Du côté des **GRANDEURS**, avec, *en plus*, des exercices « type » **CRPE**

EXERCICE 1 : quelques QCM

CONSIGNE. Trouver la bonne réponse et justifier

➢ Un robinet mal fermé laisse tomber une goutte d'eau toutes les deux secondes. Si on considère que 15 gouttes représentent une capacité de 1cL, quelle est, en cL, la capacité d'eau « gaspillée » en une minute ?

A) 0,5	**B)** 1	**C)** 1,5	**D)** 2	**E)** 3

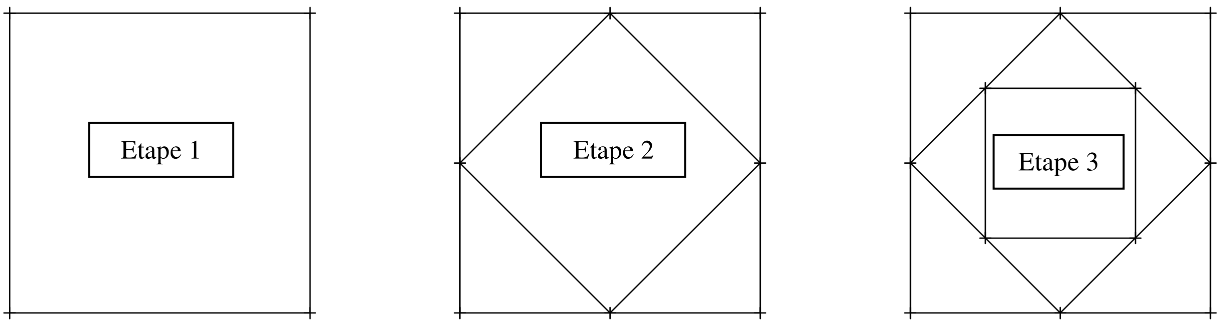
➢ Si l'on répartissait équitablement les douze millions de kilomètres carrés de terres émergées entre les sept milliards d'humains, chacun bénéficierait d'une surface rectangulaire équivalente à environ :

A) $17\text{m} \times 100\text{m}$	**B)** 1,7hectare	**C)** $1{,}7\text{km}^2$	**D)** 170m^2	**E)** 17hm^2

➢ Un pot de confiture plein au tiers a une masse de 160 grammes. Quand il est plein au quart, il a une masse de 140 grammes. Quelle est la masse du pot plein de confiture ?

A) 560g	**B)** 480g	**C)** 320g	**D)** 240g	**E)** 180g

➢ On se propose de construire des carrés imbriqués les uns dans les autres en suivant le procédé de construction suivant : à partir d'un carré initial Etape 1, on construit un nouveau carré qui a pour sommets les milieux des côtés du carré initial Etape 2. On utilise alors le dernier carré tracé pour construire un nouveau carré en suivant le procédé décrit précédemment Etape 3.
Voici trois schémas qui illustrent ce procédé de construction :

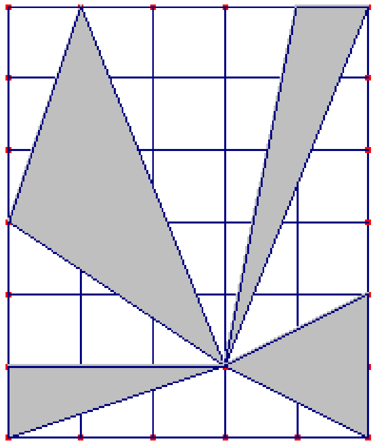


En sachant que le côté du carré tracé à l'étape 1 a pour longueur 75m, quel est le périmètre du carré central construit lors de l'étape 15 ?

A) $\frac{75}{32}\text{m}$	**B)** $\frac{75}{2^7}\text{m}$	**C)** $\frac{75\sqrt{2}}{64}\text{m}$	**D)** $\frac{75}{32\sqrt{2}}\text{m}$	**E)** $\frac{75\sqrt{2}}{32}\text{m}$

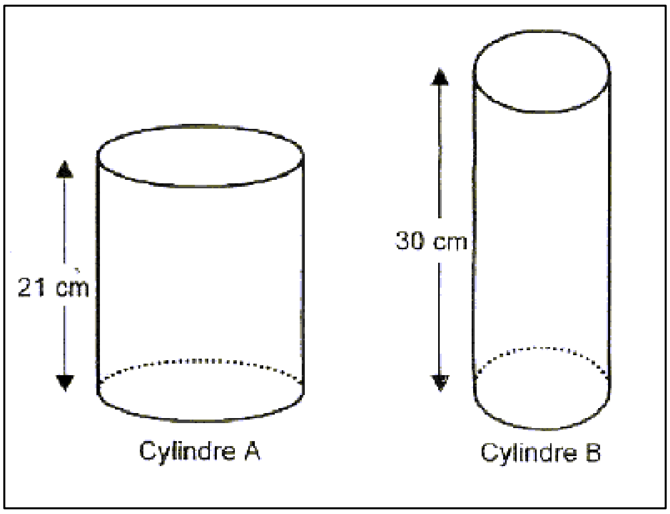
➢ L'aire du rectangle quadrillé est de 30 carreaux. Quelle est l'aire de la surface grisée ?

A) 10 carreaux	**B)** 11,5 carreaux
C) 13 carreaux	**D)** 14,5 carreaux



➢ On s'intéresse à une feuille normalisée de format A4. On peut l'enrouler de deux façons, afin d'obtenir deux cylindres droits : dans le sens de la longueur (appelé le « cylindre A ») et dans le sens de la largeur (appelé le « cylindre B »). On compare les deux volumes intérieurs ainsi délimités.

Question : laquelle des affirmations ci-dessous est vraie ?



*Réponse **1*** : les deux volumes sont égaux.	*Réponse **2*** : on ne peut pas savoir : il faut les dimensions.	*Réponse **3*** : volume du « cylindre A » > volume du « cylindre B ».	*Réponse **4*** : volume du « cylindre B » > volume du « cylindre A ».

EXERCICE 2

Voici les masses volumiques de différentes essences de bois : le bois d'Azobé a une masse volumique de 0,86g/cm^3, le bois de Pin a une masse volumique de 0,55g/cm^3 et le bois de Charme a une masse volumique de 0,75g/cm^3.

1) On appelle **C** un cube en bois de 5cm d'arête ayant une masse de 107,5g. Ce cube est-il en bois d'Azobé ou en bois de Pin ?

2) Indiquer comment retrouver la réponse à la question **1)**, en calculant d'abord la masse d'un cube de même volume en bois de Charme.

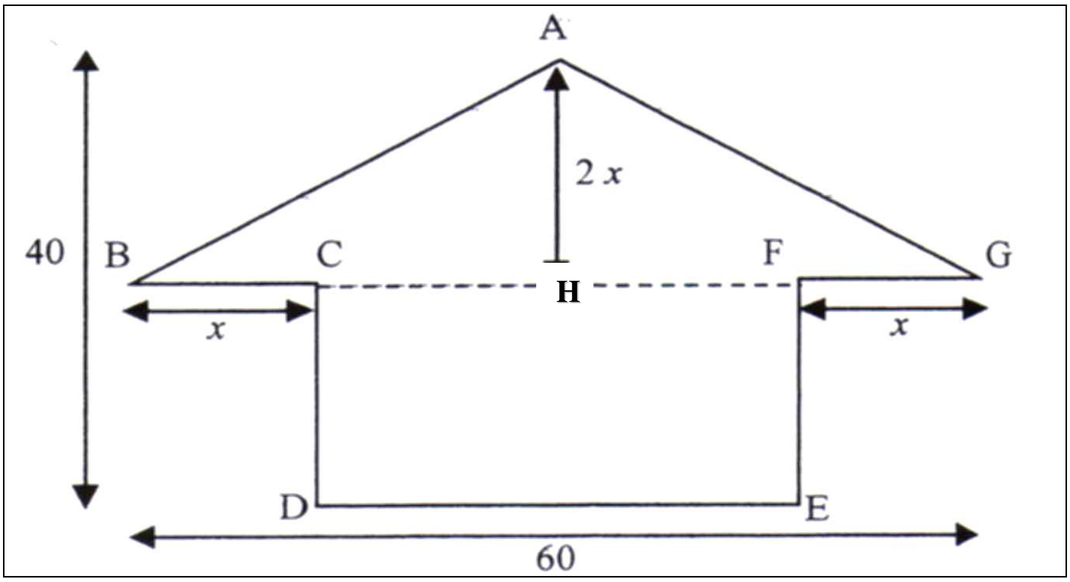
3) a) Si on triple l'arête du cube **C**, la masse triple-t-elle ?
b) Si on augmente de 3 cm l'arête du cube **C**, de combien augmente la masse ?

