Aires et Périmétres, (Aix-Marseille 1997)
Corrigé (d'après celui rédigé par la COPIRELEM).

Question 1

1) Les aires de ces surfaces peuvent être comparées deux à deux directement par superposition, sauf pour les surfaces **D** et **E**.
Par exemple, pour comparer **C** et **A**, l'élève peut :

- soit découper directement la surface **C** et la poser sur la surface **A**,
- soit utiliser du papier calque pour reproduire les surfaces et les découper,
- soit en traçant un arc de cercle convenable, construire à l'intérieur de la surface **A**, une surface identique à la surface **C**.

L'élève peut soit réaliser concrètement les actions ci-dessus, soit les imaginer mentalement. Dans tous les cas, l'élève peut constater que la surface **C** "est contenue" dans la surface **A** et en conclure que **aire (C) < aire (A)**
Il peut trouver par le même procédé que :

aire (A) < aire (D) <aire (F) < aire(B) et que **aire(A)< aire(E) < aire(F) < aire (B)**.

La comparaison des surfaces **D** et **E** est un peu moins immédiate.
Après découpage, l'élève peut poser la surface **D** sur la surface **E**, découper le morceau de **E** qui dépasse, puis adjoindre ce morceau à **E** de façon à reconstituer avec **E** une surface identique à **D** (Cf. figure)
Il peut ainsi conclure que : **aire (E) = aire (D)**, ce qui termine le rangement.

Commentaire :
Par ce procédé, l'élève met en oeuvre la définition suivante de la notion d'aire :

- *deux surfaces **A** et **B** ont la même aire si, à partir de la surface **A**, on peut former une surface identique (exactement superposable) à la surface **B**, en découpant et recollant des morceaux.*
- *une surface **A** a une aire inférieure à une surface **B**, si la surface **A** a la même aire qu'une surface **A'** contenue dans[1] **B**.*

2) a) En traçant les deux médianes de chaque carré, on voit facilement que :

aire (A) = $U_1 + 3U_2$	**aire(B) = $4U_1$**	**aire(C) = $4U_2$**
aire(D) = aire(E) = $2U_1 + 2U_2$	**aire(F) = $3U_1+U_2$**	

b) Pour déduire de ces mesures le rangement des aires, il faut comparer **U_1** et **U_2**.
Or **$U_2 < U_1$** d'où **$4U_2 < U_1+3U_2 < 2U_1+2U_2 < 3U_1+U_2 < 4U_1$** et on retrouve le rangement du **1)** :

aire(C) < aire (A) < aire (D) = aire(E) < aire (F) < aire(B).

c) **U_1** et **U_2** peuvent être comparées par simple superposition : la surface **U_2** est visiblement contenue dans la surface **U_1**.

Question 2

1) Beaucoup d'élèves donneront le même rangement que précédemment, car ils ne distinguent pas la notion de périmètre de la notion d'aire. Ils pensent que "plus l'aire est grande, plus le périmètre est grand" et que "si deux surfaces ont la même aire, elles ont aussi le même périmètre".

Complément :
*Il s'agit là de "**théorèmes en acte**", c'est à dire d'affirmations (souvent fausses !) qu'ils utilisent implicitement et qui sont liées à une conception fausse des notions d'aire et de périmètre. Le rangement suivant les aires correspond assez bien à la perception qu'ils ont des surfaces (la figure **B** est visiblement "plus grande") alors que le rangement suivant les périmètres peut s'opposer à cette perception immédiate (c'est le cas ici) et demande plus de réflexion.*

2) Réponse 1:
Si un élève formulait le théorème en acte, l'enseignant pourrait peut-être faire écrire au tableau : "si l'aire est plus grande, le périmètre est plus grand" et leur proposer de vérifier si cette affirmation est bien vraie, en examinant, sur papier quadrillé, un carré de 3 carreaux de côté et un rectangle de 7 carreaux de longueurs et de 1 carreau de largeur; les enfants peuvent alors constater que l'aire du premier est plus grande (9 > 7 ou bien en imaginant le « découpage-recollage » du deuxième sur le premier) alors que son périmètre est plus petit (12< 16).

