TRIGONOMETRIE - GEOMETRIE DANS L'ESPACE - GRANDEURS ET MESURES

EXERCICE 1

1. Construire un triangle **SKI** rectangle en **S** tel que **SK** = 9,6 cm et **KI** = 10,4 cm.
2. Calculer **SI**.
3. Calculer la mesure de l'angle $\widehat{SKI}$. On donnera l'arrondi au degré.
4. En déduire au degré près la mesure de l'angle $\widehat{SIK}$
5. a) Où se situe le centre **O** du cercle circonscrit au triangle **SKI** ?
   b) Placer le point **O** sur la figure et tracer ce cercle. Calculer au degré près la mesure de l'angle $\widehat{SOI}$.

EXERCICE 2

Soit **BON** un triangle rectangle en **B** tel que **ON** = 10cm et $\widehat{BON} = 40°$
Parmi les affirmations ci-dessous, lesquelles sont vraies ?

a) $\widehat{BNO} = 60°$
b) **BO** = 10 × sin 50°
c) **BO** ≈ 10,5cm
d) **BO** = **BN**
e) **BN** = 10 × sin 40°
f) **BO** = **BN** × tan 40°

EXERCICE 3

1. En se plaçant à 15m d'un arbre, on peut voir celui-ci sous un angle de 56°. Quelle est la hauteur de l'arbre ?
2. A quelle distance de l'arbre faut-il se placer pour le voir sous un angle de :
   a) 28° ?
   b) 14° ?

EXERCICE 4

Partie A

La tour de Pise fait un angle de 86° avec le sol horizontal.
Lorsque le soleil est au zénith (rayons verticaux), la longueur de son ombre sur le sol est de 15m. On arrondira les différents résultats au décimètre près.

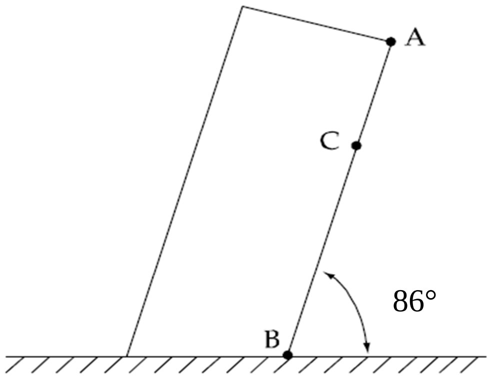
1. Calculer à quelle hauteur au-dessus du sol se trouve le point A de la tour ?
2. Calculer la distance **AB**.

Partie B

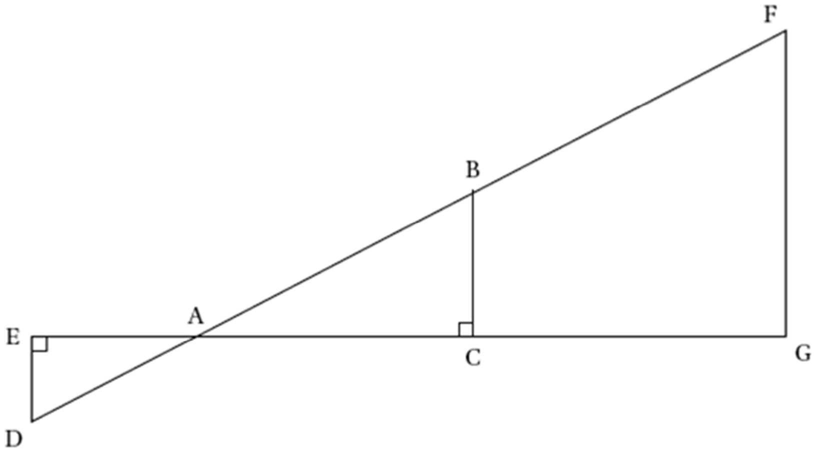
Voir page suivante pour une (belle !) photographie et un schéma.

Un touriste (point **C**) a gravi les $\frac{2}{3}$ de l'escalier de la tour. En se penchant, il laisse tomber « verticalement » son appareil photo.

1. Montrer que le point d'impact de l'appareil photo sur le sol se situe à ? m du pied de la tour (point **B**).
2. De quelle hauteur est tombé l'appareil photo ?



EXERCICE 5



On donne **AB** = 12 ; **AC** = 9,6 ; **AD** = 6,5 ; **BC** = 7,2 ; **BF** = 10,5 et **AG** = 18 (*Une unité de mesure des longueurs étant fixée*).

1. Calculer la valeur exacte de **AE**.
2. Calculer tan $\widehat{\mathbf{BAC}}$, puis donner la mesure de l'angle $\widehat{\mathbf{BAC}}$ arrondie au degré.
3. Démontrer que les droites **(FG)** et **(BC)** sont parallèles.

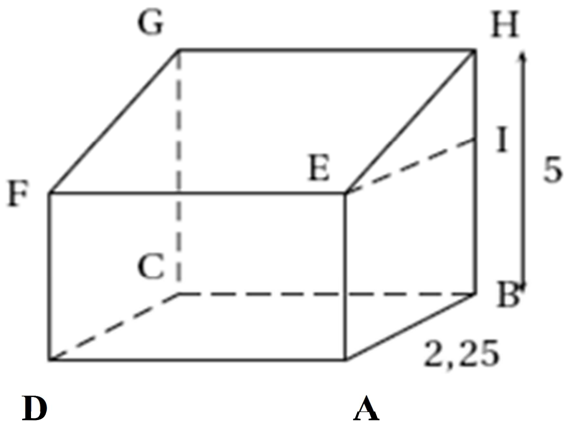
EXERCICE 6

Dans le jardin de sa nouvelle maison M. Durand a construit une terrasse rectangulaire qu'il désire recouvrir d'un toit.