4) a) A partir de copeaux de bois, on fabrique des plaques en aggloméré contenant 20% d'Azobé, 40% de Pin et 40% de Charme. Calculer la masse volumique de cet aggloméré.
b) Ces plaques ont une forme rectangulaire de 1,8m par 0,6m, avec une épaisseur égale à 2cm. Calculer alors la masse, en gramme, d'une telle plaque.

Rappel : La masse volumique d'un objet (*homogène*) est égale au rapport de sa masse par son volume.

EXERCICE 3

Une entreprise désire sponsoriser une course. Elle souhaite que son logo apparaisse sur toutes les portières des voitures de la course. Son logo a la forme et les dimensions ci-dessous (*Les longueurs sont exprimées en cm*).



Description. Le triangle **ABG** est isocèle en **A**. Le quadrilatère **CFED** est un rectangle.
Les points **C** et **F** sont deux points du segment **[BG]** tels que : **BC** = **FG** = $\boldsymbol{x}$.
Le point **H** est le pied de la hauteur issue de **A** du triangle **ABG** et **AH** = **2$\boldsymbol{x}$**.

Afin de limiter les coûts, on cherche la valeur de $\boldsymbol{x}$ donnant une aire minimale pour le logo.

1. On note f la fonction qui à x associe le nombre $f(x)$ désignant l'aire du logo en cm².

a) Quel est le domaine de définition de la fonction f ? Par cette question, on demande de trouver les valeurs de x pour lesquelles la fonction f est définie, c'est-à-dire les valeurs pour lesquelles il est possible de calculer $f(x)$.

b) Montrer que $f(x) = 4x^2 - 140x + 2\,400$.

2. On trouvera, en **ANNEXE**, une représentation graphique de la fonction f.

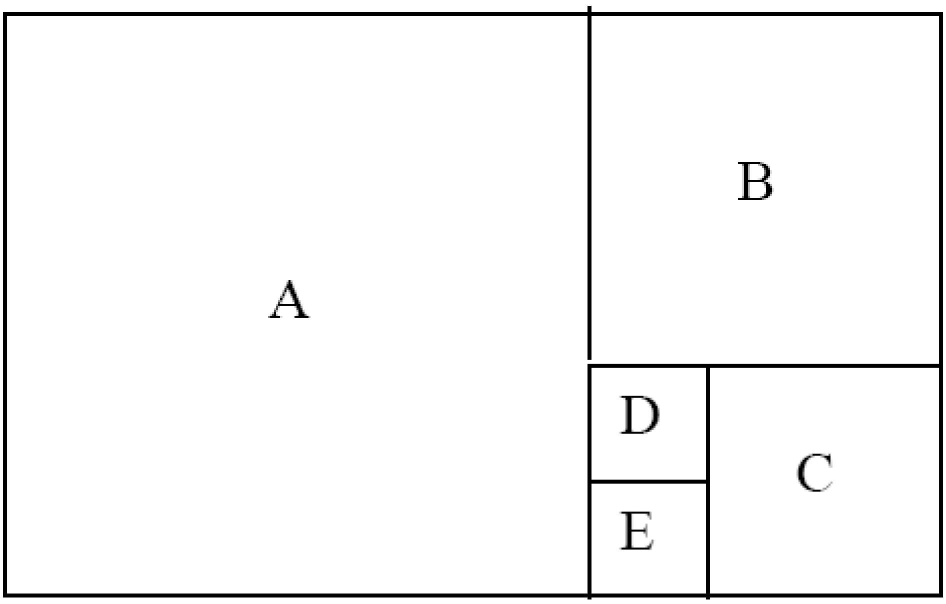
a) Déterminer graphiquement les valeurs de x pour lesquelles l'aire du logo est inférieure à 1400cm².

b) Quel est le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle **[0 ; 20]** ? (*Se souvenir des cours du lycée !!! Ou se reporter au corrigé !*).

c) Déterminer graphiquement la valeur de x pour laquelle l'aire du logo est minimale. Donner graphiquement une valeur approchée de la valeur de cette aire, puis déterminez une valeur exacte de cette aire par le calcul.

3. Si x = 20cm, quelle est la nature du logo ? Le représenter. *(Échelle. Indication : choisir 1cm pour représenter 10cm)*

EXERCICE 4



La figure ci-dessus est un rectangle découpé en cinq carrés **A**, **B**, **C**, **D** et **E**.

1. On appelle a, b, c, d et e les longueurs respectives des côtés de ces carrés. Exprimer alors les longueurs a, b, d et e en fonction de c.

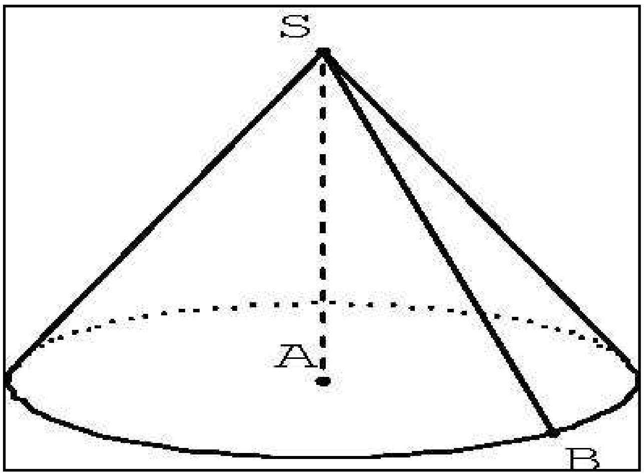
2. On suppose que le rectangle représente une feuille de papier d'aire 3610 cm². Calculer c, puis trouver les dimensions de la feuille.

3. On suppose que le rectangle représente une plaque métallique homogène. La masse de la pièce **B** est 100 grammes. Calculer la masse de la pièce **A**, à un décigramme près.

4. On suppose que le rectangle représente la vue de dessus d'un assemblage de cinq cubes. Le volume du cube **A** est 2m³. Calculer le volume du cube **C**. Donner la réponse en dm³.

