GRANDEURS et MESURES

EXERCICE 1 (~~se reporter au CM : exercice « étudié » en détails pendant le CM~~)

Objectif : engager une réflexion sur **OBJET**, **GRANDEUR** et **MESURE**. Matériel autorisé : un crayon et une paire de ciseaux. ***Consigne déclinée en trois tâches***. On dispose de deux feuilles au format A4.

• **Tâche 1**. *Sans utiliser aucun instrument de mesure, découper la feuille A4 en deux surfaces ayant le même périmètre, mais pas la même aire. De plus, il ne doit pas y avoir de surface perdue.*

• **Tâche 2**. *Sans utiliser aucun instrument de mesure, découper la feuille A4 en deux surfaces ayant la même aire, mais pas le même périmètre. De plus, il ne doit pas y avoir de surface perdue.*

• **Tâche 3**. Une question. *Les « techniques » utilisées pour résoudre les tâches* 1. *et* 2. *font-elles appel aux mêmes notions ou concepts ? Dégager ces concepts en cherchant leurs caractéristiques et leurs invariants.*

EXERCICE 2

Dans un triangle **ABC**, on appelle **I** et **J** les milieux respectifs des côtés **[AB]** et **[AC]**. Question : l'aire de (**AIJ**) est elle la moitié de celle de (**ABC**) ? Argumenter.

EXERCICE 3

Un pré rectangulaire **ABCD** est bordé tout autour par une allée de largeur uniforme. On obtient un rectangle plus grand. Le « grand » rectangle **A'B'C'D'** ainsi obtenu est-il « semblable » ou « homothétique » ou est-il un agrandissement du pré rectangulaire (**ABCD**) ? Justifier.

EXERCICE 4

Norme AFNOR : les formats normalisés. On dispose d'une feuille de format **A4**. (*Ce n'est pas la suite de l'exercice 1 !*).
En prenant la largeur de la feuille pour unité de longueur, trouver un procédé pour déterminer la longueur de cette feuille, procédé n'utilisant que des feuilles de format **A4**. Même question pour une feuille de format **A3**. Déterminer l'aire d'une feuille de format **A0**.

EXERCICE 5

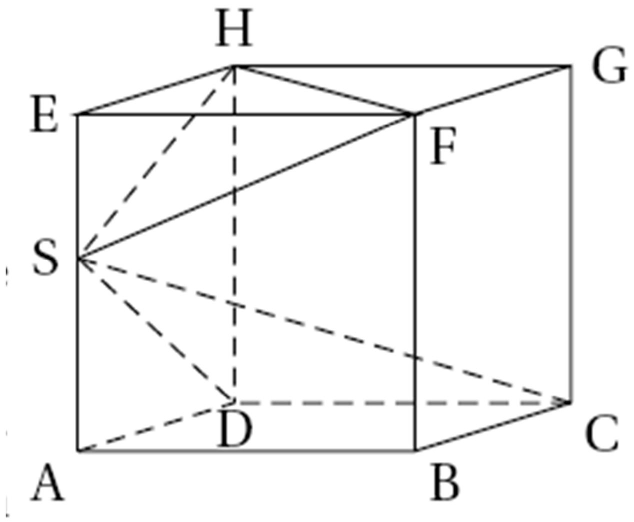
Quel est le diamètre d'une sphère[1] ayant même volume qu'un cube d'arête 10 cm. Comparer leurs aires.

EXERCICE 6

Calculer au dixième de litre près, par défaut, la consommation aux 100 km d'une automobile « américaine » qui peut parcourir (*en moyenne*) 8 miles (*terrestres*) avec 1 galon.
On donne : 1 galon = 3,8 litres et 1mile = 1,609km.

[1] Formellement, on devrait dire BOULE à la place de SPHERE, mais…

EXERCICE 7



Le solide **ABCDEFGH** est un cube d'arête 6cm. Un point **S**, choisi sur l'arête [**AE**], permet de définir une pyramide **SABCD** (de sommet **S**, de hauteur **SA** et de volume V_1) et une autre pyramide **SEHF** (de sommet **S**, de hauteur **SE** et de volume V_2).
On pose **AS** = x avec $0 < x < 6$.
Déterminer la valeur de x pour que les deux volumes V_1 et V_2 soit égaux.
Rappel : le volume d'une pyramide est $V = \frac{1}{3}$ × aire de la base × hauteur de la pyramide
Construire dans ce cas en vraie grandeur, à la règle graduée et au compas, le triangle **FHS**.

EXERCICE 8

Un verre à pied de forme conique a une hauteur totale égale à 13 cm, le pied ayant lui-même une hauteur de 3 cm. Ce verre a une capacité (*raisonnable !*) de $\frac{3}{4}$ de litre.

1. Calculer le diamètre d'ouverture du verre.
2. Calculer la hauteur du liquide quand le verre est à moitié plein.

EXERCICE 9

Le quadrilatère **ABCD** est un carré. Les triangles **DEC** et **BFC** sont équilatéraux, avec **F** « à l'intérieur » du carré et **E** « à l'extérieur ».
Le but de cet exercice est de « vérifier », puis de démontrer que les points **A**, **E** et **F** sont alignés.

1. Vérifier à la règle que les points **A**, **E** et **F** sont alignés.
2. Quelle est la nature du triangle **DAE** ? Du triangle **CEF** ? Déterminer la valeur des angles de chacun de ces triangles.
3. En déduire que les points **A**, **E** et **F** sont alignés.

EXERCICE 10

Les roues de vélos et leur développement. Pour les fans du Tour de France !
Parmi les caractéristiques d'une bicyclette, on relève les informations suivantes :

Roue. On admet que le diamètre extérieur des roues est égal à … mm:	**Pédalier :**	**Roue libre :**
Diamètre = 685mm	46 dents.	17 dents.

1. Calculer, en tours/minute, la vitesse de rotation du pédalier pour obtenir une vitesse ***v*** de 20km/h.
2. (*Difficile*) Déterminer, en tours/minute, la vitesse ***y*** de rotation du pédalier en fonction de la vitesse ***v*** (exprimée en km/h).

EXERCICE 11

(*Un petit tour du côté des évaluations institutionnelles*).