Pour cela, il réalise le croquis ci-contre,
où l'unité de mesure des longueurs est le mètre.

- Le « sol » **ABCD** et le « toit » **EFGH** sont des rectangles.
- Le triangle **HIE** est rectangle en **I**.
- Le quadrilatère **IEAB** est un rectangle.
- La hauteur du sol au sommet du toit est **HB**.

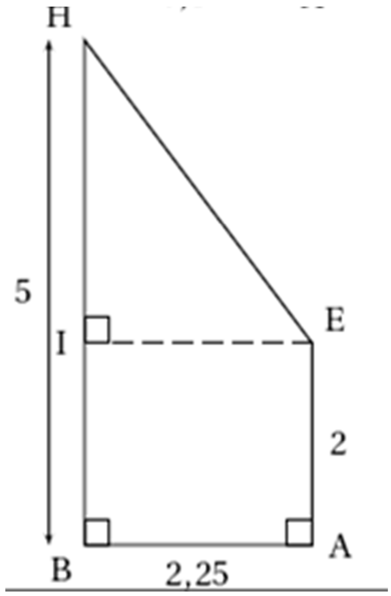
On donne : **AB** = 2,25 ; **AD** = 7,5 ; **HB** = 5.



Partie 1

On suppose dans cette partie que **AE** = 2.

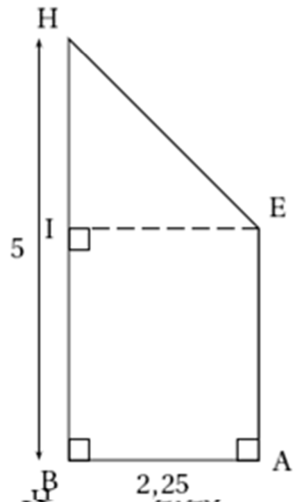
1. Justifier que **HI** = 3
2. Démontrer que **HE** = 3,75
3. Calculer au degré près la mesure de l’angle du toit avec la maison.



Partie 2

Dans cette partie, on suppose que :
$\widehat{\mathbf{IHE}}$ = 45°. On désire déterminer **AE**.

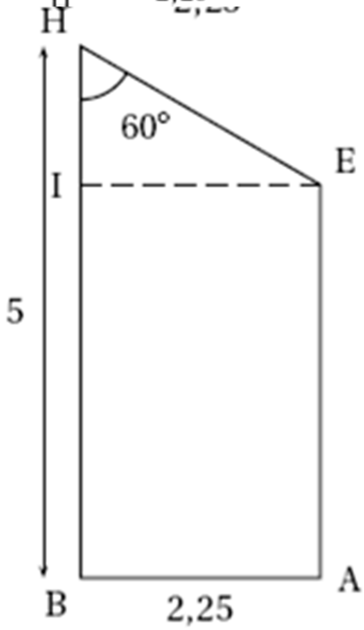
1. Quelle est la nature du triangle **HIE** dans ce cas ? Justifier.
2. En déduire **HI** puis **AE**.



Partie 3

Dans cette partie, on suppose que $\widehat{\mathbf{IHE}}$ = 60°.
On désire déterminer **AE**.

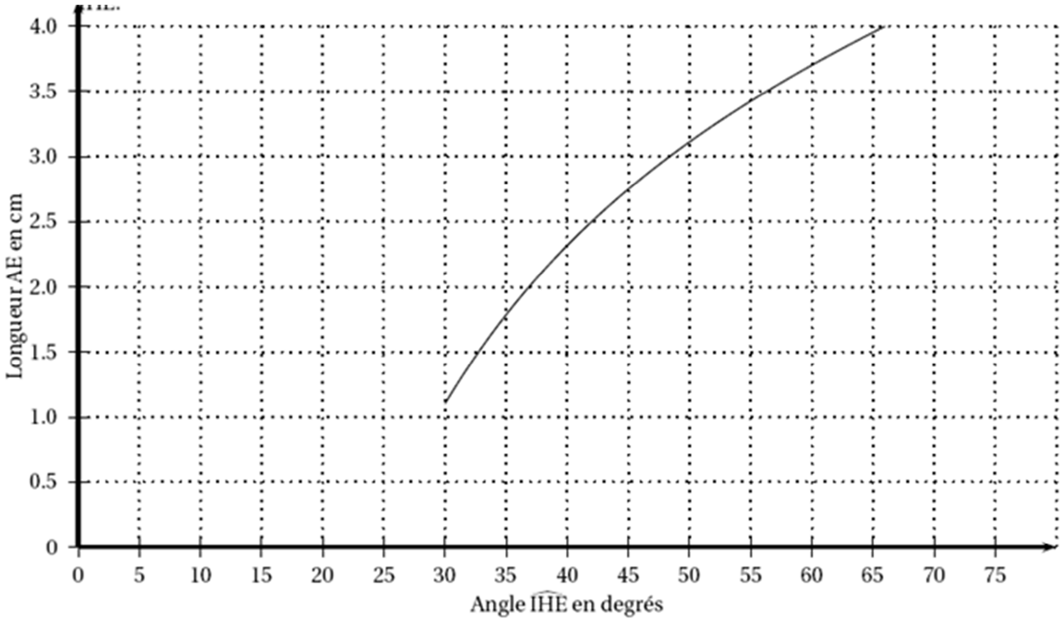
1. Déterminer la valeur arrondie au cm de **HI**.
2. En déduire la valeur arrondie au cm de **AE**.