EXERCICE 5

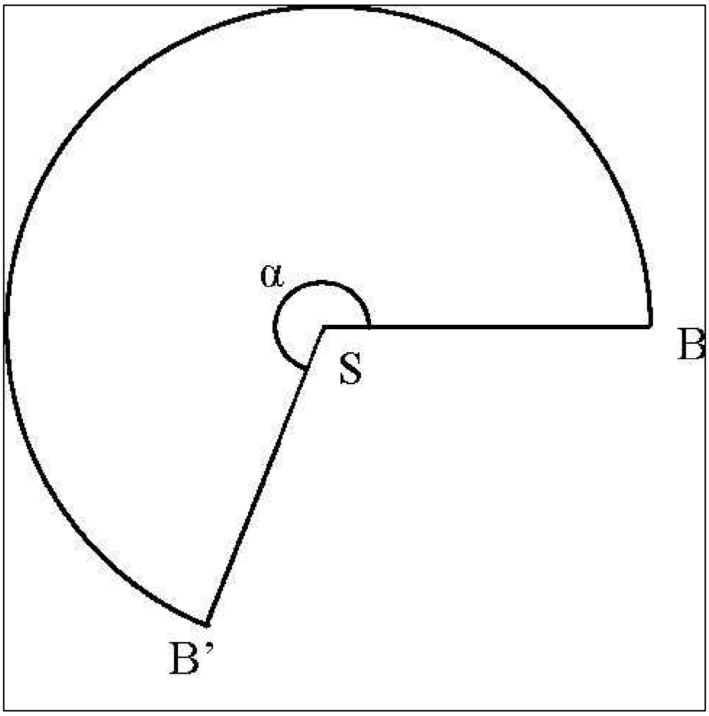
Une bougie a la forme d'un cône de révolution de sommet **S**. Sa base est un disque de centre **A** et de rayon 14 cm.
On donne **SB** = 21 cm.



Pour traiter cet exercice, il est nécessaire de connaître quelques formules de calcul de volumes : elles ne sont pas données ici, ce qui oblige à les apprendre ou à les « retrouver » !

1. a) Calculer la valeur exacte de la hauteur de la bougie. En donner une valeur approchée au mm près.
1. b) Calculer en cm^3 la valeur exacte du volume de la bougie et en donner une valeur arrondie au mm^3.
1. c) Combien de bougies de ce type peut-on fabriquer avec 20 litres de cire ?

2. Pour fabriquer ces bougies, on construit un moule en papier qui est un cône de mêmes dimensions que les bougies. La figure ci-dessous représente un patron de ce moule. (*La figure n-dessous n'est pas à l'échelle*).



a) Calculer la longueur exacte de l'arc de cercle BB' (d'angle α).
b) Calculer l'angle α, en degré.

3. En utilisant le même moule en papier, on décide de fabriquer des bougies bicolores rouges et blanches. On procède de la manière suivante :

- on remplit le moule (pointe en bas) de cire blanche jusqu'à mi-hauteur,
- on complète avec de la cire rouge.

Quelle est la proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie ?

EXERCICE 6

Cet exercice comporte deux questions indépendantes.

1. Des petites briques de jus d'orange d'une contenance de 20cL ont la forme de pavés droits dont la base a pour dimensions 4cm et 6cm.
a) Calculer la hauteur ***h*** d'une de ces briques.
On donnera une valeur approchée de ***h*** à 1mm près par excès.
b) Un magasin propose ces briques au prix de 2,89€ le lot de six.
Calculer le prix d'un litre de jus d'orange, arrondi au centime.

c) Lors d'une opération promotionnelle le magasin propose deux options :
- option A : une remise de 30 % sur le prix d'un lot ;
- option B : prix du lot inchangé mais avec deux briques « gratuites » en plus.

Quelle option donne le prix au litre le moins élevé ? Justifier la réponse.

2. Dans un autre magasin, une offre promotionnelle consiste à « rembourser » la TVA sur tous les produits. Ainsi le client voit affiché le prix toutes taxes comprises (TTC) mais ne paie en caisse que le prix hors taxes.
a) Quel est le prix payé en caisse (*arrondi au centime*) si le prix affiché est 42,55€ et le taux de TVA est 5,5% ?
b) Pour pouvoir retrouver les prix promotionnels des objets qu'il achète dans ce magasin, un client prépare, à l'aide d'un tableur, la feuille de calcul suivante :

	A	B	C	D	E
1	Produits	prix affichés (TTC)	Taux de TVA	prix promotionnels	
2	procuits alimentaires		5,5 %		
3	produits à taux normal		19,6%		
4					

Quelle formule peut-il taper dans la cellule D2 pour que s'affiche le prix promotionnel d'un produit alimentaire dès que l'on entre son prix affiché en B2 ? Quelle formule peut-il taper en D3 ?

EXERCICE 7

Les FLECHES. Lucie et Marc participent à une compétition de tir à l'arc. Dans le tableau ci-dessous, on trouve les scores partiels des 8 Tours de volées de 3 flèches. (*Rappel* : « 10 » est le score parfait pour une flèche).

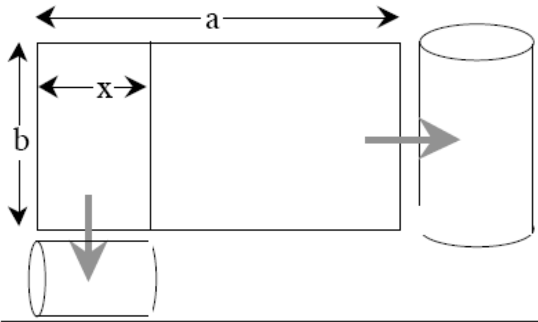
	Tour 1	Tour 2	Tour 3	Tour 4	Tour 5	Tour 6	Tour 7	Tour 8	Moyenne
Lucie	x	y	29	12	26	27	17	25	23
Marc	18	28		12	29	26	19	22	

1. Calculer la moyenne des scores de Marc si le score obtenu au tour 3 est égal à la moyenne des sept Tours déjà notés dans le tableau.
2. Une performance meilleure au Tour 3 lui aurait-elle permis d'obtenir une moyenne supérieure ou égale à celle de Lucie ? Justifier.
3. Le score x obtenu par Lucie au premier Tour est supérieur de 40 % au score y qu'elle a obtenu au second Tour.
Après avoir exprimé x en fonction de y, calculer x et y.

EXERCICE 8

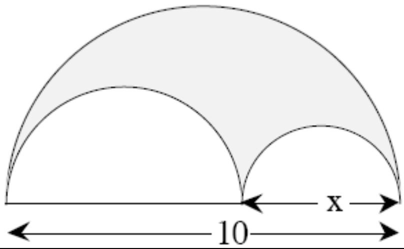
Cet exercice comporte deux items indépendants (numérotés 5. et 6.).
Voir page suivante.

5.



On découpe une feuille rectangulaire comme indiqué. Puis on réalise deux surfaces cylindriques. Calculer la somme des volumes de ces cylindres en fonction de x.

6.



Calculer en fonction de x l'aire du domaine coloré.

EXERCICE 9. *THEME : propriétés arithmétiques des nombres entiers*

(i) DIVISION EUCLIDIENNE.

- Le diviseur est 83, le quotient est 403. Trouver les dividendes possibles et les restes associés.
- Le dividende est 8592, le quotient est 38. Trouver le diviseur et le reste associé ; y a-t-il plusieurs solutions ? Justifier.
- Soit ***w*** un nombre entier naturel non nul. Rechercher tous les nombres dont le quotient dans leur division euclidienne par ***w*** s'écrit avec deux chiffres.

(ii) MULTIPLES, DIVISEURS, Critères de DIVISIBILITE, NOMBRES PREMIERS et NOMBRES PREMIERS entre eux, …

- On s'intéresse au (*grand*) « tableau » des nombres entiers naturels possédant trois chiffres. Dans ce tableau on efface tous les nombres divisibles par 10, on efface aussi tous les nombres divisibles par 5 et tous les nombres divisibles par 11. Combien reste-t-il de nombres dans ce tableau ? Justifier.

- Trouver un nombre **W** = (***abcdef***) possédant six chiffres tel que : (1) **W** est divisible par 3 ; (2) en lisant **W** de gauche à droite, chaque chiffre est plus grand que celui qui le précède et (3) les nombres (***ab***), (***cd***) et (***ef***) sont des nombres premiers.

- Un marchand de jouets veut répartir 1820 billes en nombre égal dans des paquets. Chaque paquet doit contenir au moins 20 billes et au plus 150 billes. Déterminer les différentes possibilités.