Evaluation à l'entrée en Sixième, en 2003. (*Source : « Livret de Didactique » du CNED*).

• Exercice 5, Septembre 2003.

Un car part du collège à 8h30 du matin et arrive au musée à 9h15. Combien de temps a duré le trajet ?

• Exercice 37, Septembre 2003.

Un bateau part de Marseille à 20h et arrive à Bastia le lendemain matin à 6h30. Combien de temps a duré la traversée ?
Consigne. Résoudre ces deux exercices en utilisant une ou des procédures à la portée des élèves du cycle III.

EXERCICE 12

Un cycliste parcourt un même trajet à l'aller et au retour sans s'arrêter. Sa vitesse est 20 km/h en montée et 40 km/h en descente.
L'aller se compose d'une montée et d'une descente dont la longueur est deux fois plus courte que celle de la montée.
1) Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours aller.
2) Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours retour.
3) Calculez sa vitesse moyenne sur le parcours aller-retour. *Commentaires…*

EXERCICE 13

Un bassin est alimenté par deux fontaines qui ont chacune un débit constant. Utilisée seule, la première fontaine remplit le bassin en 9 heures. La seconde, si elle fonctionne seule, ne met que 7 heures à le remplir.

1) Combien de temps serait nécessaire pour remplir le bassin si on utilisait les deux fontaines en même temps ? Exprimer cette durée (*intervalle de temps*) en heures, minutes et secondes.
2) Si on laisse couler la première fontaine pendant quatre heures et la seconde pendant trois heures, la quantité d'eau recueillie au total est de 550 litres.
   a) Quelle est la capacité du bassin ?
   b) Calculer en litres par heure, le débit de chacune des deux fontaines.

EXERCICE 14

1. Une société de transports décide de mettre en service un train rapide entre les villes de Cherbourg et de Caen distantes de 132 km.
Sachant que sa vitesse moyenne est de 165 km/h, calculer, en minutes, la durée du trajet Cherbourg-Caen.
2. Le prix normal du billet est proportionnel au nombre de kilomètres parcourus : le prix pour un kilomètre est égal à 0,12 €.
Cette société décide de proposer un tarif réduit aux « 15-25 ans », selon deux possibilités :

- tarif ***A*** : réduction de 25 % sur tous les trajets ;
- tarif ***B*** : achat d'une carte « 15-25 » au prix de 30 € valable un an, permettant d'obtenir une réduction de 50 % sur tous les trajets.

a. Recopier et compléter le tableau ci-dessous. (Écrire les calculs effectués pour 500 km)

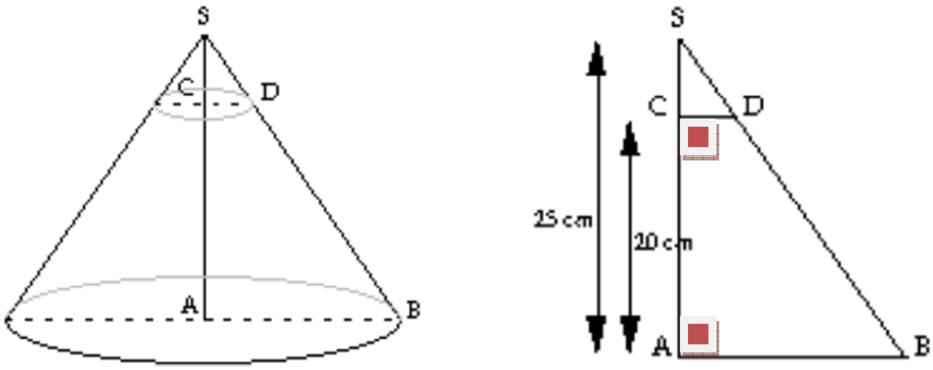
	Avec le tarif ***A***	Avec le tarif ***B***
Dépense annuelle pour 500 km		
Dépense annuelle pour 1500 km		

b. Soit t_1 € la dépense annuelle en euros pour x km avec le tarif ***A*** et t_2 € la dépense annuelle pour x km avec le tarif **B**. Exprimer alors t_1 et t_2 en fonction de x.

3. a. Résoudre l'inéquation $0{,}06x + 30 < 0{,}09x$.
b. A partir de quel kilométrage annuel l'achat de la carte « 15-25 » est-il avantageux ?
4. Le plan est muni d'un repère orthogonal. On prendra sur l'axe des abscisses 1 cm pour représenter 200 km et sur l'axe des ordonnées 1 cm pour 10 €.
a. Tracer la droite (d_1) d'équation $y = 0{,}09x$ et la droite (d_2) d'équation $y = 0{,}06x + 30$.
b. Retrouver graphiquement le résultat de la question 3.b).

EXERCICE 15

1) On dispose d'un cône (de révolution) dont la base est un disque de rayon 8 cm, de hauteur 25 cm.
Calculer son volume en cm3 (*on en donnera une valeur approchée au cm3 près*), puis sa capacité en litres.
2) On tronque (*on « coupe »*) ce cône à une hauteur **AC** de 20 cm à partir de la base. Voici ci-dessous un schéma du cône et du tronc de cône.



Calculer le rayon **CD** du « petit » cercle.

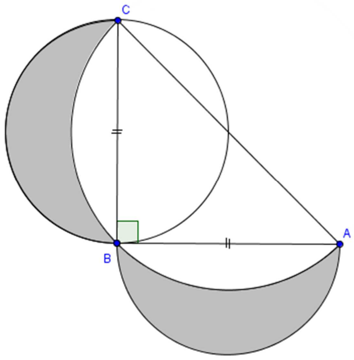
3) Calculer le volume du tronc de cône restant. Ce volume est-il proportionnel à la hauteur **AC** du tronc de cône ou la hauteur **AS** du cône ? Justifier.

EXERCICE 16

La figure ci-dessous est composée :

- D'un triangle isocèle **ABC**, rectangle en **B** ;
- Et de trois demi-cercles ayant ses côtés pour diamètres.

Sachant que **AC** = 7 cm, calculer l'aire totale des surfaces grisées.