Remarque. Pour ces trois parties, les figures ne sont pas à l’échelle. En fait, le point **I** varie sur le segment [**BH**] en fonction de l’angle $\widehat{\mathbf{IHE}}$.

Partie 4

La courbe ci-dessous représente la hauteur **AE** en fonction de la mesure de l’angle $\widehat{\mathbf{IHE}}$.



M. Durand souhaite que la hauteur **AE** soit comprise entre 3m et 3,5m. En utilisant le graphique, donner une mesure possible de l’angle $\widehat{\mathbf{IHE}}$.

EXERCICE 7

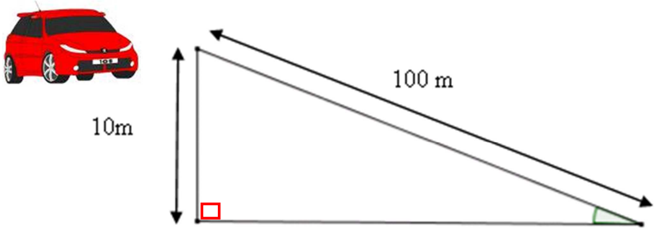
Partie 1

1. Voici un extrait d'un livre de code de la route :

A16 - Descente dangereuse

Je dois ralentir, rétrograder pour faire frein moteur, je dois freiner par pression intermit-tente : 10 % signifie qu’en parcourant 100 m, je descends de 10 m plus bas.

« *Chaque fois que vous parcourez 100 m, vous descendez de 10 m* » dit un automobiliste.

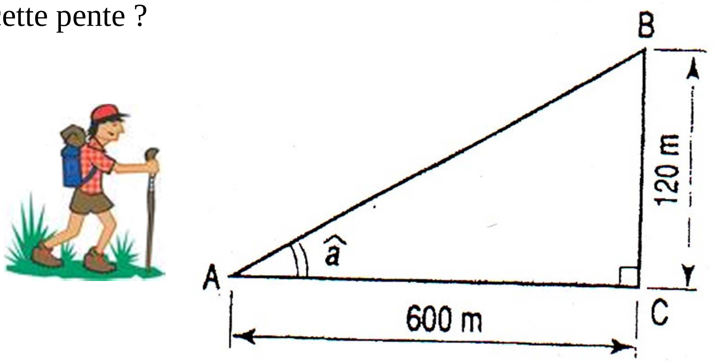


Combien mesure dans ce cas, l'angle entre la route et l'horizontale ?

2. Voici un extrait trouvé dans un guide pratique du randonneur :
« La pente entre deux points est le rapport entre la différence d'altitude de ces points et leur distance horizontale. Elle s'exprime par un pourcentage: par exemple, une pente de 8% signifie une différence d'altitude de 8 m pour une distance horizontale de 100 m ».

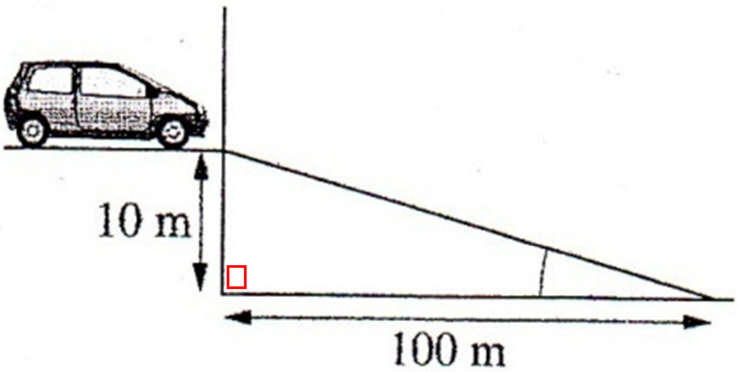
Soient deux points **A** et **B** déterminés, la différence d'altitude est de 120 m et la distance horizontale séparant les deux points est de 600 m.

Combien mesure l'angle ***â*** correspondant à cette pente ?



Partie 2

Voici le travail de Pierre pour calculer l'angle entre la route et l'horizontale.



a) Que penser de ce schéma ?
b) Calculer pour lui l'angle entre la route et l'horizontale.
c) Les deux méthodes de calcul donnent-elles des résultats vraiment différents ?
d) On veut comparer les deux méthodes (celle du « ***Code de la Route*** » et celle du « ***Guide*** »).

Recopier et compléter le tableau suivant :

Valeur de l'angle	5°	10°	13°	18°	20°	45°
Pente calculée par le sinus, en pourcentage						
Pente calculée par la tangente, en pourcentage						

En ce qui concerne les routes carrossables, est-il important de savoir si la pente a été calculée par le sinus ou par la tangente ? Pourquoi ?
Même question en ce qui concerne les chemins de randonnée.

