui des unités est 8. (*Plutôt facile !*).

A.3. Avec une calculette à dix chiffres ou une calculatrice à douze chiffres, décrire une technique de calcul permettant de déterminer **W**, sans poser la multiplication. (*Il ne manquerait plus que ça !*).

B. Un nombre **N** s'écrit (***a***97***b***) en base dix, les lettres ***a*** et ***b*** désignant des chiffres.
B.1. Donner toutes les valeurs possibles pour ***a*** et ***b***, sachant que la somme des chiffres de **N** est égale à 29.

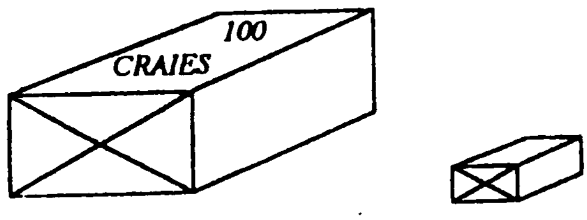
B.2. Donner alors les valeurs de ***a*** et de ***b***, si en plus, on sait que le produit des chiffres de **N** vaut 2268 et que le nombre 7 divise le nombre (***ab***)[1].

C. Analyse de productions d'élèves, à partir d'un sujet de CRPE externe.

ENONCE du problème.

« Un fabricant vend des craies par étuis de dix et par boîtes de cent. Le magasinier doit préparer les boîtes et les étuis pour les livraisons. Calcule combien d'étuis et de boîtes il doit préparer pour les clients suivants :

M. AUBIN : 800 craies
M. ALIAS : 78 craies
M. DURAND : 60 craies
M. CREON : 254 craies
M. BEAL : 430 craies
M. FUSTIER : 305 craies ».



On donne en **ANNEXE**, (*les trois pages suivantes*) les productions de neuf élèves (*oui, neuf !*).

En analysant les productions de ces élèves répondre aux questions suivantes :
C.1. Sur quelle(s) partie(s) du programme ce problème porte-t-il ? (*Programmes 2008 : à réactualiser avec celui de 2016*).

C.2. Décrire les techniques ou procédures ou méthodes employées par les élèves. Classer ces techniques de la moins élaborée à la plus élaborée, en justifiant ce classement.

[1] Attention ! (***ab***), écrit sous cette forme ne désigne pas le produit de ***a*** par ***b***, mais le nombre à deux chiffres dont le chiffre des dizaines est ***a*** et celui des unités est ***b***. Déjà vu, mais un peu oublié ?

ANNEXE (1/3)

m^r Aubin 800=8 boites
m^r Elias 78=7 étuis et 8 craies donc 8 étuis
m^r Durand 60=6 étuis

m^r Créan =254=2 boites 5 étuis et 4 craies donc 2 boites et 6 étuis
m^r Béal = 430 = 4 boites et 3 étuis
m^r Eustier 305 =3 boites et ~~5~~ 1 étuis.

adile

---

m^r Aubin 8 boites
m^r Elias 7 étuis et 8 craies
m^r Durand 6 étuis
m^r Créan 2 boites 5 étuis et 4 craies
m^r Béal ~~3~~ 4 boites et 3 étuis
m^r

Benoît

Isabelle

M^r Aubin 100+100+100+100+100+100+100+100= 8 boites
M^r Elia 10+10+10+10+10+10+10+8 8 étuis
M^r Durand 10+10+10+10+10+10 6 étuis
M^r Crian 100+100+10+10+10+10+10+4 2 boites et 6 étuis
M^r Beal 100+100+100+100+10+10+10 4 boites et 3 étuis
M^r Eustier 100+100+100+5 3 boites et 1 étuis

ANNEXE (2/3)

Mr Aubin   100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 800   8 boites