EXERCICE 17

Depuis ce matin, un magasinier range sans interruption (*!*) des caisses dans un entrepôt. Il a calculé que, s'il range 50 caisses à l'heure, il aura fini à 11h30. Si par contre, il range 60 caisses à l'heure, il aura fini à 11h15.
A quelle heure a-t-il commencé son travail ? Justifier la réponse.

EXERCICE 18

On dispose d'un minerai **A** qui pèse 11 kg et dont le volume est de 2,5 dm³. On dispose aussi d'un autre minerai **B** dont la densité est de 8 (c'est-à-dire : qu'il « pèse » 8 kg par dm³).

1. Quelle est la densité du minerai **A** ?
2. On voudrait fabriquer un mélange de ces deux minerais pour obtenir un minerai **C** dont la densité soit égale à 7. On voudrait en même temps fabriquer la plus grande quantité possible de minerai **C** en utilisant les 11 kg de minerai **A**.
   a) Trouver la masse de minerai **B** que l'on doit utiliser.
   b) Si l'on voulait n'utiliser que 6,6 kg du minerai **A** pour obtenir le minerai **C** dont la densité soit encore égale à 7, quelle quantité de minerai **B** devra-t-on utiliser ?

Stop pour cette fiche !
*Bien entendu, il est à la lecture de **TOUS** sur CELENE !*

Pistes de CORRECTION (*avec « emprunts » à des corrigés COPIRELEM*)

EXERCICE 1

Quelques éléments de réponse.
• *Tâche 1*. Une clef : tracer, au choix, une diagonale ou une médiane. « Modifier à la main» le tracé de cette diagonale. Les deux surfaces obtenues ont même contour (vérifier), donc même périmètre, sans le calculer et des aires différentes, sans les calculer, proposer une «technique». Mais il y a beaucoup mieux : fait en ***TD***.

• *Tâche 2*. L'affaire se complique : il y a nécessité de se servir d'une grandeur-mesure qu'on va « construire ». Une clef : l'apport conceptuel des Egyptiens, plier en deux et répéter si nécessaire. Cette « double » grandeur-mesure va servir pour les périmètres et les aires. Apparition du nombre…

• *Bilan* : les deux tâches concernent le même objet géométrique : des surfaces, mais il y a deux grandeurs distinctes en jeu : les périmètres (*longueur du contour*) et les aires (*« place » occupée par les surfaces*). Les situations proposées mettent en évidence que les aires et les périmètres sont des grandeurs indépendantes. …

EXERCICE 2

L'aire de (**AIJ**) est le quart de celle de (**ABC**) ou aire (**AIJ**) = $\frac{1}{4}$ × aire (**ABC**).

Soit **H** le pied de la hauteur issue de **A** dans le triangle **ABC** et **H'** l'intersection de (**AH**) avec (**IJ**). Puisque **I** et **J** sont les milieux respectifs des segments **[AB]** et **[AC]**, la droite (**IJ**) est parallèle à la droite (**BC**). Et puisque (**AH**) est perpendiculaire à (**BC**), elle est aussi perpendiculaire à (**IJ**) et **H'** est donc le pied de la hauteur issue de **A** dans le triangle **AIJ**. L'aire de (**AIJ**) est donc $\frac{1}{2}$ × **IJ** × **AH'** et celle de (**ABC**) est $\frac{1}{2}$ × **BC** × **AH**. Mais **IJ** = $\frac{1}{2}$ **BC** (segment joignant les milieux de deux côtés) et, « avec » Thalès (*expliciter clairement les conditions d'utilisation*), on montre que **AH'** = $\frac{1}{2}$ **AH**. D'où la conclusion annoncée ci dessus.

EXERCICE 3

Si **L** et **l** sont les longueurs des côtés du rectangle **ABCD** et que ***a*** est la largeur de l'allée, le rectangle **A'B'C'D'** aura pour « longueur » (**L** + 2***a***) et pour « largeur » (**l** + 2***a***).
Les deux rectangles seront semblables (*homothétiques*) si et seulement si :
$\frac{\mathbf{(L+2a)}}{\mathbf{L}} = \frac{\mathbf{(l+2a)}}{\mathbf{l}}$; c'est-à-dire : 2***a*** × (**l** – **L**) = 0.
Si l'allée ne peut avoir une largeur nulle, la seule possibilité est que **L = l** et donc (**ABCD**) est un carré.

EXERCICE 4

Il suffit de placer côte à côte des feuilles **A4** dans la **largeur** superposées avec des feuilles placées dans la **longueur** jusqu'à ce que les extrémités de deux feuilles superposées coïncident. Si on fait concrètement la manipulation, on trouve que 12 **longueurs** coïncident, *à très peu près*, avec 17 **largeurs**.

Donc $\boxed{\mathbf{L} = \frac{\mathbf{17}}{\mathbf{12}} \times \mathbf{l}}$.

Si on ne fait pas la manipulation mais si on sait qu'une feuille **A4** est de dimension, en mm, 210 sur 297, on peut écrire $\frac{\mathbf{L}}{\mathbf{l}} = \frac{297}{210} = \frac{99}{70}$: 99 **largeurs** coïncident avec 70 **longueurs** et on a l'égalité : $\boxed{\mathbf{L} = \frac{\mathbf{99}}{\mathbf{70}} \times \mathbf{l}}$.

La différence avec le résultat précédent vient des imprécisions de la réalisation concrète.
Une **longueur L'** de **A3** correspond à deux **largeurs** de **A4**, et une **largeur l'** de **A3** est égale à une **longueur** de **A4** : **L'** = 2**l** et **l'** = **L**. On peut faire la même manipulation ou déduire du résultat précédent : $\boxed{\mathbf{L'} = \frac{\mathbf{99}}{\mathbf{70}} \times \mathbf{l'}}$

L'aire d'une feuille **A3** est le double de l'aire d'une feuille **A4**, celle d'une feuille **A2** est le double d'une feuille **A3**, etc... Donc une feuille **A0** a la même aire que 16 feuilles **A4**.

Si on admet l'approximation donnée auparavant et si on prend **l** = 21cm, on obtient : Aire(**A0**) = 9996cm² ≈ **1m²**.