EXERCICE 8 (d'après CRPE Orléans-Tours, 1998)

On pourra utiliser l'**ANNEXE 1** pour résoudre cet exercice.
Une unité de mesure des longueurs est fixée.
On constitue un puzzle en découpant un carré **ABHF** (de côté 8) en deux trapèzes rectangles **A'EFG** et **CA'GH** et deux triangles rectangles **AEC** et **ABC** (figure 1). On assemble les quatre pièces de manière à ce que le contour **AEQN** forme un rectangle (figure 2).

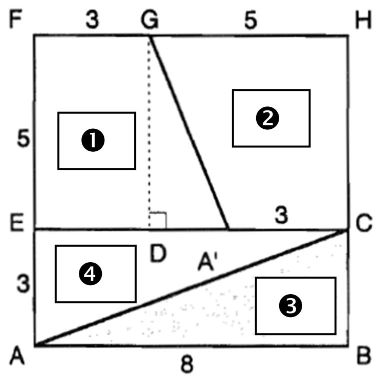


figure 1

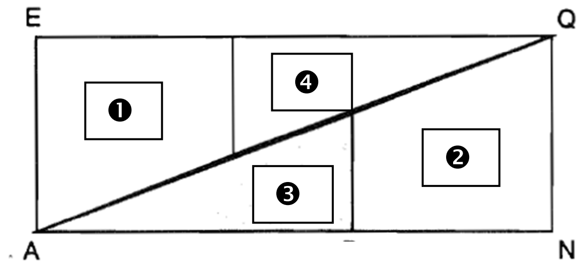
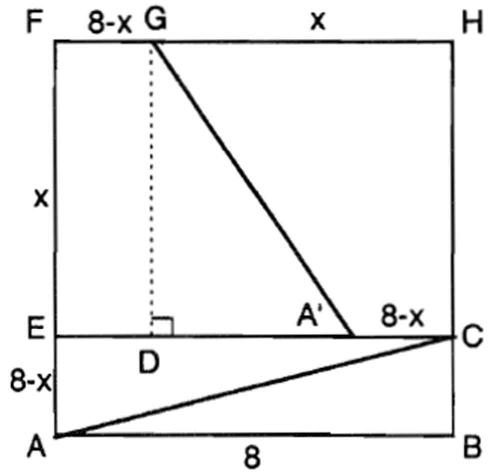


figure 2

1. Déterminer les longueurs **AN** et **NQ**.
Calculer alors les aires du carré **ABHF** et du rectangle **AEQN**.
Ce puzzle permet-il de démontrer que, dans ce cas, 64 = 65 ?

2. a) En se plaçant dans le triangle rectangle **ABC** de la figure 1, calculer tan $\widehat{\mathbf{BAC}}$.
On appelle **D** le projeté orthogonal du point **G** sur le segment **[EC]** (Voir la figure 1). Calculer alors tan $\widehat{\mathbf{DA'G}}$. Donner des valeurs décimales approchées des angles $\widehat{\mathbf{BAC}}$ et $\widehat{\mathbf{EA'G}}$, au demi-degré près.
b) En déduire pourquoi le rectangle **AEQN** n'est pas entièrement recouvert par les pièces du puzzle.

3. Dans cette question, on se propose de réaliser un découpage qui permet de recouvrir entièrement le rectangle **AEQN**.



Pour cela, on fait varier les emplacements des points **E**, **C**, **G** et **A'**, comme l'indique la figure 3 ci-contre. On pose **FE** = x (avec $0 < x < 8$).
De ce fait, on a les égalités suivantes :
CH = **GH** = **A'E** = x ;
FG = **A'C** = **AF** = **BC** = $8 - x$.

a) Calculer, en fonction de x, les nombres : tan $\widehat{\mathbf{ACB}}$ et tan $\widehat{\mathbf{DA'G}}$.
b) En déduire que le découpage convient si $x^2 + 8x = 64$.

c) Interpréter cette égalité en termes d'égalité d'aires.

4. a) Développer l'expression $(\boldsymbol{x} + 4)^2$.

En déduire que $\boldsymbol{x}^2 + 8\boldsymbol{x} = 64$ si et seulement si $\boldsymbol{x} + 4 = \sqrt{80}$ ou $\boldsymbol{x} + 4 = -\sqrt{80}$

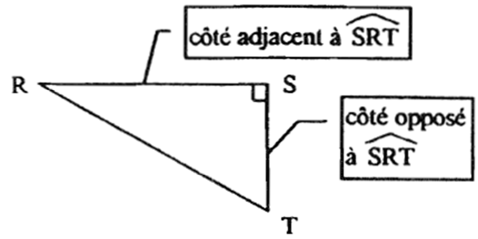
b) Montrer que la seule solution de la question 3 est : $\boldsymbol{x} = 8(\Phi - 1)$, où Φ désigne le nombre d'or égal à $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

ANNEXE 1

Tangente d'un angle aigu

Définition

Soit un triangle RST, rectangle en S.



$\tan \widehat{SRT} = \dfrac{ST}{SR} = \dfrac{\text{longueur du côté opposé à } \widehat{SRT}}{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{SRT}}$.

"tan $\widehat{SRT}$" se lit "tangente de l'angle $\widehat{SRT}$".

Propriété

Deux angles aigus ayant la même tangente ont même mesure.

Utilisation de la calculatrice (mode Degré)

1. Calcul de tan 72°

72 $\boxed{\tan}$ ou $\boxed{\tan}$ 72 provoquent l'affichage de 3.077683537 d'où $\tan 72° \approx 3{,}078$.