- Montrer que les nombres 825 et 686 sont premiers entre eux. Montrer alors que leur somme et leur produit sont aussi premiers entre eux. *Pour aller plus loin* : peut-on généraliser cette « propriété » à tous les nombres premiers entre eux.

A la date de la première parution de ce fichier, il manque des exercices portant sur les domaines suivants.

(iii) NOMBRES, ECRITURES et CALCULS d'hiver, …

- Voici quelques distances, en km, séparant le Soleil de quelques planètes

VENUS : 105×10^6	JUPITER : 78×10^7	TERRE : 15×10^7
MARS : 2250×10^5	SATURNE : 1425×10^6	PLUTON : 5900×10^6

Ranger ces distances dans l'ordre croissant.

- On pose $\mathbf{W} = 2 - \dfrac{(3 - \frac{2}{7})}{(1 + \frac{3}{5})}$. Ecrire **W** sous la forme d'une fraction irréductible.

- Résoudre les deux équations suivantes, où $\boldsymbol{x}$ désigne un nombre réel.

Equation (1) : $3 \times (\boldsymbol{x} + 5) = -7\boldsymbol{x} + 23$. *Equation (2)* : $0{,}75\boldsymbol{x} - 12 = \dfrac{\mathbf{x}}{3} - 24$

- Dans une tirelire, il y a 12 pièces de monnaie. Il n'y a que des pièces de 5 euros et de 2 euros. Avec ces 12 pièces, on totalise la somme de 39 euros. Combien y a-t-il de pièces de chaque sorte dans cette tirelire ?

Un dernier petit tour du côté de la géométrie plane, après, stop !!!

Programme de construction et Triangle équilatéral

1) *Programme de construction*. Point de départ : tracer, sans contraintes d'instruments, un rectangle **ABCD**. En utilisant uniquement une règle non graduée et un compas, réaliser alors le programme de construction ci-dessous.

1. Construire la médiatrice ($\boldsymbol{d}$) du côté **[AB]**.
2. Tracer le cercle de centre **A** et de rayon $\boldsymbol{r}$ = **AB**, il est sécant au point **E** avec la droite ($\boldsymbol{d}$), dans le demi-plan de frontière **(AB)** contenant le point **C**.
3. Construire la médiatrice du segment **[BE]**, elle est sécante au point **F** avec **[BC]**.
4. La demi-droite **[FE)** est sécante au point **G** avec **[AD]**.

2) Démontrer que le triangle **AEB** est équilatéral.

3) **a)** Démontrer que la droite **(AF)** est la médiatrice de **[EB]**.

b) En déduire, d'une part, l'égalité des angles $\widehat{\mathbf{FAB}}$ et $\widehat{\mathbf{FAE}}$ et, d'autre part, l'égalité des angles $\widehat{\mathbf{BFA}}$ et $\widehat{\mathbf{EFA}}$.

4) **a)** Calculer la valeur de l'angle $\widehat{\mathbf{GAF}}$ puis celle de l'angle $\widehat{\mathbf{GFA}}$.

b) Que peut-on en déduire pour le triangle **AGF** ?

Constructions avec des contraintes d'instruments

1. Pour réaliser la construction demandée, le matériel autorisé est la règle (*graduée*) et le compas. *Laisser les traits de construction.*

Tracer un segment d'extrémités **A** et **B**, tel que **AB** = 9 cm.

Construire un triangle **ABC** avec les deux conditions suivantes : $\widehat{\mathbf{BAC}} = 60°$, et $\widehat{\mathbf{ABC}} = 45°$.

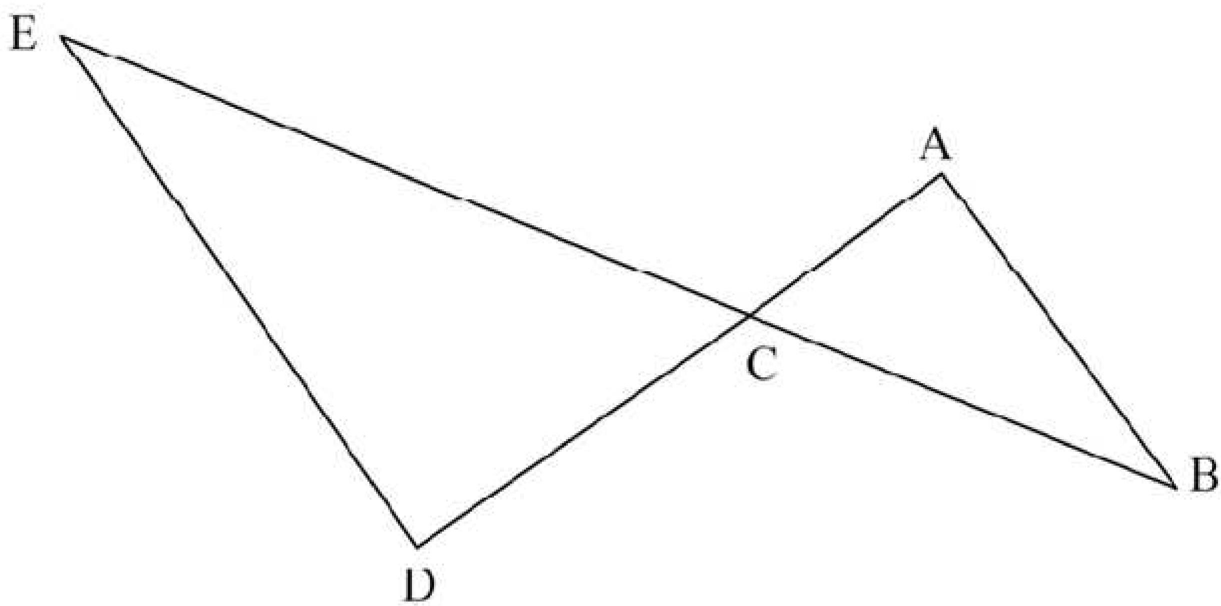
2. Un étudiant M1 affirme que le triangle **ABC** est isocèle : est-ce vrai ou faux, pourquoi ?

<u>On continue : des exercices, encore et toujours des exercices</u> !

On considère cinq points A, B, C, D et E tels que :

- Le triangle CAB est rectangle en A.
- Les points A, C, D sont alignés. AC = 3 cm ; AD = 8,4 cm.
- Les points B, C, E sont alignés. BC = 4,5 cm ; BE = 12,6 cm.

La figure ci-dessous n'est pas à l'échelle. Elle permet de situer les points.