EXERCICE 5

Volume de la sphère, en cm3 : $\boxed{\mathbf{V} = \frac{4}{3} \times \pi \times \mathbf{R^3}}$ = 10^3 (= *volume du cube d'arête 10cm*) ; d'où le rayon $\mathbf{R} = \sqrt[3]{\frac{3000}{4\pi}}$ ≈ **6,2035** donc **D = 2 × R ≈ 12,4 cm**. Même en ne sachant pas trouver une racine cubique à la calculatrice, on doit s'en sortir avec des calculs approchés. On cherche une valeur (*positive*) de **R** telle que $\mathbf{R}^3 \approx 239$. On procède par encadrements. On a $6^3 = 216 < 239 < 7^3 = 343$, donc on a déjà : 6 < **R** < 7. On continue, de « proche en proche » : on obtient une bonne approximation décimale de **R** ≈ 6,2 (cm).

Aire **A** de la sphère, en cm² : $4 \times \pi \times \mathbf{R}^2 = \frac{3V}{R} = \frac{3000}{R} < \frac{3000}{6}$, soit **A** < 500. Or, l'aire du cube est, en cm², 6 × 100 = 600, donc l'aire d'un patron du cube est supérieure à celle de la sphère. Il faut donc plus de surface pour recouvrir le cube que pour recouvrir la sphère.

EXERCICE 6

(*Notation* : 1 litre = 1**L**). On a la conversion : 8miles = 12,872km.

La voiture consomme 1 galon pour parcourir une distance de 12,872km, donc elle consomme $\frac{100}{12,872}$ galons pour parcourir 100km. Or 1galon = 3,8**L**, donc il faut $\frac{100}{12,872} \times 3,8$**L** pour parcourir 100 km, soit environ $\boxed{\textbf{29,5 L aux 100 km}}$.

EXERCICE 7

On a : $\mathbf{V_1} = \frac{1}{3} \times 36 \times \boldsymbol{x} = 12\boldsymbol{x}$ et $\mathbf{V_2} = \frac{1}{3} \times 18 \times (6 - \boldsymbol{x}) = 36 - 6\boldsymbol{x}$

$\mathbf{V_1} = \mathbf{V_2}$ c'est-à-dire $12\boldsymbol{x} = 36 - 6\boldsymbol{x}$. On trouve $\boldsymbol{x} = 2$. La construction est laissée au lecteur.

EXERCICE 8

1) La hauteur du cône est 10cm et son volume : 0,75**L** = 750 cm3.

Or, $\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times \mathbf{r^2} \times \mathbf{h}$, où **r** est le rayon du disque de base (*donc d'ouverture du verre*).

En remplaçant **V** et **h** par leur valeur numérique, on trouve $\mathbf{r}^2 = \frac{750\times3}{\pi\times10}$, d'où **r** ≈ **8,46 cm**.

Son diamètre d'ouverture est donc d'environ **17 cm**.

2) Quand le verre est à moitié plein, il contient 375 cm3 de liquide qui atteint une hauteur **h'** et dont la surface supérieure a un rayon **r'**.

En utilisant le théorème de Thalès (*expliciter impérativement les conditions d'utilisation*) à l'intérieur du cône, on peut écrire $\frac{\mathbf{r'}}{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{h'}}{\mathbf{h}}$. Si on note ***k*** ce rapport de réduction, on doit avoir $\frac{\mathbf{V'}}{\mathbf{V}} = \frac{1}{2} = \frac{\mathbf{h'^3}}{\mathbf{h^3}}$.

On en déduit que **h'** = $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$ ≈ **7,937**, soit environ **8 cm**.

<u>*Remarque*</u>. Comme pour l'exercice 5, on peut obtenir la hauteur par des calculs approchés du même style. A faire !

EXERCICE 9

1) Construction et vérification à la règle.

2) Dans le triangle équilatéral **DEC**, on a **DE** = **DC**. Dans le carré **ABCD**, on a **AD** = **DC**.
On peut en déduire que **AD** = **DE** et que le triangle **DAE** est isocèle de sommet principal **D**.
On a : $\widehat{\mathbf{CDE}}$ = 60°, car le triangle **DCE** est équilatéral. D'autre part $\widehat{\mathbf{CDA}}$ = 90°, car **ABCD** est un carré.
Donc l'angle $\widehat{\mathbf{EDA}}$ est complémentaire de l'angle $\widehat{\mathbf{CDE}}$ et $\widehat{\mathbf{ADE}}$ = 30°.
Dans le triangle isocèle **ADE**, les angles $\widehat{\mathbf{DAE}}$ et $\widehat{\mathbf{DEA}}$ ont même mesure.
On a $\widehat{\mathbf{DAE}}$ = $\widehat{\mathbf{DEA}}$ = 75° ; de la même manière, on peut démontrer que $\widehat{\mathbf{ECB}}$ = 30° et $\widehat{\mathbf{BCF}}$ = 60°. On a : $\widehat{\mathbf{ECF}}$ = $\widehat{\mathbf{ECB}}$ + $\widehat{\mathbf{BCF}}$ = 30° + 60° = 90°.
Le triangle **ECF** est donc un triangle rectangle isocèle, on a $\widehat{\mathbf{CEF}}$ = $\widehat{\mathbf{CFE}}$ = 45°.

3) On a finalement : $\widehat{\mathbf{AEF}}$ = $\widehat{\mathbf{AED}}$ + $\widehat{\mathbf{DEC}}$ + $\widehat{\mathbf{CEF}}$ = 75° + 60° + 45° = 180°.
L'angle $\widehat{\mathbf{AEF}}$ est donc un angle plat. On peut en conclure que les points **A**, **E** et **F** sont trois points alignés.

EXERCICE 10

1) Un tour de pédalier fait avancer la chaîne de 46 dents, donc la roue « fait » $\frac{46}{17}$ tours. Ce qui correspond à une distance parcourue $\mathbf{d = \pi \times 685 \times 10^{-3} \times \frac{46}{17}}$ (en mètres).

Calculs… : 1 tour de pédalier permet de parcourir (environ) 5,823 m. Pour parcourir 20 km en une heure, il faut faire $\frac{20}{d}$ tours de pédalier en une heure. Ce qui donne $\frac{1}{3d}$ tour de pédalier en une minute. On trouve alors qu'on doit faire (*environ*) 57 tours de pédalier par minute.