2. Calcul de l'angle $\hat{A}$ tel que $\tan \hat{A} = 0{,}28$.

0,28 $\boxed{\tan^{-1}}$ ou $\boxed{\tan^{-1}}$ 0,28 provoquent l'affichage de 15.64224646 d'où $\hat{A} \approx 15{,}5°$.

Utilisation d'une table donnant la tangente d'un angle en fonction de sa mesure en degrés

Degrés	Tangente tan
13	0,231
13,5	0,240
14	0,249
14,5	0,258
15	0,268
15,5	0,277
16	0,287
16,5	0,296
17	0,306
17,5	0,315
18	0,325
18,5	0,335
19	0,344
19,5	0,354
20	0,364
20,5	0,374
21	0,384
21,5	0,394
22	0,404
22,5	0,414
23	0,424

Degrés	Tangente tan
67	2,356
67,5	2,414
68	2,475
68,5	2,539
69	2,605
69,5	2,675
70	2,747
70,5	2,824
71	2,904
71,5	2,989
72	3,078
72,5	3,172
73	3,271
73,5	3,376
74	3,487
74,5	3,606
75	3,732
75,5	3,867
76	4,011
76,5	4,165
77	4,331

1. Calcul de tan 13,6°

$$13{,}5 < 13{,}6 < 14$$

$$\tan 13{,}5° < \tan 13{,}6° < \tan 14°$$

d'où

$$0{,}240 < \tan 13{,}6° < 0{,}249$$

ainsi $\tan 13{,}6° \approx 0{,}242$.

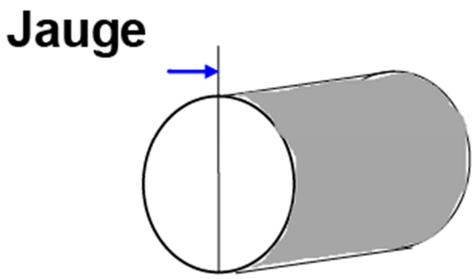
2. Calcul de l'angle $\hat{A}$ tel que $\tan \hat{A} = 4$.

$\tan 75{,}5° \approx 3{,}867$ et $\tan 76° \approx 4{,}011$

d'où $\hat{A} \approx 76°$.

EXERCICE 9 (d'après CRPE Rennes et Blois, années 2000 et plus)

Il s'agit dans cet exercice de graduer en litres la jauge d'une citerne.
Une citerne (destinée à contenir du fuel) de forme cylindrique a pour dimensions internes un diamètre de 2 mètres et une hauteur de 3,6 mètres. Elle est disposée couchée, son axe étant parfaitement horizontal.
Pour connaître le niveau du fuel dans la cuve, on dispose d'une jauge comme indiquée sur le schéma ci-dessous.
La jauge, verticale, suit un diamètre et est perpendiculaire à la surface du fuel.



1. Capacité de la cuve :
a. Exprimer, en m^3, la capacité exacte de la cuve.
b. Comment choisir la valeur approchée de π à utiliser pour déterminer cette capacité au litre près par défaut ?

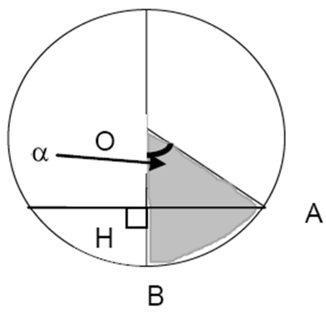
2. Calcul du volume de fuel pour un niveau de 50 cm indiqué par la jauge :
a. Déterminer la valeur en degrés de l'angle α correspondant à une hauteur de fuel de 50cm indiquée par la jauge.

Les rappels suivants sont **donnés :**

α en degrés	0°	30°	45°	60°	90°
Cosα	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
Sin α	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\text{Cos}\alpha = \frac{OH}{OA}$

$\text{Sin}\alpha = \frac{AH}{OA}$



b. Calculer en m^2 l'aire du secteur angulaire BOA (zone grisée) correspondant, que l'on notera $\boldsymbol{A_{50}}$.
c. En déduire la valeur exacte du volume de fuel en m^3 pour une jauge indiquant un niveau de 50cm. Donner ce volume au litre près par défaut.

3. Tracé de la courbe (*C*) représentative du volume de fuel (exprimé en litres**) en fonction du niveau indiqué par la jauge (exprimé en centimètres) :**

<u>Échelle</u> : 1 centimètre pour 20 cm sur l'axe des abscisses et 1 centimètre pour 600 litres sur l'axe des ordonnées.

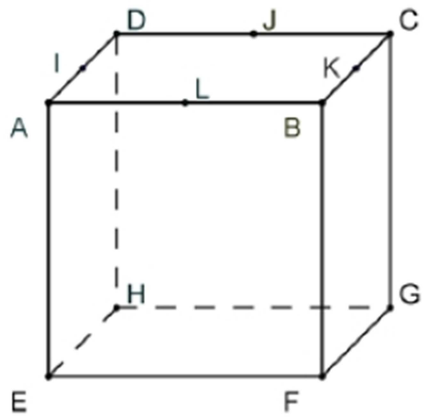
a. Tracer selon l'échelle indiquée la courbe représentative, pour une mesure de niveau variant de 0 à 100, en utilisant les données exactes fournies ci-dessous et la réponse à la question **2.c**.

