

Master MEEF, M1, Mathématiques.
Quelques exercices pour ne pas perdre la main...

*Note de **PW** : pour une fois, les exercices proposés ne sont pas corrigés en détails !
 Mais, quelques indications devraient faire avancer les résolutions... Hypothèse ?*

EXERCICE 1

D'après sujet CRPE. Une automobile hybride utilise deux sources d'énergie : du carburant fossile et de l'énergie électrique que la voiture produit elle-même en roulant. La consommation en carburant d'un modèle donné de ce type d'automobile est la suivante : 5L/100km en ville et 4,2L/100km en zone mixte.

En une semaine, une automobile hybride a parcouru au total 350 kilomètres dont x kilomètres en ville et y kilomètres en zone mixte. Elle consomme pendant cette semaine 16,3L de carburant.

1. Déterminer le nombre de kilomètres que cette automobile a effectué en ville et en zone mixte.

2. Un véhicule classique fait le même trajet en une semaine que l'automobile hybride. Ce véhicule classique parcourt 8km par litre de carburant en ville et 10km par litre de carburant en zone mixte. Calculer l'économie réalisée par l'auto mobile hybride (en volume de carburant).

Indication : pour la première question ; on peut modéliser algébriquement les informations, ce qui peut donner un système de deux équations à deux inconnues. Par exemple : distance totale = 350 = distance en ville + distance en zone mixte et consommation totale = 16,3 = distance en ville \times consommation en ville + distance en ville \times consommation en zone mixte. Ce qui peut donner. Première équation : $350 = x + y$ et deuxième équation : $16,3 = x \times 5/100 + y \times 4,2/100$. Système à résoudre... Pour la deuxième question, attention aux « infos » : on donne « 8km parcourus avec un litre en ville et 10 km parcourus avec un litre en zone mixte... » Comme on vient de déterminer les distances parcourus en ville et en zone mixte ...

EXERCICE 2

Dans une ville, lors d'une élection, trois listes sont en présence : listes **A**, **B** et **C**. Les résultats, en nombre de voix obtenues et en pourcentage des suffrages exprimés figurent dans le tableau ci-dessous dont trois cases ont été effacées. Reconstituer alors les cases manquantes. Justifier.

	Nombre de voix obtenues	Pourcentage
Liste A	2362	
Liste B		25%
Liste C	5522	

Indication : la somme S ($2362 + 5522$) représente 75% des suffrages exprimés ; puisque S représente 75% du nombre total de votants, on peut facilement déterminer ce nombre, puis celui qui correspond à 25% des suffrages exprimés. Terminer alors les calculs dans la colonne « Pourcentage ».

EXERCICE 3

D'après sujets « 0 » CRPE du MEN. On s'intéresse à la division euclidienne par 26 dans l'ensemble des entiers naturels. On peut alors classer les entiers naturels selon la valeur de leur reste dans cette division euclidienne. Ainsi, on va appeler et noter **E0** l'ensemble des entiers dont le reste vaut 0 ; **E1** l'ensemble des entiers dont le reste est 1 ; **E2** l'ensemble des entiers dont le reste est 2, and so on, jusqu'où ?...

1. Combien d'ensembles **En** différents obtient-on ? Justifier.

Indication : quels sont les restes possibles dans la division euclidienne d'un entier par 26 ? Il y en a 26. Du reste égal à 0 à celui égal à 25. Reste égal à 0 : on a les multiples de 26, c'est l'ensemble **E0** ; reste égal à 1, c'est l'ensemble **E1** : on a les multiples de 26 + 1, and so on... Conclure alors sur le nombre d'ensembles **En** qu'on peut obtenir.

2. Prouver que si un entier **p** appartient l'ensemble **En**, alors l'entier (**p** + 26) est dans le même ensemble **En**. *Indication* : la division euclidienne de **p** par 26 s'écrit : $p = 26 \times q + r$, avec $r \leq 25$. Ecrire la nouvelle égalité obtenue en effectuant la division euclidienne de (**p** + 26) par 26. On a : $(p + 26) = 26 \times q + r + 26$, avec $r \leq 25$, c'est-à-dire : $(p + 26) = 26 \times (q + 1) + r$ avec $r \leq 25$. Conclure alors que **p** et (**p** + 26) ont le même reste dans la division euclidienne par 26, d'où...

3. A quels ensembles appartiennent les entiers suivants : 456, 261, 456 + 261 et 456 × 261 ? Justifier.

Indication : facile ! On trouve les résultats suivants : 456 appartient à **E14**, car son reste vaut 14 (effectuer la division et écrire l'égalité obtenue) ; 261 appartient à **E1**, la somme appartient à **E15** et le produit appartient à **E14**...