Autre solution. Rouler à une vitesse de 20 km/h est équivalent à rouler à (*environ*) une vitesse de 0,333 km/min. Le quotient $\frac{0{,}333}{0{,}005823} \approx 57$ donne alors le nombre de tours par minute.

2) *Item difficile*. Si ***y*** est la vitesse en tr/min du pédalier et ***v*** la vitesse du cycliste en km/h, on a l'égalité :

$\boldsymbol{y} = \dfrac{\frac{\mathbf{v}}{60} \times \frac{17}{46}}{\pi \times 685}$. (Faire les calculs intermédiaires pour simplifier ce quotient). Evaluer alors une valeur de ***y***.

Que voilà une belle formule ! *Contrôler avec des exemples*.

EXERCICE 11

<u>*Exercice 5 de l'évaluation.*</u>

La technique usuelle consiste à poser l'opération : 9 h 15 min – 8 h 30 min.

Ce n'est pas le « procédé » directement attendu ; par contre, on peut utiliser le surcomptage (*calculs en « avançant »*) ou le décomptage (*calculs en « reculant »*) et proposer une solution de la forme : « *Pour aller de 8 h 30 min à 9 h 15 min, on va de 8 h 30 min à 9 h, puis de 9 h à 9 h 15 min, c'est-à-dire qu'on ajoute 30 min et 15 min, donc la durée est égale à 45 min* ».

<u>*Exercice 37 de l'évaluation.*</u> Même procédure.

« *On va de 20 h à 24 h, puis de 0 h à 6 h 30, d'où la durée : 4h +6h30 = 10h30* ».

On accepte toute autre procédure similaire avec les fractions d'heure.

EXERCICE 12

<u>*La question qui tue*</u> (Voir le **CM**) ! Est-ce que la vitesse moyenne est égale à la moyenne des vitesses. Evidemment, ça ne marche pas, Ah bon !!!

1. Vitesse moyenne sur le parcours « aller » :

Les grandeurs en jeu sont : des longueurs [**L**] avec le kilomètre (km) comme unité de mesure ; des durées [**D**] avec l'heure (***h***) comme unité de mesure et des vitesses [**v**] avec le kilomètre par heure (***km/h***) comme unité de mesure.

Une vitesse est une grandeur quotient d'une longueur par une durée : [**v**] = $\frac{\textbf{[D]}}{\textbf{[L]}}$

Ainsi une durée est aussi le quotient d'une longueur par une vitesse.

Appelons **L** la longueur du premier tronçon (la montée à « l'aller ») et **l** la mesure correspondante ; $\frac{l}{2}$ est donc la mesure du deuxième tronçon (la descente à « l'aller »).

<u>*CODAGE*</u>*. De façon générale, les grandes lettres désignent les grandeurs et les petites lettres désignent les mesures correspondantes.*

La durée du parcours « aller » est donc : $D_{aller} = \dfrac{L}{20 \text{ km/h}} + \dfrac{\frac{L}{2}}{40 \text{ km/h}}$

$D_{aller} = \dfrac{l}{20} + \dfrac{l}{80}$; $D_{aller} = \dfrac{5l}{80}$

La vitesse moyenne sur le parcours « aller » est le quotient de la longueur parcourue à l'aller sur la durée de ce parcours « aller ».

$V_{aller} = \dfrac{L + \frac{L}{2}}{D_{aller}}$ et $V_{aller} = \dfrac{l + \frac{l}{2}}{\frac{5l}{80}} = 24$ donc $\mathbf{V_{aller} = 24 \text{ km/h}}$

2. Vitesse moyenne sur le parcours « retour »

La durée du parcours « retour » est :

$D_{retour} = \dfrac{L}{40 \text{ km/h}} + \dfrac{\frac{L}{2}}{20 \text{ km/h}}$ $\quad D_{retour} = \dfrac{l}{40} + \dfrac{\frac{l}{2}}{20} = \dfrac{l}{20}$

et la vitesse moyenne sur le parcours « retour » est :

$V_{retour} = \dfrac{L + \frac{L}{2}}{D_{retour}}$ et $V_{retour} = \dfrac{l + \frac{l}{20}}{\frac{l}{20}} = 30$ donc $\mathbf{V_{retour} = 30 \text{ km/h}}$

3. Vitesse moyenne sur le parcours « aller-retour »

La durée du parcours « aller-retour » est : Dar = $D_{aller} + D_{retour} = \dfrac{5l}{80} + \dfrac{l}{20} = \dfrac{9l}{80}$

La longueur parcourue est : $L + \dfrac{L}{2} + \dfrac{L}{2} + L = 3L$

La vitesse moyenne sur le parcours « aller-retour » est : $V_{ar} = \dfrac{\frac{3l}{9l}}{\frac{9l}{80}} = \dfrac{80}{3}$ donc $\mathbf{V_{ar} \approx 26{,}67 \text{ km/h}}$

Autre méthode.

A l'aller, la longueur de la descente est deux fois plus courte que la longueur de la montée et la vitesse de descente est le double de celle de la montée.

La durée de la descente sera donc égale au quart de la durée de la montée et la durée totale sera 5 fois la durée de la descente nommée D.

La longueur totale de l'aller sera 3 fois plus grande que la longueur de la descente nommée L.

D'où: $V_{aller} = \dfrac{3L}{5D} = \dfrac{3}{5} \times V_{descente}$ $\quad V_{aller} = \dfrac{3}{5} \times 40$ km/h = **24 km/h**

Au retour, la descente est deux plus longue que la montée, mais à une vitesse double ; les temps de montée et de descente sont donc égaux ; d'où :

$V_{retour} = \dfrac{3L}{2D} = \dfrac{3}{2} \times V_{montée}$ $\quad V_{retour} = \dfrac{3}{2} \times 20$ km/h = **30 km/h**. Au lecteur de jouer pour la vitesse pour le trajet « aller-retour », on trouve aussi **V ≈ 26,7 km/h**.

EXERCICE 13

~~*Exercice déjà traité en CM. Qui s'en est aperçu ?*~~

1. Durée de remplissage du bassin en utilisant les deux fontaines

Méthode 1.