Mr Elias

Mr Durand   10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60   6 étuis

Mr Créon

Mr Béal   100 + 100 + 100 + 100 = 400 + 10 + 10 + 10 = 430   4 boites et 6 étuis

Elise

---

8 × 100 = 800   8 boites

7 × 100 = 70 + 8   8 étuis

6 × 10~~0~~ = 60   6 étuis

2 × 100 = 200 + 5 × 10 = 250 + 4   ~~4~~2 boites et 5 étuis et 1 étui

4 × 100 = 400 + 3 × 10   4 boites et 3 étuis

3 × 100 = 300 + 5   3 boites et 1 étui

Claire

Mr Aubin   800 = 8 c   8 boites

Mr Elias   78 = 7 d 8 u   7 étuis et 1 étui = 8

Mr Durand   60 = 6 d   6 étuis

Mr Créon   254 = ~~2 d~~ 2 c 5 d 4 u   2 boites 5 étuis et 1 étui

Mr Béal   430 = 4 c et 3 d   4 boites et 3 ~~dizaine~~ étuis.

Mr Ernotin   305 = 3 c et 5 u   3 boites et 1 étui

Alain

ANNEXE (3/3)

M Aubin 8 boites

M Elias 7 étuis et 1 étui =

M Durand 6 étuis

M Créon 2 boites et 6 étuis

M Béal 4 boites et 3 étuis

M Fustier 3 boites et 1 étuis

Mickaël

Charles

M Aubin : 8 boîtes : 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 + 100 = 800

M Elias :

M Durand : 6 étuis : 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60

M. Béal : 4 boîtes et 3 étuituis

M Créon :

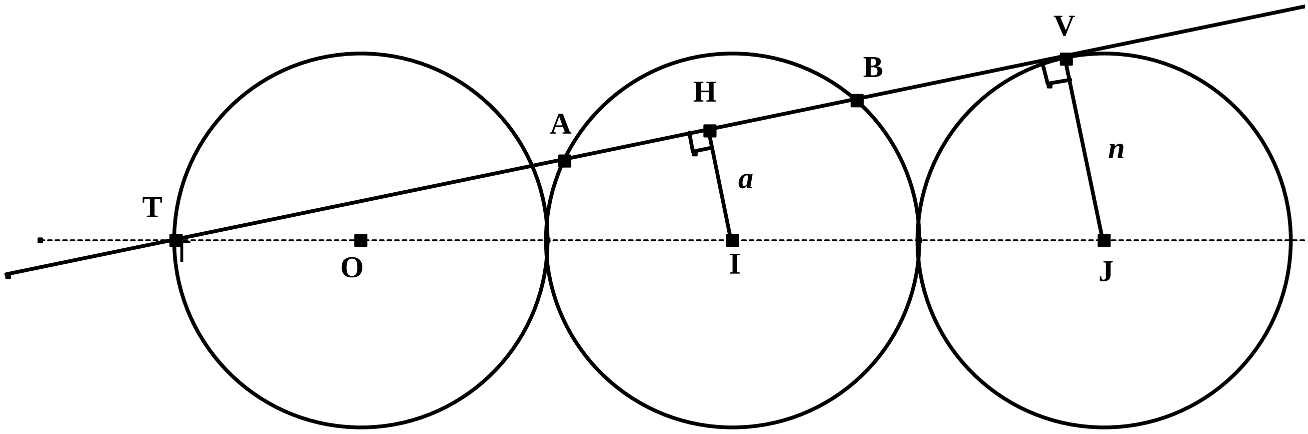
Alice

c	d	u	
8	0	0	8 boites
	7	8	8 étuis
	6	0	6 étuis
2	5	4	2 boites et 6 étuis
4	3	0	4 boites et 3 étuis
3	0	5	3 boites et 1 étui

EXERCICE 4. (D'après CRPE externe, années 2005 – 2009)

Pourquoi ne pas mélanger ***activités numériques*** et ***activités géométriques*** ? Bonne idée, c'est même « tombé » au CRPE externe en 2008 ! C'est pour dire.

Il est inutile de reproduire cette figure : telle quelle, elle va servir de support à tous les calculs et les raisonnements demandés dans cet exercice.