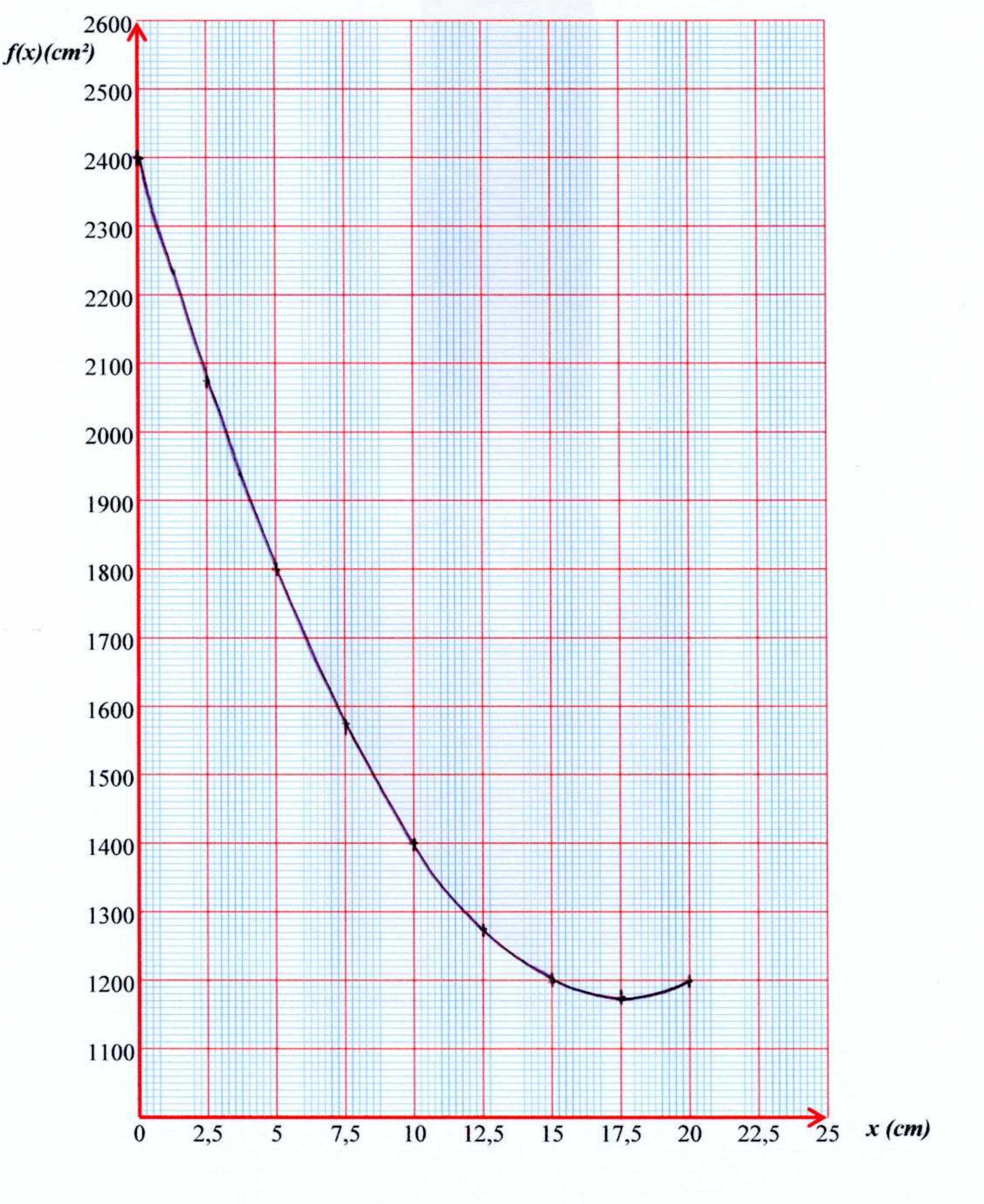
1. a) Démontrer que les droites **(AB)** et **(ED)** sont parallèles.

b) En déduire que les angles $\widehat{\mathbf{CED}}$ et $\widehat{\mathbf{ABC}}$ sont égaux.

2. a) Déterminer l'aire du triangle **ABC**. En donner son arrondi au cm^2 près.

b) On admet que le triangle **CED** est un agrandissement du triangle **ABC**.
En déduire, sans calculer la longueur **ED**, l'aire du triangle **EDC**.

(*Source* : AC. MATHE et P. WIERUSZEWSKI). **EXERCICE 3** : le logo.



Pistes de **CORRECTION**, *avec « emprunts » à des corrigés **COPIRELEM***

EXERCICE 1 : le QCM

- **Le robinet et les cL**. Bonne réponse : réponse **D**. *Une justification*. (1 goutte toutes les 2 secondes) donne (15 gouttes toutes les 30 secondes, donc une capacité de 1cL). Il tombe alors 30 gouttes en 1min, c'est-à-dire que la capacité double, d'où la réponse **D**)

- **Les aires**. Bonne réponse : réponse **A**. *Une justification*. On s'intéresse d'abord au quotient, exprimant une densité inverse : $\frac{12 \text{ millions } (\text{km}^2)}{7\text{milliards (hab)}} \approx 0{,}0017 \text{ km}^2/\text{hab}$. Maintenant, il faut faire les bonnes conversions. On a : $0{,}0017\text{km}^2 = 0{,}17\text{hm}^2 = 17\text{dam}^2 = 17 \times 100\text{m}^2 = 17\text{m} \times 100\text{m}$.

Rappel : les unités agraires. Il y en a principalement trois. (*A vérifier dans tout bon manuel parlant d'agriculture* !).

Le centiare (ca) = 1m^2	L'are(a) = 100m^2	L'hectare (ha) = 10000m^2
	1 are = 100 centiares	1 hectare = 100 ares

- **Le pot de confiture**. Bonne réponse : réponse **C**. *Une justification*. On appelle **P** la masse du pot vide, c'est la tare ; on appelle $\boldsymbol{x}$ la masse de la confiture lorsque le pot est plein, avec la même unité : le gramme. Exploitation des données : on obtient alors deux équations.

(i) $\frac{1}{3} \times \boldsymbol{x} + \mathbf{P} = 160$ et (ii) $\frac{1}{4} \times \boldsymbol{x} + \mathbf{P} = 140$. On doit alors résoudre un « système »

$$\begin{cases} \frac{1}{3} \times \boldsymbol{x} + \mathbf{P} = 160 \\ \frac{1}{4} \times \boldsymbol{x} + \mathbf{P} = 140 \end{cases}$$

Technique au choix : substitution ou combinaison. Par soustraction dite membre à membre, on obtient $\frac{1}{3} \times \boldsymbol{x} - \frac{1}{4} \times \boldsymbol{x} = 160 - 140 = 20$. D'où $\boldsymbol{x} = 240$; $\mathbf{P} = 60$. Conclure.

- **Les étapes**. Pas mal cet item. Bonne réponse : réponse **A**. Avec un « piège », de taille : on demande un périmètre, pas un côté (réponse **B**). Sans une lecture attentive, on tombe dans ce piège qui n'en est pas un ! On utilise la réponse **B** pour trouver la bonne réponse.

Etape 1	Etape 2	Etape 3	Etape 4
Côté = 75cm	Côté = $75/\sqrt{2}$cm	Côté = $75/2$cm	Côté = $75/2\sqrt{2}$cm

Conjectures « fortes » : on divise par $\sqrt{2}$ chaque côté d'une étape en passant à la suivante. *Piste* : un petit coup de « droite des milieux » ou autre ! Ensuite, on s'intéresse à la parité : les étapes paires possèdent un « $\sqrt{2}$ » au dénominateur et les étapes impaires ont une puissance de 2. D'où le côté à l'étape 15 : $\frac{75}{128} = \frac{75}{2^7}$.

Oui, mais retour au « piège » : le périmètre est égal à : $4 \times \frac{75}{2^7} = \frac{75}{32}$.

- **Les carreaux**. Bonne réponse : réponse **B**. Une technique : calculer l'aire « blanche » et retrancher cette valeur à 30 (= 5 × 6). On a plein de demi-rectangles, ça devrait aller !

- **Les cylindres**. Bonne réponse : réponse **3**. L'intuition est trompeuse !

Volume (A) = $\pi \times \frac{30}{2\pi} \times \frac{30}{2\pi} \times 21 = \frac{30 \times 30 \times 21}{4\pi} \approx 1504{,}0$ (cm3).

Volume (B) = $\pi \times 21/2\pi \times 21/2\pi \times 30 = \frac{21 \times 21 \times 30}{4\pi} \approx 1052{,}8$ (cm3). *Sauf erreur de calcul* !

Question : ces volumes sont-ils « comparables » ? On est (*presque*) dans un rapport de trois volumes B pour deux volumes A !