En 1 heure, la première fontaine remplit $\frac{1}{9}$ de la capacité du bassin. En 1 heure, la deuxième fontaine remplit $\frac{1}{7}$ de la capacité du bassin. Donc, si on utilise simultanément les deux fontaines, elles rempliront en 1 heure : $\frac{1}{9} + \frac{1}{7} = \frac{16}{63}$.

Soit les $\frac{16}{63}$ de la capacité du bassin : d'où le tableau de proportionnalité.

Mesure de Durée (unité : h)	Mesure de capacité (unité : capacité du bassin)
1	$\frac{16}{63}$
?	$1 = \frac{63}{63}$

Pour remplir la totalité du bassin, il faudra donc une durée de $\mathbf{\frac{63}{16}}$**h.**

Méthode 2.

Les grandeurs en jeu sont les suivantes : des volumes [**V**] pour la capacité du bassin ; des durées [**D**] pour des temps d'écoulement d'eau ; des débits [**d**] comme grandeur quotient d'un volume par une durée.
Remarque : ainsi un volume est également le produit d'une durée par un débit.
Soient $\mathbf{d_1}$ et $\mathbf{d_2}$ les débits exprimés en litres par heure respectivement de la première et de la deuxième fontaine, et **V** la capacité du bassin on a : d'une part $\mathbf{V} = 9\text{h} \times \mathbf{d_1}$ et d'autre part $\mathbf{V} = 7\text{h} \times \mathbf{d_2}$
Soit **D** la durée mise pour remplir le bassin en utilisant simultanément les deux fontaines, le débit est alors $\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2}$ (car les deux débits s'ajoute pour former le débit total lorsque les deux fontaines fonctionnent) et on a la relation :
$\mathbf{V} = \mathbf{D} \times (\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2})$. D'où : $9\text{h} \times \mathbf{d_1} = 7\text{h} \times \mathbf{d2} = \mathbf{D} \times (\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2})$

L'égalité $9\text{h} \times \mathbf{d_1} = 7\text{h} \times \mathbf{d_2}$ donne $\mathbf{d_2} = \frac{9}{7}\,\mathbf{d_1}$.

D'où en reportant cette relation entre débits dans $9\text{h} \times \mathbf{d_1} = \mathbf{D} \times (\mathbf{d_1} + \mathbf{d_2})$

$9\text{h} \times \mathbf{d_1} = \mathbf{D} \times (\mathbf{d_1} + \frac{9}{7}\,\mathbf{d_1})$. Soit en simplifiant par $\mathbf{d_1}$ ($\neq 0$) : $9\text{h} = \mathbf{D} \times (1 + \frac{9}{7}) = \frac{16}{7}\text{D}$.

D'où $\mathbf{D} = 9\text{h} \times \frac{7}{16} = \mathbf{\frac{63}{16}}$ **h. Il faut donc une durée de** $\mathbf{\frac{63}{16}}$ **h pour remplir le bassin.**

Méthode 3. (Voir page suivante).

La première fontaine remplit 7 bassins en 63 heures ; la deuxième fontaine remplit 9 bassins en 63 heures. Donc, en utilisant simultanément les deux fontaines, on remplit 7 + 9 = 16 bassins en 63 heures. **Il faudra donc $\frac{63}{16}$h pour remplir le bassin en utilisant simultanément les deux fontaines.**

Calcul de la durée en heures, minutes, secondes :

63 = (3 × 16) + 15 donc $\frac{63}{16}$h + $\frac{15}{16}$h = 3h + $\frac{15 \times 60}{16}$min = 3h + $\frac{225}{4}$min

Or $\frac{225}{4} = 56 + \frac{1}{4}$. Il faut donc 3h + 56min + $\frac{1}{4}$min autrement dit : 3h + 56min + 15s

Le temps mis pour remplir le bassin est donc de 3heures 56 minutes et 15 secondes.

2. a. Capacité du bassin

Soit **V** la capacité du bassin exprimée en litres, on a les débits en litres par heure :

Débit de la première fontaine : $\mathbf{d_1} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{9h}}$

Débit de la deuxième fontaine : $\mathbf{d_2} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{7h}}$

Et comme un volume est le produit d'une durée par un débit :

D'où $(4h \times \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{9h}}) + (3h \times \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{7h}}) = 550L$; (*simplifications et calculs*) $\mathbf{V} \times \frac{55}{63} = 550L$.

D'où **V = 630 L**

2. b. Débit de chacune des fontaines

Le débit de la première fontaine est donc : $\frac{630L}{9h}$ = **70L/h.**

Le débit de la deuxième fontaine est : $\frac{630L}{7h}$ = **90L/h.**

EXERCICE 14

1. Durée du trajet Cherbourg - Caen

La durée du trajet est proportionnelle à la longueur du trajet.

Comme 1 heure est égale à 60 minutes et que la vitesse moyenne du train est 165 km/h, en 60 minutes, le train parcourt 165 kilomètres donc il parcourt 1 kilomètre en $\frac{60}{165}$ minute. Ainsi, pour un trajet de 132 kilomètres, la durée sera : $\frac{60 \times 132}{165}$ min = 48 min.

Le train effectuera le trajet Cherbourg-Caen en 48 minutes.

2. a. Tableau

Calculs pour 500 km, avec le tarif **A** : 500 × 0,12 × 0,75 = 45 soit 45 €

avec le tarif **B** : (500 × 0,12 × 0,5) + 30 = 60 soit 60 €

	Avec le tarif A	**Avec le tarif B**
Dépense annuelle pour 500 km	45 €	60 €
Dépense annuelle pour 1500 km	135€	120 €

2. b. Expression de t_1 (t_1€ est la dépense annuelle en euros pour x km avec le tarif A) et de t_2 (t_2 € dépense annuelle pour x km avec le tarif B) en fonction de x.