Mesure Hauteur du niveau (unité : cm)	0	10	30	40	60	70	80	90	100
Mesure volume de fuel (unité : L) arrondi à l'unité près par défaut.	0	210	1065	1608	2853	3528	4224	4935	5655

b. Quelles considérations sur la forme de la citerne permettent de compléter le tracé précédent pour obtenir la courbe (***C***) en totalité ?
En précisant les instruments utilisés, décrire une construction géométrique permettant de compléter le tracé sur l'intervalle [100, 200].

EXERCICE 10

La figure **ABCDEFGH** ci-contre est une représentation en perspective cavalière d'un cube.



1. a) Donner deux droites parallèles.
   b) Donner deux droites sécantes.
   c) Quelle est la nature du triangle **FGC** ? Cocher la ou les bonne(s) réponses(s).

☐ Quelconque	☐ Isocèle	☐ Rectangle	☐ Equilatéral

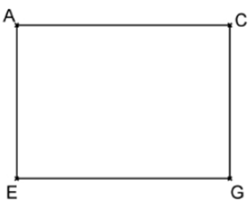
c) Quelle est la nature du triangle **AFC** ? Cocher la ou les bonne(s) réponses(s).

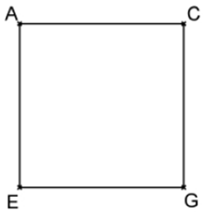
☐ Quelconque	☐ Isocèle	☐ Rectangle	☐ Equilatéral

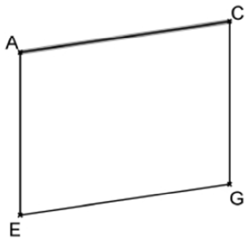
e) Les points **I**, **J**, **K** et **L** sont les milieux respectifs des arêtes [**AD**], [**CD**], [**BC**] et [**AB**]. Quelle est la nature du quadrilatère **IJKL** ? Cocher la bonne réponse.

☐ parallélogramme	☐ Losange	☐ Rectangle	☐ Carré

2. L'une des figures ci-dessous représente le quadrilatère **AEGC**. Cocher la bonne réponse.

☐ 

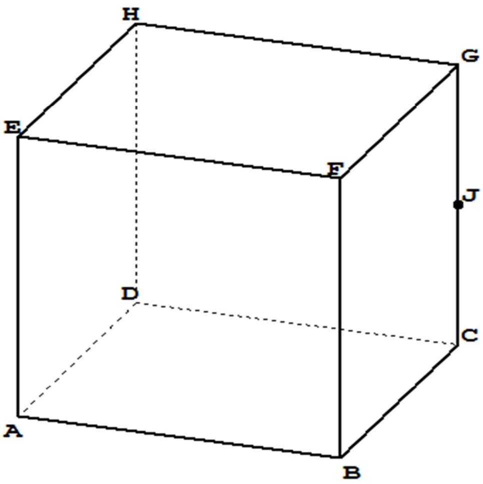
☐ 

☐ 

3. Sans faire de calculs, construire le triangle **BFG** en vraie grandeur, quand l'arête du cube mesure 3cm.

EXERCICE 11

Soit **ABCDEFGH** un cube d'arête 10cm, dont une représentation (*non en perspective cavalière*) est proposée ci-dessous. Le point **J** est le milieu du segment **[CG]**.



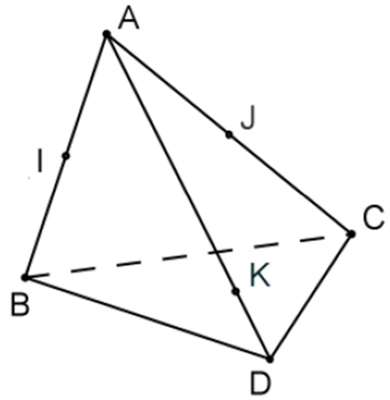
1. Compléter le tableau suivant par **oui** ou **non**.

Le triangle	Est-il rectangle ?	Est-il isocèle ?	Est-il équilatéral ?
DJH			
ACG			
AFC			
EHG			

2. Justifier vos affirmations concernant la nature des triangles **AFC** et **EHG**.

EXERCICE 12

On considère le tétraèdre **ABCD**. Le point **I** est le milieu du segment **[AB]**, le point **J** est le milieu du segment **[AC]**, le point **K** est le point du segment **[AD]** distinct de son milieu.

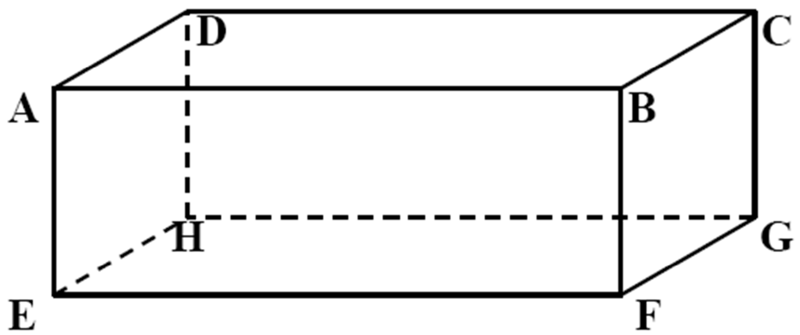


Compléter par oui ou par non le tableau ci-dessous.