Les trois cercles ci-dessus, ont pour rayon un même nombre entier naturel, non nul, noté ***n***. Les points **O**, **I** et **J** sont alignés. Le cercle de centre **O** est tangent au cercle de centre **I**, de même que le cercle de centre **I** est tangent au cercle de centre **J**. On pose **IH** = ***a***, **AB** = ***b*** et **TH** = ***c***.

1. Dans cette question, on se propose de calculer les nombres ***a***, ***b***, et ***c*** en fonction de ***n***. Pour tous les calculs et raisonnements, on prendra soin d'expliciter la propriété utilisée et de justifier les réponses.

1.1. Exprimer ***a*** en fonction de ***n***.

1.2. Calculer **HB**, puis exprimer ***b*** en fonction de ***n***.

1.3. Exprimer ***c*** en fonction de ***n***.

2. Dans cette question, on s'intéresse à la nature de chacun des trois nombres ***a***, ***b*** et ***c***.

2.1. Expliquer pourquoi les nombres ***a*** et ***b*** sont des nombres décimaux. Est-ce le cas pour ***c*** ? Préciser alors la nature du nombre ***c***. Justifier.

2.2. Quels sont les nombres entiers ***n*** pour lesquels les nombres ***a*** et ***b*** sont des nombres entiers ? Justifier.

2.3. Existe-t-il des nombres entiers ***n*** pour lesquels les nombres ***a*** ou ***b*** sont des nombres premiers ? Justifier.

EXERCICE 5. (D'après de sujet de concours blanc d'autres académies, entre 2006 et 2009)

CALCULETTE ou CALCULATRICE non autorisées pour cet exercice.

On considère les nombres, écrits sous forme fractionnaire :

$$\mathbf{A} = \frac{146}{113}\ ; \qquad \mathbf{B} = \frac{32}{25}\ ; \qquad \mathbf{C} = \frac{31}{24}; \qquad \mathbf{D} = \frac{195}{150}$$

1. Quelles sont les fractions décimales parmi les nombres **A**, **B**, **C** et **D** ? Justifier.

2. Ranger les quatre nombres **A**, **B**, **C** et **D** dans l'ordre croissant. Justifier ce rangement.

3. Trouver une fraction décimale, différente de **A**, **B**, **C** ou **D**, strictement comprise entre **A** et **C**.

4. Trouver une fraction non décimale, différente de **A**, **B**, **C** ou **D**, strictement comprise entre **B** et **D**.

Question complémentaire, suite à **l'EXERCICE 5**

Les questions qui suivent portent sur les documents figurant en annexes, pages suivantes :

(i) Extrait du manuel de l'élève : « **Cap Maths CM2** », chez Hatier.
(ii) Extrait du guide des activités du livre du maître correspondant à cette séance.

1. Résoudre la question **1a** de l'activité « **Chercher** » de l'annexe du manuel puis citer deux des connaissances mathématiques principales à l'œuvre dans cette question.

2. Pour répondre à la question **1a** de cette même activité, proposer une procédure qu'un élève peut utiliser pour comparer 1,5 et $\frac{3}{2}$; ainsi qu'une procédure permettant de comparer 1,5 et $\frac{1}{5}$, sans utilisation la droite graduée dans les deux cas.

3. Pour répondre aux questions **1b** et **2c**, expliciter une procédure que peuvent utiliser les élèves pour placer $\frac{150}{100}$ puis une procédure pour placer 0,2 sur la ligne graduée.

4. Dans les productions des élèves, le maître a trouvé les erreurs suivantes :

Elève **A** : « 0,05 c'est 5 dixièmes ».
Elève **B** : « 1,5 c'est un cinquième ».
Elève **C** : « $\frac{1}{5}$ c'est $\frac{1}{20}$ ».

Analyser les erreurs des élèves **A** et **B**.

5. Le maître demande à l'élève **C** de justifier sa réponse. Il lui dit :
« $\frac{1}{5}$ c'est aussi égal à $\frac{1}{20}$ parce qu'un cinquième, c'est le double d'un dixième et vingt, c'est le double de 10 ».