Dépense annuelle avec le tarif A : $t_1 = 0{,}75 \times 0{,}12 \times x = 0{,}09x$

Dépense annuelle avec le tarif B : $t2 = (0{,}5 \times 0{,}12 \times x) + 30 = 0{,}06x + 30$

3. a. Résolution de l'inéquation :

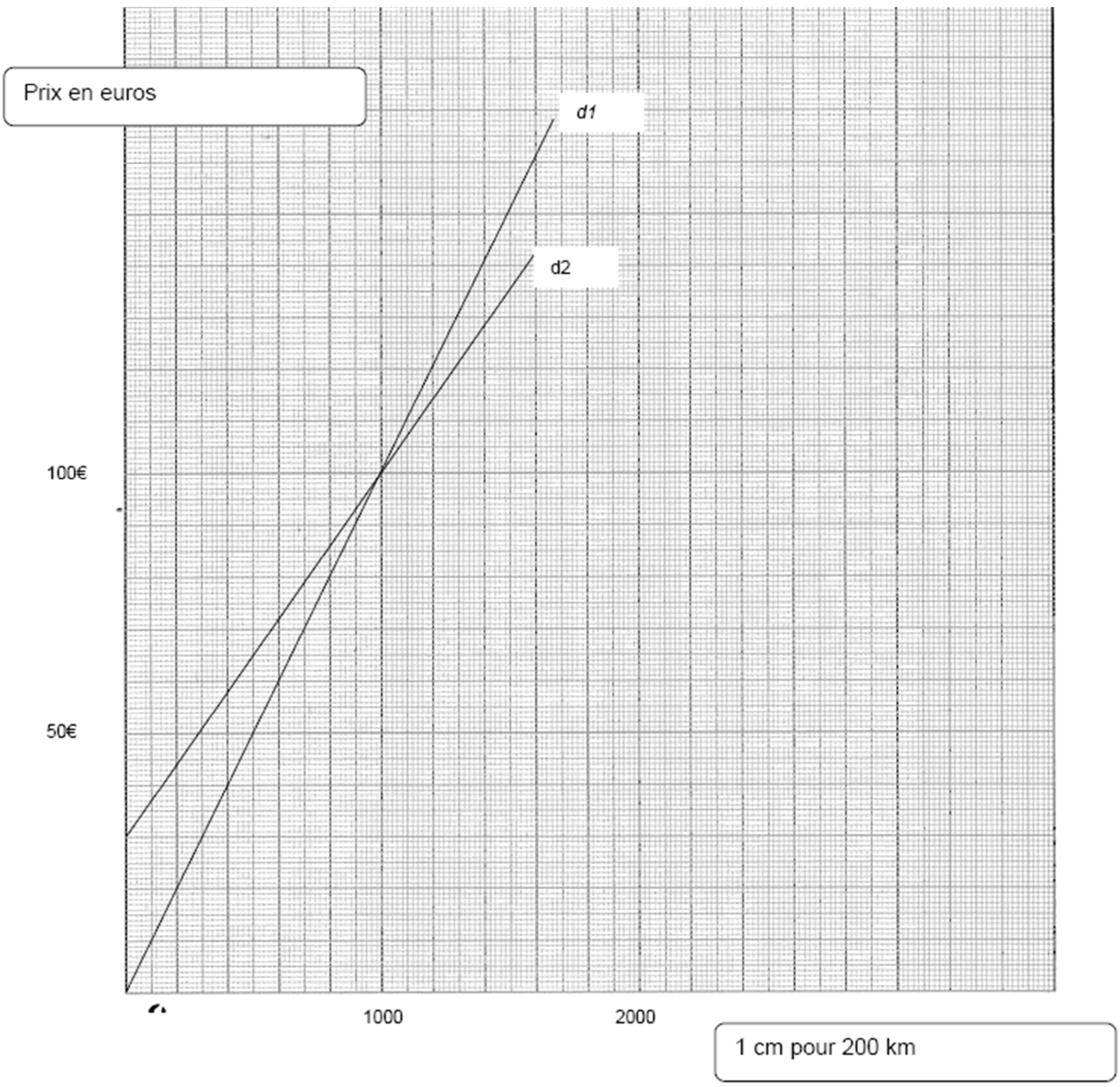
$0{,}06x + 30 < 0{,}09x$; $0{,}09x - 0{,}06x > 30$; $0{,}03x > 30$; $x > \dfrac{30}{0{,}03}$; $x > 1000$.

Les solutions de cette inéquation sont **tous les nombres strictement supérieurs à 1000**.

3. b. Avantage de la carte « 15-25 »

D'après a), le tarif B est inférieur au tarif A lorsque le nombre de kilomètres est supérieur à 1000, donc **il est préférable d'acheter la carte « 15-25 » si l'on effectue plus de 1000 km par an**.

4. a. Tracé des droites *d1* d'équation $y = 0{,}09x$ et *d2* d'équation $y = 0{,}06x + 30$



4. b. Retrouver graphiquement le résultat de 3. B. :
Graphiquement, on lit l'abscisse du point d'intersection des droites d_1 et d_2. Cela correspond au nombre de km (On lit 1000), à partir duquel, le tarif **B** est plus avantageux que le tarif **A**.

EXERCICE 15

1) Volume du cône

Le volume du cône (*de révolution*) est donné par la formule : $\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \mathbf{B} \times \mathbf{h}$ (où **B** est l'aire du disque de base et **h** la hauteur du cône).
On a donc : $\mathbf{V} = \frac{1}{3} \times \pi \times 8^2 \times 25 = \frac{1600\pi}{3} \approx 1676$ (cm^3).
Le volume du cône est environ 1676 cm ^{3}(au cm^3 près).
Pour avoir la capacité du cône en litre, il suffit de convertir les cm^3 en dm^3 car $\boxed{1\text{dm}^3 = 1\text{L}}$.
Rappel : 1000cm^3 = 1dm^3= 1L
On sait que 1676cm^3 = 1,676dm^3. Ainsi **la capacité du cône est 1,676L**.