Le point *I* est un point du plan:	(*ABD*)	(*BCD*)	(*ABC*)
Le point *K* est un point du plan:	(*ABD*)	(*BCD*)	(*ABC*)
Les droites (BC) et (IJ) sont:	sécantes	parallèles	dans un même plan
Les droites (AD) et (BC) sont:	sécantes	parallèles	dans un même plan
Les droites (BD) et (IK) sont :	sécantes	parallèles	dans un même plan

EXERCICE 13

On considère le dessin ci-dessous. Il représente, en perspective cavalière, un pavé droit.



Compléter chacune des sept phrases, *page suivante*, par l'une des quatre expressions :

- Dans la réalité uniquement ;
- Sur le dessin uniquement ;
- Dans la réalité et sur le dessin ;
- Ni dans la réalité et ni sur le dessin.

1. Les points **E**, **H** et **B** sont alignés.
2. Les (*supports des*) segments **[BF]** et **[BC]** sont perpendiculaires.
3. Les (*supports des*) segments **[EF]** et **[DC]** sont parallèles.
4. Les (*supports des*) segments **[DH]** et **[AB]** sont sécants.
5. Les segments **[BG]** et **[CF]** ont la même longueur et sont perpendiculaires.
6. La face (**ABCD**) est un parallélogramme, non rectangle.
7. La face (**ABFE**) est un rectangle.

Indication : on peut utiliser des couleurs en surlignant les objets sur lesquels on travaille.

EXERCICE 14

Construire un patron de chacun des solides suivants :

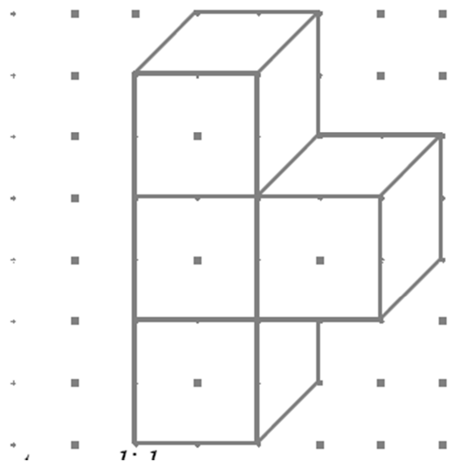
1. Un pavé droit de dimensions : 5,5cm, 4cm et 2,5cm.
2. Un prisme droit à base triangulaire, dont les dimensions de la base sont 5,6cm, 4,2cm et 3,3cm et la hauteur 7cm. (*Penser au célèbre Toblerone !*).
3. Un cylindre droit de hauteur 5cm et de rayon du disque de base 2cm.
4. Un cône de révolution de hauteur 6cm et de diamètre de disque de base 4cm.

Justifier les calculs en cas « d'obligation ».

EXERCICE 15 (Le tétracube)

On appelle tétracube, un solide obtenu par un assemblage de quatre cubes identiques collés face contre face.
On travaille dans un réseau pointé, voici une représentation d'un tétracube.

Le but de l'exercice est de les représenter **TOUS**.



Indication : il y a deux pavés et **?** autres solides non convexes.

Un point important : on dira que deux tétracubes sont différents si, par déplacement quelconque, ils ne peuvent pas être mis dans un même moule.

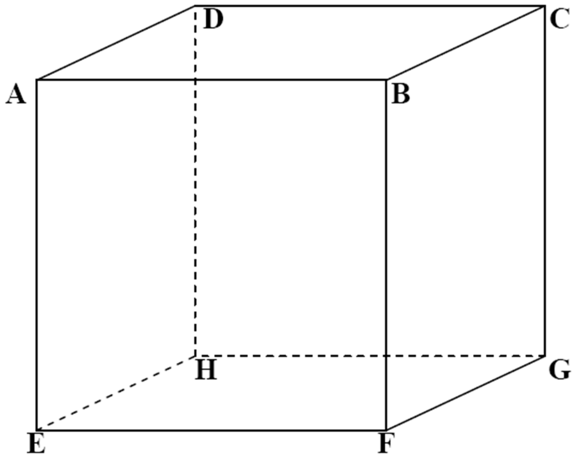
EXERCICE 16

Soit le cube ci-contre d'arête a.
En coupant ce cube suivant le plan (**FCH**), on obtient deux polyèdres ou deux solides. L'exercice ne concerne que le solide ne contenant pas le point G.

On l'appelle le solide $\boxed{S}$.

Questions :

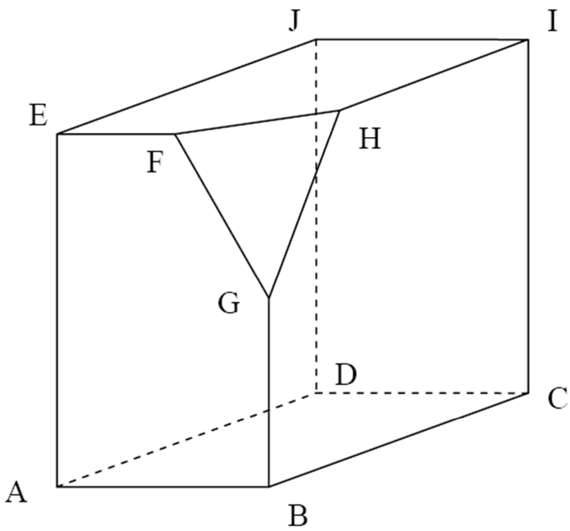
1. Donner le nombre d'arêtes et de sommets de $\boxed{S}$.
2. Nommer chacune des faces triangulaires de $\boxed{S}$.
   Préciser la nature de chacun des triangles, justifier.
3. Calculer le volume de $\boxed{S}$.