Pour l'amener à rejeter sa réponse, l'enseignant lui donne alors un segment unité tracé sur une feuille de papier calque et lui demande d'utiliser son guide âne pour graduer le segment :

- d'abord en cinquièmes en utilisant un stylo rouge ;
- ensuite en dixièmes en utilisant en stylo vert ;
- enfin en vingtièmes en utilisant un stylo bleu.

Qu'est ce qu'un « guide-âne » ? A quoi sert-il ?
Quel est le résultat expérimental qui doit amener l'élève à corriger sa réponse ?

Manuel Cap MATH, classe de CM2

Unité **7**
Séance **5**

Fractions, nombres décimaux

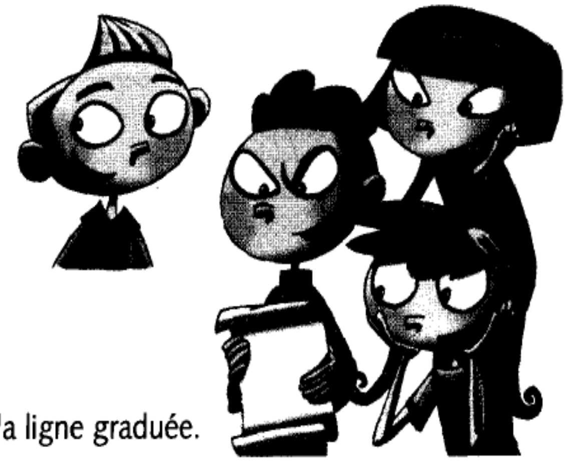
Chercher Différentes écritures d'un nombre

▶ **Travail sur fiche 42**

1 **a.** Trouve tous les nombres de la liste A qui sont égaux entre eux. Explique ta réponse.

Liste A

1,5 $\frac{150}{100}$ 0,05 $\frac{3}{2}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{5}{10}$



b. Vérifie en les plaçant sur la ligne graduée.

2 **a.** Certains des nombres de la liste B sont égaux à des nombres de la liste A. Trouve lesquels. Explique ta réponse.

b. Trouve tous les nombres de la liste B qui sont égaux entre eux. Explique ta réponse.

c. Vérifie en plaçant les nombres sur la ligne graduée.

Liste B

$\frac{50}{100}$ 0,2 0,5 $\frac{15}{10}$ $1 + \frac{5}{10}$

Exercice

3 Écris chacune de ces fractions sous la forme d'un nombre entier ou d'un nombre à virgule.

$\frac{18}{10}$ $\frac{18}{100}$ $\frac{40}{10}$ $\frac{40}{100}$ $\frac{708}{10}$ $\frac{708}{100}$ $\frac{708}{1\,000}$ $\frac{900}{100}$ $\frac{900}{10}$ $\frac{900}{1\,000}$

Livre du MAITRE : guide des activités.

Organisation : Par équipes de 2. Durée : 40 min Matériel par élève : - manuel p78 ; - feuille de recherche ; - un guide âne.	1. Les élèves traitent la **question 1** a. La mise en commun est organisée en plusieurs étapes: recensement des égalités; temps de réflexion laissé aux équipes pour trouver celles avec lesquelles elles sont en désaccord; explicitation des désaccords et échanges d'arguments à leur sujet (cf. ci-contre quelques erreurs possibles); explicitation des procédures utilisées pour chercher les égalités… 2. Placement sur la ligne graduée. Le placement demandé à la **question 1 b**, permet de confirmer les égalités précédentes, à condition que le placement soit effectué à partir des nombres et non à partir des égalités… 3. D'autres nombres à comparer La même activité est reprise avec la liste de nombres de la question 2. Ces nombres sont d'abord comparés à ceux de la première liste, puis comparés entre eux. Les mêmes arguments sont mobilisés … 4. Synthèse …	Commentaires : Les activités de cette séance ne présentent pas de notion véritablement nouvelle pour les élèves. Erreurs possibles : …