EXERCICE 2

On a le premier quotient (*avec les bonnes unités*) : $\boxed{\text{Masse Volumique} = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Volume}}}$

D'où les deux autres égalités : $\boxed{\text{Masse} = \text{Masse Volumique} \times \text{Volume}}$ et

$\boxed{\text{Volume} = \dfrac{\text{Masse}}{\text{Masse Volumique}}}$

1. Calcul du Volume du cube **C**, en bois d'arête 5 cm : 5cm × 5cm × 5cm = 125 cm^3.
Masse de ce cube en Azobé : 125 cm^3 × 0,86 g/cm^3 = 107,5 g donc $\boxed{\text{le cube } \mathbf{C} \text{ est en Azobé}}$!

2. Masse d'un cube ayant même arête de 5 cm, en bois de Charme : 125 cm^3 × 0,75 g/cm^3 = 93,75 g.
On a : 93,75 < 107,5 et à Volumes identiques, il faut une Masse Volumique supérieure à 0,75 g/cm^3 pour obtenir une Masse de 107,5 g. Cette Masse Volumique est donc : 0,86 g/cm^3.

3.

a) On triple l'arête du cube **C**, donc le Volume est multiplié par 3^3, c'est-à-dire 27. La Masse de ce cube (obtenue en multipliant le volume par 0,86) est donc <u>multipliée par 27 donc la masse ne triple pas</u>.
Autre technique : on passe par des calculs.
La nouvelle arête a pour longueur 3 × 5 cm = 15 cm ; le Volume est alors égal à : 15 cm × 15 cm × 15 cm = 3375 cm^3. Pour déterminer sa Masse, on utilise une des égalités du début de la page :

Masse : 3375 cm^3 × 0,86 g/cm^3 =2902,5 g et $\dfrac{2902{,}5}{107{,}5}$ = 27, donc <u>la masse ne triple pas</u>.

b) Si on augmente de 3 cm l'arête du cube **C**, son Volume est égal à : 8 cm × 8 cm × 8 cm = 512 cm^3. Sa masse est alors 512 cm^3 × 0,86 g/cm^3 = 440,32g et l'augmentation de la Masse est donc : 440,32g – 107,5g = **332,82g**.
(On peut s'amuser à exprimer cette augmentation en pourcentage : on trouve : ≈ 310 %).

4.

a) Masse Volumique de l'aggloméré sachant qu'il contient 20% d'Azobé (0,86 g/cm^3), 40% de Pin (0,55 g/cm^3), 40% de Charme (0,75 g/cm^3) :
0,20 × 0,86 + 0,40 × 0,55 + 0,40 × 0,75 = (*calculs*) = 0,692. <u>Réponse</u> : **0,692 g/cm³**

b) Masse d'une plaque rectangulaire de 1,8 m par 0,6 m d'épaisseur 2 cm :
Volume, en cm^3 : 180 × 60 × 2 = 21600
Masse, en g : 21600 × 0,692 = **14947,2** ; (non demandé. Masse, en kg : 14,9472 ≈ 14,95).

EXERCICE 3

1. f est la fonction qui à $\boldsymbol{x}$ associe l'aire $\boldsymbol{f(x)}$ du logo en cm^2. Voir l'énoncé !

a) Domaine de définition de la fonction f
Deux **contraintes** sont posées à la valeur de $\boldsymbol{x}$:
- <u>La hauteur du logo est de 40cm</u>. Les valeurs possibles de $2\boldsymbol{x}$ sont alors tous les réels compris entre 0cm et 40cm : $\boldsymbol{x}$ est alors compris entre 0cm et 20cm.
- <u>La largeur du logo est de 60cm</u>. Les valeurs possibles de $2\boldsymbol{x}$ sont alors tous les réels compris entre 0cm et 30cm : $\boldsymbol{x}$ est alors compris entre 0cm et 30cm.

<u>Conclusion</u> : les valeurs possibles de $\boldsymbol{x}$ sont tous les réels compris entre 0 cm et 20 cm, ce qui se note : $\boldsymbol{x} \in$ **[0, 20].**

b) Expression de la fonction f.

- Expression de l'aire $\mathbf{A_1(x)}$ du triangle **ABG** en fonction de x :

BG = 60cm, la hauteur issue de **A** de ce triangle est égale à $2x$, donc : $\mathbf{A_1(x)} = \dfrac{60 \text{ x } 2x}{2}$, $\mathbf{A_1(x) = 60x}$.

- Expression de l'aire $\mathbf{A_2(x)}$ du rectangle **CFBE** en fonction de x :

CF = **BG** – **BC** – **FG** = $60 - 2x$ **CD** = $40 - 2x$ $\mathbf{A_2(x)}$ = **CF** × **CD** = $(60 - 2x) \times (40 - 2x)$. D'où : $\mathbf{A_2(x) = 4x^2 - 200x + 2400}$

- Expression de $f(x)$ en fonction de x :

On a : $f(x) = \mathbf{A_1(x)} + \mathbf{A_2(x)} = 60x + 4x^2 - 200x + 2400 = 4x^2 - 140x + 2400$; $\mathbf{f(x) = 4x^2 - 140x + 2400}$.

2. a) Recherche des solutions de l'équation $f(x) \leq 1400$.

Graphiquement, ces solutions sont les **abscisses des points de la courbe dont l'ordonnée est inférieure ou égale à 1400.**

Graphiquement, les solutions de l'équation $f(x) \leq 1400$: $x \in$ **[10 ; 20]**

b) D'après le graphique, la fonction f admet son minimum en x **= 17,5cm.**

Graphiquement, ce minimum vaut environ **1170 cm².**

c) Montrons que $4x^2 - 140x + 2400 = 4(x - 17{,}5)^2 + 1175$

On va faire un « bricolage algébrique » pas élémentaire, encore moins évident ! Dans ce cas, on peut regarder la solution et s'en servir pour « travailler » avec.

On a : $4x^2 - 140x + 2400 = 4(x^2 - 35x) + 2400 = 4((x - 17{,}5)^2 - 17{,}5^2) + 2400 = 4(x - 17{,}5)^2 - 1225 + 2400 = 4(x - 17{,}5)^2 + 1175$

Ou : $4(x - 17{,}5)^2 + 1175 = 4(x^2 - 35x + 306{,}25) + 1175 = 4x^2 - 140x + 1225 + 1175 = 4x^2 - 140x + 2400$.

Aire minimale du logo :

On en déduit que $f(x) = 4(x - 17{,}5)^2 + 1175$

$(x - 17{,}5)^2$ étant un carré, les valeurs prises par $(x - 17{,}5)^2$ sont (*toujours, c'est de trop !*) positives : il s'agit donc d'**une somme de termes positifs.**

Conclusion : f **atteint son minimum pour** $\mathbf{(x - 17{,}5)^2 = 0}$, donc pour x = 17,5cm.

Sa valeur est alors de 1175cm².

L'aire minimale du logo est donc atteinte pour x = 17,5cm et vaut exactement 1175 cm².

3. Si x = 20cm, on a : **CD** = $40 - 2x = 40 - 2 \times 20 = 0$cm

Le logo a donc la forme d'un triangle isocèle dont la base **[BG]** mesure 60cm et dont la hauteur issue du sommet principal (le point **A**) mesure 40cm.

D'où la figure à construire, à la règle graduée et au compas : un triangle isocèle avec les « bonnes dimensions » : *non reproduit dans ce corrigé.*

EXERCICE 4

1) Expression de toutes les longueurs en fonction de *c*

Sur la figure proposée, on peut constater que :

- les carrés D et E sont identiques donc $d = e$ *(1)*;
- la longueur du côté du carré C est égale à la somme des longueurs des côtés des carrés D et E donc $c = d + e$ *(2)* ;
- la longueur du côté du carré B est égale à la somme des longueurs des côtés des carrés C et D donc $b = c + d$ *(3)* ;
- la longueur du côté du carré A est égale à la somme des longueurs des côtés des carrés B et C donc $a = b + c$ *(4)*.