4. Montrer que si un entier **a** appartient à **E10** et un autre entier **b** appartient à **E23**, alors (**a** + **b**) est dans **E7** et **a** × **b** est dans **E22**.

Indication. Traduire le fait que **a** est dans **E10** : $a = 26 \times q + 10$; idem pour **b** : on a : $b = 26 \times k + 22$. D'où (**a** + **b**) = ... et **a** × **b** = (calculs un peu longs !)... Conclure...

EXERCICE 4

En mathématiques, un nombre palindrome est un entier naturel dont l'ordre des chiffres reste le même qu'on le lise de gauche à droite ou de droite à gauche. Par exemple les nombres 2882 et 19591 sont des palindromes.

Montrer que le nombre 1221 est aussi un palindrome dans son écriture en base cinq. Tous les palindromes en base dix sont-ils des palindromes en base cinq ?

Montrer que $(31513)_{\text{huit}}$ (écriture en base huit) est aussi un palindrome en base dix.

Soit un palindrome **P** de quatre chiffres (écrit en base dix). On permute le chiffre des milliers avec celui des centaines et le chiffre des unités avec celui des dizaines dans ce palindrome, on obtient alors un nombre **P'**. Quelles sont les nombres **P** tels que **P'** soit un palindrome et $P - P' = 2673$?

Indication pour presque tous les items : convertir les nombres donnés d'une base dans l'autre et vérifier, si dans la base considérée, le nombre est effectivement un palindrome.

Indication pour le dernier item. Les nombres **P** tels que **P'** soit un palindrome et $P - P' = 2673$.

Un palindrome de quatre chiffres s'écrit \overline{abba} de manière générale avec **a** un entier compris entre 1 et 9 et **b** un entier compris entre 0 et 9.

Attention de ne pas se perdre avec les \overline{abba} , sinon, c'est Waterloo, after midnight, hihhi...

On cherche donc un palindrome de quatre chiffres tel que : $\overline{abba} - \overline{baab} = 2673$.

Ou encore : $\overline{abba} = \overline{baab} + 2673$

En décomposant, on obtient : $1000a + 100b + 10b + a = 1000b + 100a + 10a + b + 2673$

Donc : $891a = 2673 + 891b$. Or $2673 = 3 \times 891$; D'où : $a = b + 3$.

Les différents cas à envisager sont les suivants :

- si $b = 0$ alors $a = 3$, ce qui n'est pas possible car la permutation des chiffres dans 3003 conduit à 330 qui n'est pas un palindrome ; - si $b = 1$ alors $a = 4$; - si $b = 2$ alors $a = 5$; - si $b = 3$ alors $a = 6$; - si $b = 4$ alors $a = 7$; - si $b = 5$ alors $a = 8$; - si $b = 6$ alors $a = 9$; - si $7 \leq b$ alors $a \geq 10$ ce qui n'est pas possible.

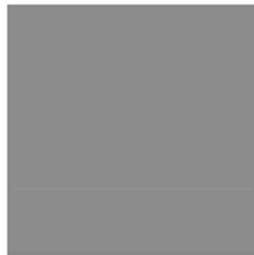
Les solutions possibles sont : 9669 ; 8558 ; 7447 ; 6336 ; 5225 ; 4114.

EXERCICE 5

D'après sujet CRPE. On trouve sur Internet, sous le nom ce « **Mind Reader** », un « jeu » dont la page d'accueil est reproduite ci-dessous, avec les règles du « jeu », le carré grisé où apparaissent les symboles et la grille du « jeu ».

Règles du « jeu »

1. Pense à un nombre à deux chiffres (par exemple : 53).
2. Soustrais du nombre pensé chacun de ses chiffres (par exemple : $53 - 5 - 3$).
3. Cherche dans la liste le résultat de l'opération et garde en mémoire le symbole correspondant.
4. Concentre-toi très fort sur le symbole. Clique sur le carré gris ci-dessous et regarde le résultat.



De façon dynamique, évidemment !!!, l'ordinateur affiche le symbole trouvé dans le carré ci-dessus !