2) Rayon du petit cercle
Dans le triangle **SAB**, les droites (**CD**) et (**AB**) sont parallèles. Les points **S**, **C**, **A** et **S**, **D**, **C** sont alignés dans cet ordre (ou les deux triangles **SCD** et **SAB** sont en configuration de Thalès), donc, d'après le théorème de Thalès appliqué à ce triangle, on a : $\frac{\mathbf{SC}}{\mathbf{SA}} = \frac{\mathbf{SD}}{\mathbf{SB}} = \frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{AB}}$. Alors : $\frac{5}{25} = \frac{\text{CD}}{8}$. On en conclut que : $\mathbf{CD} = \frac{8 \times 5}{25} = \frac{8}{5}$. **Ainsi CD = 1,6cm.**

3) Volume du tronc de cône et proportionnalité

Le petit cône est une réduction du grand cône de rapport $\frac{5}{25} = \frac{1}{5}$.
Dans ce cas, les longueurs sont réduites dans le rapport $\frac{1}{5}$, les aires dans un rapport $\left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}$.
Et les volumes dans un rapport $\left(\frac{1}{5}\right)^3 = \frac{1}{125}$. Appelons *Vp* le volume du petit cône et *Vtc* le volume du tronc de cône. On a : $Vp = \frac{1}{125} \times \mathbf{V}$, donc $Vtc = \mathbf{V} - \frac{1}{125}\mathbf{V} = \frac{124}{125}\mathbf{V}$.
Or **V** vaut environ 1676 cm3, donc le **volume du tronc de cône est environ 1662 cm3.**
Si ce volume était proportionnel à la hauteur **AC**, pour **AC** = 20 cm, il devrait être égal aux $\frac{4}{5}$ du volume du cône puisque $20 = \frac{4}{5} \times 25$. Or 1662 n'est pas égal aux $\frac{4}{5}$ de 1676 : 4/5 × 1676 = 1340,8 ≠ 1662. **Le volume du tronc de cône n'est donc pas proportionnel à AC**.
Autre technique : est-ce que cinq volumes du petit cône valent celui du tronc de cône ?

EXERCICE 16

Aire du demi-cercle de diamètre [**AC**] : $\frac{1}{2}\pi \times \frac{\text{AC}^2}{4} = \frac{49\pi}{8}$ (cm^2).
Aire du triangle **ABC** : $\frac{1}{2} \times \mathbf{AB} \times \mathbf{BC} = \frac{1}{2}\mathbf{AB}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{BC}^2$ (*car **ABC** isocèle en **B** donc **AB** = **BC***)
Comme le triangle **ABC** est aussi rectangle en **B**, le théorème de Pythagore permet d'écrire que : $2\mathbf{BC}^2 = \mathbf{AC}^2$, donc $\mathbf{BC}^2 = \frac{1}{2}\mathbf{AC}^2$. D'où l'aire du triangle **ABC** : $\frac{1}{4}\mathbf{AC}^2 = \frac{49}{4}$ (cm^2).

Aire de l'ensemble des deux calottes : calculée en retranchant l'aire du triangle **ABC** de l'aire du demi-disque de diamètre [**AC**] : $\frac{49\pi}{8} - \frac{49}{4}$ (cm^2).

Aire de la réunion des deux demi-disques de diamètre [**BC]** et [**AB**].
C'est-à-dire en fait, l'aire d'un cercle de diamètre [**BC**] ou [**AB**] :
$\pi \times \frac{BC^2}{4} = \pi \times \frac{AC^2}{8} = \pi \times \frac{49}{8}$ (cm^2).

Aire des surfaces grisées, calculée en retranchant l'aire de l'ensemble des deux calottes de l'aire des deux demi-disques de diamètres [**BC**] et [**AB**] :
$\frac{49\pi}{8} - (\frac{49\pi}{8} - \frac{49}{4}) = \frac{49}{4}$ = **12,25 (cm^2)**.

EXERCICE 17

Soit **N** le nombre de caisses à ranger et **T** l'heure à laquelle le magasinier a commencé son travail.
$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{50}}$ est la durée en heures mise pour ranger les caisses si la vitesse de rangement est de 50 caisses par heure. On a alors $\mathbf{T} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{50}}$ = 11h 30min (*)
$\frac{\mathbf{N}}{\mathbf{60}}$ est la durée en heures mise pour ranger les caisses si la vitesse de rangement est de 60 caisses par heure. On a alors $\mathbf{T} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{60}}$ = 11h 15min (**). Ce qui revient à résoudre un système de deux équations du premier degré à deux inconnues **T** et **N**.
<u>*Une technique*</u>. Retranchons membre à membre les égalités (*) et (**), on a alors :
$\mathbf{T} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{50}} - (\mathbf{T} + \frac{\mathbf{N}}{\mathbf{60}}) = \frac{1}{4}$ h donc **N** = 75 caisses.

Durée pour ranger 75 caisses à la vitesse de 50 caisses à l'heure : $\frac{75}{50} = \frac{3}{2}$ = 1h 30 min

Le magasinier a donc commencé son travail à 11h 30 min – (1h 30min) soit 10h.

EXERCICE 18

1. La masse volumique du minerai **A** est : $\frac{11}{2,5}$ kg/dm^3 soit 4,4 kg/dm^3. La densité du minerai **A** est : $\frac{(4,4 \text{ kg/dm}^3)}{(1 \text{ kg/dm}^3)} = 4,4$.

2. a) Soit $\boldsymbol{x}$ la masse du minerai **B** et ($\boldsymbol{x}$ + 11) la masse du mélange. Soit $\mathbf{V_A}$ le volume du minerai **A**, $\mathbf{V_B}$ le volume du minerai **B** et $\mathbf{V_M}$ le volume du mélange. On a : $\mathbf{V_M} = \mathbf{V_A} + \mathbf{V_B}$
Or $\mathbf{V_M} = \frac{x + 11}{7}$ et $\mathbf{V_A}$ = 2,5 et $V_B = \frac{x}{8}$. Donc $\frac{x + 11}{7} = 2,5 + \frac{x}{8}$, on trouve $\boldsymbol{x}$ = 52 ; donc le minerai **B** a une masse de 52 kg.

b) Si on utilise que 6,6 kg du minerai **A**, alors il suffit de calculer le volume du minerai **A** en prenant une masse volumique de 4,4 kg/dm^3

c) Dans ce cas, $\mathbf{V_A} = \frac{6,6}{4,4}$ = 1,5 dm^3. d) En reprenant les calculs, en remplaçant 2,5 dm^3 par 1,5 dm^3 et 11 kg par 6,6 kg, on trouve : $\frac{x + 6,6}{7} = 1,5 + \frac{x}{8}$ donc $\boldsymbol{x}$ = 31,2 kg.

Voilà un bon fichier, avec un peu de tout. Certains exercices sont difficiles, mais on n'a rien sans rien. ***PW***.