Des égalités *(1)* et *(2)*, on obtient : $d = e = \frac{c}{2}$ *(5)*.

Des égalités *(3) et (5)*, on obtient : $b = c + \frac{c}{2} = \frac{3c}{2}$ *(6)*.

Des égalités *(4) et (6)*, on obtient : $a = \frac{3c}{2} + c = \frac{5c}{2}$ *(7)*.

On a donc : $\boldsymbol{a = \frac{5c}{2}}$ $\boldsymbol{b = \frac{3c}{2}}$ $\boldsymbol{d = e = \frac{c}{2}}$

2) Calcul de la valeur de *c*

Méthode 1

Les dimensions du rectangle sont a et $a + b$, donc son aire est obtenue par le calcul suivant :

$a \times (a + b) = \frac{5c}{2} \times (\frac{5c}{2} + \frac{3c}{2}) = \frac{5c}{2} \times 4c = 10\ c^2$.

Comme on doit avoir $10\ c^2 = 3\ 610$ **on en déduit la mesure de *c* (en cm) : $c = \sqrt{361} = 19$.**

Méthode 2

Par additivité de la mesure de l'aire, on peut dire que l'aire du rectangle est la somme des aires des carrés A, B, C, D et E, soit (en cm^2) : $3610 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$.

D'après la question 1), on obtient : $3610 = \left(\frac{5c}{2}\right)^2 + \left(\frac{3c}{2}\right)^2 + c^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2 = 40 \times \frac{c^2}{4} = 10\ c^2$.

Donc $c^2 = 361$. **On en déduit la valeur de *c* (en cm) : $c = \sqrt{361} = 19$.**

Dimensions de la feuille

Les dimensions de la feuille sont a et $a + b$. On calcule ces valeurs à partir des égalités *(6)* et *(7)* et de la valeur de c obtenue précédemment.

$a = \frac{5c}{2} = \frac{5 \times 19}{2} = 47{,}5$;

$a + b = \frac{5c}{2} + \frac{3c}{2} = 4c = 4 \times 19 = 76$.

La feuille est donc de dimensions 47,5 cm sur 76 cm.

3) Calcul de la masse de la pièce A

La plaque métallique étant considérée comme homogène, la masse d'une partie est proportionnelle à l'aire de cette même partie. Or la surface B, de mesure d'aire égale à $\left(\frac{3c}{2}\right)^2$, pèse 100 g, et la surface A admet pour mesure d'aire $\left(\frac{5c}{2}\right)^2$.

D'où le tableau de proportionnalité suivant :

	pièce B	pièce A
Aire de la pièce (en cm^2)	$\frac{9c_2}{4}$	$\frac{25c_2}{4}$
Masse de la pièce (en grammes)	100	?

Donc la masse de la pièce A est égale à :

$$\frac{100 \text{ x } 25c^2}{4} : \frac{9c^2}{4} = \frac{100 \text{ x } 25c^2}{9c^2} = \frac{2500}{9}$$

On en déduit que la masse de la pièce A est égale à $\frac{2500}{9}$ grammes, soit environ 277,8 grammes au décigramme près par excès (ou 277,7 grammes au décigramme près par défaut).

4) Calcul du volume du cube C

Méthode 1

En m^3, le volume du cube A est égal à 2 : $a^3 = 2$.
Par l'égalité *(7)* de la question 1), on en déduit une expression de c^3 en m^3 :

$a = \frac{5c}{2}$ donc $c = \frac{2a}{5}$ et $c^3 = \frac{2^3 \text{ x } a^3}{125} = 2 \text{ x } \frac{8}{125}$

soit en dm^3 : $2\,000 \text{ x } \frac{8}{125} = 128$.

Le volume du cube C est égal à 128 dm^3.

Méthode 2

La pièce A est un agrandissement de la pièce C. Comme $a = \frac{5c}{2}$, le coefficient d'agrandissement des longueurs est de $\frac{5}{2}$. On peut en conclure que le volume du cube A est un agrandissement de coefficient $\left(\frac{5}{2}\right)^3$ du volume du cube C.

Le volume de la pièce A étant de 2 000 dm^3, le volume en dm^3 du cube C est : $2000 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 = 128$.

Le volume du cube C est égal à 128 dm^3.

EXERCICE 5

Les BOUGIES. C'est de circonstance. Attention à ne rien brûler !!!

1) a) Valeur exacte et valeur approchée au mm près de la hauteur de la bougie

S est le sommet du cône de révolution et A le centre de sa base, (SA) est donc orthogonale à la base et le triangle SAB est rectangle en A. Le théorème de Pythagore permet alors d'écrire :

$SA^2 + AB^2 = SB^2$

$SA^2 = SB^2 - AB^2 = 21^2 - 14^2 = 441 - 196 = 245$ et $SA = \sqrt{245} = 7\sqrt{5}$

La hauteur exacte de la bougie est $7\sqrt{5}$ cm, soit 15,7 cm au mm près (par excès).

Remarques :

- *la valeur approchée peut être donnée par excès ou par défaut, alors que l'arrondi est la valeur la plus proche. La réponse 15,6 cm au mm près (par défaut) est également une réponse acceptable.*
- *$SA^2 = 21^2 - 14^2 = 7^2(3^2 - 2^2) = 7^2 \times (9 - 4) = 7^2 \times 5$ et donc $SA = 7\sqrt{5}$.*

b) Valeur exacte et valeur approchée au mm^3 près du volume de la bougie

La base est un disque de rayon AB = 14 cm et la hauteur du cône est $SA = 7\sqrt{5}$ cm. Ainsi, le volume du cône, en cm^3, est égal à $\frac{\pi \times AB^2 \times SA}{3} = \frac{\pi \times 14^2 \times 7\sqrt{5}}{3} = \frac{1372\pi\sqrt{5}}{3}$

Le volume exact de la bougie est de $\frac{1372\pi\sqrt{5}}{3}$ cm^3, soit 3212,682 cm^3 au mm^3 près (par excès).

Remarque :
La réponse 3212,681 cm^3 au mm^3 près (par défaut) est également une réponse acceptable.

c) Nombre de bougies fabriquées avec 20 litres de cire

Le volume d'une bougie est de 3212,682 cm^3, soit 3,21 L environ. Par ailleurs, $20 : 3,21 \approx 6,23$.

On peut donc fabriquer 6 bougies avec 20 L de cire.

2) a) Longueur exacte de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$

La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$ est égale au périmètre de la base du cône. Cette base étant un disque de rayon AB = 14 cm, **la longueur de l'arc, en cm, est égale à $2\pi \times 14 = 28\pi$.**

b) Calcul de la mesure de l'angle α en degrés

La longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$ est proportionnelle à la mesure de l'angle au centre $\widehat{BSB'} = \alpha$.

Pour un angle au centre de 360°, la longueur de l'arc de cercle est égale au périmètre du cercle de centre S et de rayon SB, c'est-à-dire $2\pi \times 21 = 42\pi$.

On a donc :

Longueur de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BB'}$	mesure en degré de l'angle au centre $\widehat{BSB'} = \alpha$
42π	360
28π	$\frac{28\pi}{42\pi} \times 360 = \frac{2}{3} \times 360 = 240$

L'angle α est donc égal à 240°.

3) Proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie

Nous notons V_{bougie} le volume total de la bougie en cm^3 et $V_{cire\ blanche}$ le volume de cire blanche en cm^3.

Méthode 1

Remarque :
Nous rappelons que si k est le coefficient de réduction (ou d'agrandissement) sur les longueurs d'un solide, alors k^3 est le coefficient de réduction (ou d'agrandissement) sur le volume de ce même solide.

On peut considérer que le cône de cire blanche est une réduction du cône entier de rapport $\frac{1}{2}$ ainsi :

$V_{cire\ blanche} = (\frac{1}{2})^3 \times V_{bougie} = \frac{1}{8} V_{bougie}$

La proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie est de $\frac{1}{8}$.