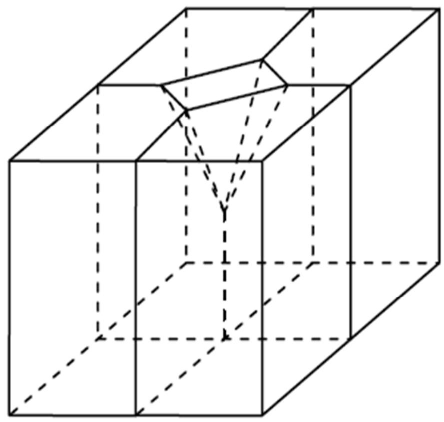


Indication.
volume pyramide = $\frac{1}{3}$ × aire(base) × hauteur.
Encore un rappel.

EXERCICE 17 (d'après CRPE 2010)

le solide **ABCDEFGHIJ** est un parallélépipède rectangle tronqué, tel que :
EA = 4cm, **AB** = 2cm, **BC** = 3cm, **EF** = 1 cm, **BG** = 2cm et **HI** = 2cm.





1. a) Quelle est la nature du triangle **FGH** ? Justifier la réponse.
   b) Calculer les mesures des longueurs des côtés du triangle **FGH**. Donner les valeurs exactes puis les valeurs arrondies au dixième de millimètre.

2. En se servant de la règle graduée, de l'équerre et du compas, tracer un patron du solide **ABCDEFGHIJ**. (Laisser les traits de construction apparents).

3. Calculer le volume du solide **ABCDEFGHIJ**. (Donner la valeur exacte puis la valeur arrondie au millimètre cube).

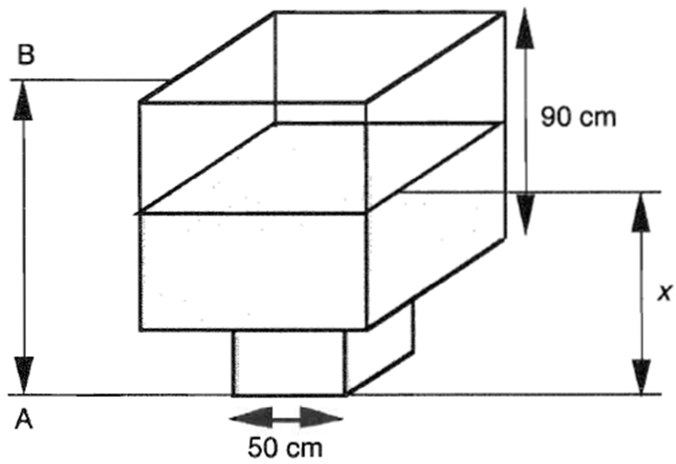
4. Quatre parallélépipèdes tronqués identiques à une symétrie près, au précédent sont assemblés pour fabriquer le solide ci-contre.
   Quelle est la nature du solide correspondant à la partie évidée du parallélépipède rectangle obtenu ? Justifier.

EXERCICE 18 (d'après CRPE Besançon, 2003)

1. On augmente la longueur d'un rectangle de son cinquième et on diminue sa largeur de moitié. Par quelle fraction est multipliée l'aire du rectangle ?
   Cette aire a-t-elle augmentée ou diminuée ? De quel pourcentage ?

2. On augmente la longueur d'un rectangle de son quart et on diminue la largeur de son quart. L'aire du rectangle est-elle modifiée ? justifier votre réponse.

EXERCICE 19 (d'après CRPE Limoges, 1999)



Une cuve est formée de deux cubes superposés qui communiquent entre eux. L'arête du cube supérieur (le grand cube) mesure 90cm. L'arête du cube inférieur (le petit cube) mesure 50cm. Cette cuve contient un liquide. On note x la hauteur de liquide dans la cuve. On note $\mathbf{V}(x)$ le volume en litres du liquide dans la cuve lorsque la hauteur est x (x étant exprimé en cm).

1. Calculer $\mathbf{V}(30)$, $\mathbf{V}(51)$ et $\mathbf{V}(90)$.

2. Exprimer $\mathbf{V}(x)$ en fonction de x.

3. Construire sur la feuille de papier millimétré mise à votre disposition une représentation graphique de la fonction qui à x associe $\mathbf{V}(x)$.

4. Sur un segment **[AB]** on marque une graduation indiquant, en litres, le volume du liquide entreposé dans la cuve. Représenter cette graduation à l'échelle 1/10.

EXERCICE 20 (d'après CRPE Aix-Marseille, 2004)

Le graphique page suivante représente l'évolution de la vitesse d'un parachutiste lors d'un saut.

1. Pendant la chute sur quel intervalle de temps la vitesse du parachutiste est-elle constante ?

2. Quels sont les coordonnées du point correspondant à l'ouverture du parachute ?

3. Décrire l'évolution de la vitesse du parachutiste entre les points d'abscisses 3s et 6s.

4. Quelle distance le parachutiste parcourt-il pendant la deuxième moitié du temps de sa chute ?

5. Sachant que la distance totale parcourue par le parachutiste est de 115 mètres, donner une valeur arrondie au centième de sa vitesse moyenne de chute exprimée en km/h.