0 ☺	1 ♀	2 *	3 ♀	4 ♀	5 ©	6 ▲	7 ♀	8 *	9 ☺
10 ♀	11 🎵	12 ∅	13 ☺	14 *	15 ♀	16 ♦	17 ®	18 ☺	19 ▲
20 ♣	21 ♀	22 ▼	23 ∞	24 ♦	25 ®	26 ♥	27 ☺	28 ∅	29 *
30 ♠	31 ♦	32 ☀	33 ▼	34 §	35 ☀	36 ☺	37 ∞	38 ▼	39 ▲
40 ©	41 ▲	42 ☺	43 ▲	44 ♣	45 ☺	46 ♠	47 🎵	48 ∅	49 ♦
50 ♦	51 ♣	52 ♀	53 ☀	54 ☺	55 ©	56 ♥	57 ☀	58 ▲	59 ▼
60 ▲	61 *	62 ∞	63 ☺	64 §	65 ▲	66 *	67 ♣	68 ♣	69 ∅
70 ♦	71 ♠	72 ☺	73 ♠	74 ♥	75 *	76 ▼	77 ♥	78 ©	79 ♣
80 🎵	81 ☺	82 ♦	83 ♣	84 ∅	85 ®	86 §	87 ▲	88 ▲	89 🎵
90 ☺	91 ☀	92 ♦	93 ▼	94 ♦	95 ♦	96 ∞	97 ▲	98 ♠	99 €

Pauline joue trois fois de suite à ce jeu. Chaque fois, l'ordinateur « devine » le bon symbole : ☺.

Le logiciel semble infallible. L'est-il vraiment ? Justifier la réponse.

Indication : facile. Décomposer canoniquement un nombre à deux chiffres, appliquer la règle du « jeu » et ... on tombe, à quelque petite chose près, sur un multiple de neuf. Observer alors attentivement les symboles !!! Yes !

EXERCICE 6

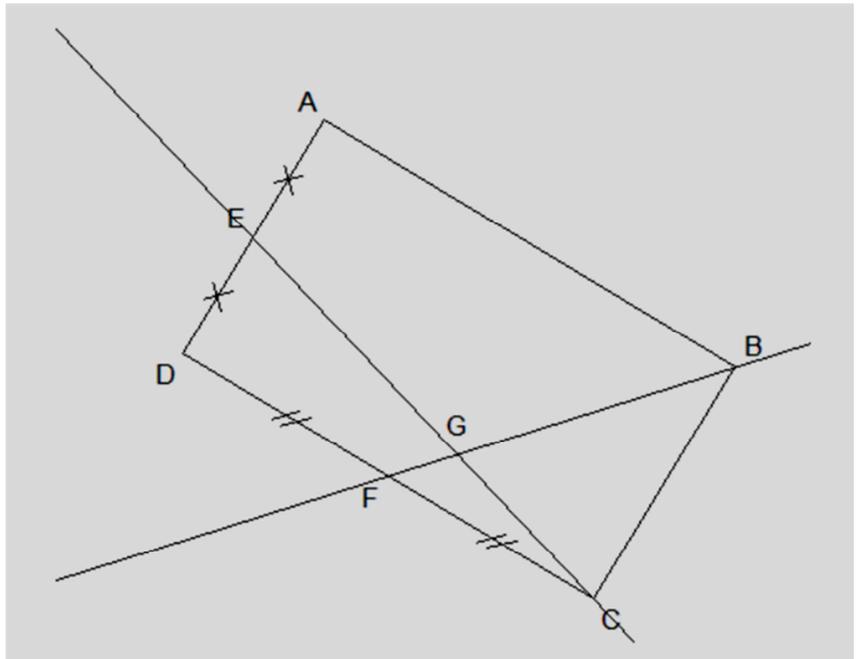
D'après sujet CRPE.

Le quadrilatère **ABCD** est un rectangle.

Les points **F** et **E** sont les milieux respectifs des côtés **[CD]** et **[AD]**.

Le point **G** est l'intersection des droites **(EC)** et **(FB)**.

Cf. figure ci-contre



1. Exprimer l'aire du triangle **DEC** en fonction de l'aire du rectangle **ABCD**.

2. Justifier que l'aire du quadrilatère **EDFG** est égale à celle du triangle **BCG**.

3. Application numérique : on donne **AB** = 12cm, **AD** = 5cm. Calculer les aires de **EDFG**, **EABG**, **BCG** et **CFG**. On demande les valeurs exactes.

Quelques indications :

1. Aire (DEC) = 1/4 × aire (ABCD). Pourquoi ? Facile : « pavage » du rectangle et partage en quatre triangles identiques.

2. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, aire (BCF) = 1/4 × aire (ABCD). Donc, il y a égalité des aires, on en déduit l'égalité demandée.

3. Calculs. A produire !!! Juste un truc : valeurs exactes, donc, on « garde » la ou les racines carrées, on ne va pas chercher des km de décimales, sauf quand par chance, cela « tombe » juste...