---

1 Pour plus d'information, voir le document "THEMES MATHEMATIQUES", publié en 1995 p.72, édité par l'I.R.E.M. de Bordeaux.

Réponse 2[2] 2 :
L'enseignant peut proposer de commencer à vérifier collectivement le rangement proposé, en comparant les périmètres de surfaces très proches, par exemple **B** et **F**.
En dessinant la figure **F** sur la figure **B**, les enfants pourraient voir qu'il y a une grande partie du contour qui est commune aux deux figures (les 3/4 du cercle); et pour la partie qui diffère, il s'agit de deux quarts de cercle; celui de **B** a pour centre le centre du carré, et celui de **F** un sommet du carré; mais ils ont tous les deux le même rayon (la moitié de la longueur du côté du carré) ; ils ont donc la même longueur. Donc **B** et **F** ont le même périmètre.
Dans les deux cas, les enfants peuvent revenir sur leur "idée première" : la comparaison des aires ne permet pas de conclure quant à la comparaison des périmètres, il faut regarder de plus près les figures pour les ranger suivant le périmètre.

3) a) une procédure simple consiste à utiliser ici encore les médianes du carré pour décomposer chaque contour en 4 parties ; les élèves peuvent constater alors que ces parties sont toutes des quarts de cercles, de centre soit le centre du carré soit un sommet du carré ; tous ces quarts de cercle sont de même rayon; ils sont donc de même longueur.
b) la réponse attendue est donc que toutes les surfaces ont le même périmètre, qui est donc égal au périmètre du cercle inscrit dans le carré.

Question 3

Le travail précédent a permis de remettre en cause une idée fausse des enfants en constatant que des surfaces d'aires différentes peuvent avoir le même périmètre.
On peut supposer que l'enseignant veut montrer maintenant que des surfaces de même aire peuvent avoir des périmètres différents : il choisira donc la surface **B** qui a la même aire que **G** (égale à $\mathbf{4U_1}$) et les élèves constateront que le périmètre de **G** est supérieur au périmètre de **B** [périmètre de **G** = périmètre de **B** + **a** où **a** est la longueur du coté du carré].

Question 4

1) L'objectif spécifique de l'enseignant dans cette séance est de faire la distinction entre les notions d'aire et de périmètre : permettre aux élèves de « prendre conscience » (*PW n'aime pas !*) que ces deux grandeurs sont indépendantes l'une de l'autre.
Complément :
Il s'agit de consolider ainsi le sens de ces deux notions.
♣ la notion d'aire :
☺ la pratique de superposition, de découpage et recollement, réalisée effectivement ou bien imaginée (!), permet de redéfinir la grandeur "aire", indépendamment des calculs.
☺ l'utilisation de pavage avec des unités non conventionnelles pour mesurer des aires, précise la notion de mesure et prépare l'introduction des unités conventionnelles.
♣ la notion de périmètre : l'activité permet de la définir à nouveau car elle s'oppose ici à la perception immédiate des surfaces. *Rappel* : on parle de la longueur d'une ligne et du périmètre d'une surface

Commentaire :
On peut regretter, dans une activité portant sur cet objectif spécifique, que le cas "aire plus petite et périmètre plus grand" ne soit pas vu ici, mais sans doute le sera-t-il dans une séance ultérieure.

2) Réponse 1

~~Nous choisissons, comme dans le matériel proposé, une première série de surfaces de même périmètre et d'aires différentes, que les enfants devront ranger d'abord suivant les aires, puis suivant les périmètres.~~
~~Comme dans l'exemple, la comparaison des aires peut se faire dans un premier temps par superposition, soit directement, soit après découpage et recollage.~~
~~Dans un deuxième temps, l'unité "**u**" est proposée pour exprimer les mesures des aires et effectuer le rangement.~~
~~Les surfaces choisies ont pour mesures d'aire :~~
~~**A'** : **16u** **B'** : **10u** **C'** : **9u** **D'**: **13u** **E'** :**25u** **F'** : **14u**~~
~~Le périmètre commun à toutes les surfaces est **20a**, où **a** est la longueur du côté du carré qui définit **u**.~~
~~Pour la surface **G'**, nous choisissons une aire de **16u** et un périmètre de **26a** :~~
- ~~la surface **G'** peut être comparée à la surface **A'** : même aire et périmètre plus grand.~~
- ~~elle peut aussi être comparée à la surface **E'** : elle a une aire plus petite et un périmètre plus grand.~~

2 Voir les articles de R. Douady et M.J. Perrin" ***Aires des surfaces planes*** ", revue « Petit ***x*** » n°**6**, pages 5 à 33 et n° **8**, pages 5 à 30.

2) Réponse 2.

~~Nous choisissons, comme dans le matériel proposé, une première série de surfaces de même périmètre et d'aires différentes, que les enfants devront ranger d'abord suivant les aires, puis suivant les périmètres.~~
~~Comme dans l'exemple, la comparaison des aires peut se faire dans un premier temps par superposition, soit directement, soit après découpage et recollage.~~
~~Dans un deuxième temps, les unités **u1** et **u2** sont proposées pour mesurer les aires et effectuer le rangement à l'aide de ces mesures. Les aires des surfaces proposées ont pour mesures :~~
~~**A"** et **F"** : **13u1 + 2u2** **B"** : **8u1 + 4u2** **C"** : **13u1** **D"** : **8u1 + 2u2** **E"**: **25u1.**~~
~~**u1** est définie par un carré de côté **a**, et **u2** par un triangle équilatéral de côté **a**. Le périmètre commun est **20a**.~~
~~Comme dans l'exemple donné, par superposition, on voit que **u2 < u1**, ce qui permet de retrouver le rangement à partir des mesures ci-dessus.~~
~~Pour la surface **G"**, nous choisissons une aire de **13u1 + 2u2** et un périmètre de **24a** :~~
- ~~la surface **G"** peut être comparée à la surface **A"** (ou **F"**) : même aire et périmètre plus grand.~~
- ~~elle peut aussi être comparée à la surface **E"** : elle a une aire plus petite et un périmètre plus grand.~~

Note de PW :
Se reporter aux corrections fournies en TD : arguments et exemples plus « simples » et abordables que le corrigé COPIRELEM.
Tout a été fait en TD…

Commentaires sur cette question et les réponses données ici:
1°) L'expression "suivant les mêmes modalités" pouvait être interprétée de plusieurs façons (jusqu'où doit aller la ressemblance avec le matériel proposé et les procédures mises en oeuvre ?) ; en particulier, en ce qui concerne la présence, ou non, de deux unités de mesure. C'est pourquoi nous donnons deux exemples de réponse, l'une avec deux unités de mesure, l'autre avec une seule unité.
2°) Cette question nous parait nécessiter beaucoup de temps si l'on veut une réalisation précise et complète du matériel demandé.
Nous donnons les deux réponses ci-dessus pour l'information des candidats, mais il ne nous parait pas envisageable de produire un matériel aussi élaboré un jour de concours.
Il nous semble que le mot "Proposez" peut être entendu comme "Décrivez" plutôt que "Réalisez effectivement". C'est pourquoi nous considérons comme réponse acceptable le jour du concours :
- la réalisation des surfaces **A** et **B** et de celle définissant **u** (ou bien $\mathbf{u_1}$ et $\mathbf{u_2}$)
- l'indication des mesures d'aire et de périmètre pour les autres surfaces
- quelques lignes pour montrer que ces surfaces répondent bien à la question (Cf. corrigé ci -dessus).

Question V

1- Deux surfaces peuvent avoir la même aire et des périmètres différents : **H** et **I**.
2- Deux surfaces peuvent avoir le même périmètre et des aires différentes : **H** et **K**.

Là aussi, d'autres pistes d'aide-mémoire ont été mises en forme pendant le TD…