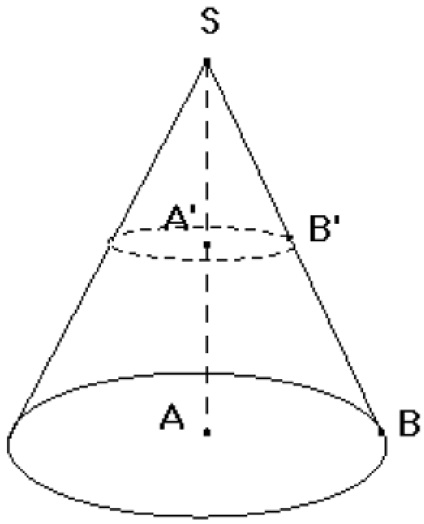
Méthode 2

$V_{cire\ blanche}$ est le volume d'un cône de sommet S dont la base est le disque de centre A' et de rayon A'B' (voir le dessin ci-dessous) avec SA' = $\frac{1}{2}$ SA = $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ cm.

Calcul de A'B' :

Le triangle SA'B' est rectangle en A', ainsi les droites (A'B') et (AB) étant perpendiculaires à la même droite (SA) sont parallèles entre elles. A' est le milieu de [SA] et d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle SAB (toute droite qui passe par le milieu d'un côté et qui est parallèle à un second côté, passe par le milieu du troisième côté), on en déduit :

B' est le milieu de [SB] et A'B' = $\frac{1}{2}$ AB = 7 cm.



$$V_{cire\ blanche} = \frac{\pi A'B'^2 \times SA'}{3} = \frac{\pi\,(\frac{1}{2}AB)^2 \times \frac{1}{2}SA}{3} = \frac{\pi\,\frac{1}{8}\,AB^2 \times SA}{3}$$

soit $V_{cire\ blanche} = \frac{1}{8}\,\frac{\pi AB^2 \times SA}{3} = \frac{1}{8} V_{bougie}$

La proportion de cire blanche dans le volume total de la bougie est de $\frac{1}{8}$.

Remarque.
Une troisième méthode consiste à calculer le volume de cire blanche puis le rapport entre le volume de cire blanche et celui de la bougie.

EXERCICE 6

1) a) Hauteur $\boldsymbol{h}$ d'une brique.

Il faut tout d'abord convertir 20cL, en cm^3, afin de conserver l'homogénéité des dimensions. Conversion : on a : 20cL = $200cm^3$. (1L = $1dm^3$, donc 1mL = 1cm3, comme 20cL = 200mL, on a bien 20cL = $200cm^3$)

Le volume **V** d'une brique est : $\mathbf{V} = 4 \times 6 \times \boldsymbol{h}$ et $\mathbf{V} = 200\ cm^3$.

D'où la mesure de la hauteur $\boldsymbol{h}$, en cm : $\frac{200}{24} = \frac{25}{3} \approx 8{,}33$ (cm). La valeur approchée de $\boldsymbol{h}$ à 1 mm près par excès est donc 8,4cm.

1) b) Prix d'un litre de jus d'orange

On achète six briques c'est-à-dire $6 \times 0{,}20L = 1{,}20L$ de jus d'orange pour 2,89€ donc un litre coûte : $\frac{2{,}89}{1{,}20} \approx 2{,}41$€ (valeur décimale arrondie au centime).

Remarque.

Dans cette question, on ne précise pas si le résultat doit être donné arrondi au centime près par excès ou par défaut. Le résultat arrondi au centime près par excès est 2,41€, le résultat arrondi au centime près par défaut est 2,40€. On peut néanmoins comprendre que, de manière implicite, lorsque l'on demande un résultat arrondi au centime près, il s'agit de donner l'arrondi au centime le plus « proche ».

1) c) Quelle est l'option donnant le prix au litre le moins élevé ?

- Option A : avec une remise de 30%, le prix du lot sera de : $2{,}41 - 2{,}41 \times \frac{30}{100} = 2{,}41 \times (1 - 0{,}30) = 2{,}41 \times 0{,}70$. Le prix du litre sera donc de : $2{,}41 \times 0{,}70 \approx 1{,}687$. (*Attention au choix des prix !*)

L'option A donne un prix au litre de **1,69€ (**valeur arrondie au centime près « par excès »**).**

- Option B : le prix du litre sera de : $\frac{2{,}89}{1{,}60}$€ soit 1,81€

L'option B donne un prix au litre de **1,81€ (**valeur arrondie au centime près « par excès »**).**

C'est donc l'option A qui donne un prix au litre le moins élevé.

Remarques.

- *Il est demandé ici de comparer les options A et B avec « le prix au litre ». Il est possible de comparer ces deux options en recherchant le prix d'une brique, mais ce n'est pas ce qui était attendu.*
- *Concernant les résultats, il est possible de réaliser les calculs intermédiaires et d'utiliser des arrondis, les prix au litre suivant l'option A et suivant l'option B étant « très » différents ; ainsi, les arrondis ne sont pas déterminants dans le résultat à cette question.*

2) a) Recherche du prix hors taxes

On note Prix TTC le prix toutes taxes comprises et Prix HT le prix hors taxes. On a alors la relation suivante : Prix TTC = Prix HT + $\frac{5{,}5}{100}$ × Prix HT soit Prix TTC = 1,055 × Prix HT.

Ici, on a donc : Prix HT = $\frac{\text{Prix TTC}}{1{,}055} = \frac{42{,}55}{1{,}055} \approx 40{,}33$

Le prix payé en caisse est donc de **40,33€ (**valeur arrondie au centime près « par défaut »**).**

La feuille de classeur du TABLEUR. Rappel ou Appel (?). Pour rentrer une formule dans une cellule, la formule doit commencer par un « = ».

On dit que le prix promotionnel est le prix HT. Formule dans la cellule D2 : $\boxed{\text{=B2/1.055}}$

Même démarche. Formule dans la cellule D3 : $\boxed{\text{=B2/1.196}}$.

Tester les formules en affichant des prix dans les cellules B2 et B3.

EXERCICE 7

Les FLECHES. Le plus simple est deviser le cœur !

1) Moyenne des scores de Marc

Méthode 1

Puisque le score du tour 3 est égal à la moyenne des 7 autres tours, ce score n'a pas d'influence sur la moyenne de la totalité. Donc la moyenne des 8 scores de Marc est égale à la moyenne des 7 scores connus.

$$M = \frac{18+28+12+29+26+19+22}{7} = \frac{154}{7} = 22$$

La moyenne des scores de Marc est 22.

Méthode 2

Le score du tour 3 est égal à la moyenne des sept tours déjà notés dans le tableau, soit :

$$S_3 = \frac{18+28+12+29+26+19+22}{7} = \frac{154}{7} = 22$$

La moyenne des scores de Marc est donc :

$$M = \frac{18+28+22+12+29+26+19+22}{8} = 22$$

La moyenne des scores de Marc est 22.

2) Performance de Marc pour obtenir une moyenne supérieure ou égale à celle de Lucie

Méthode 1

Appelons p la performance de Marc au tour 3.

Sa moyenne globale est $\frac{p + (7 \times 22)}{8}$, on souhaite qu'elle soit supérieure ou égale à celle de Lucie, soit 23 donc $\frac{p + 154}{8} \geq 23$ soit $p \geq (8 \times 23) - 154$ donc $p \geq 30$.

Avec une meilleure performance au tour 3, Marc aurait donc pu obtenir une moyenne supérieure ou égale à celle de Lucie (elle aurait été égale avec un score de 30 au tour 3 mais pas strictement supérieure à celle de Lucie)**.**

Méthode 2

Le score maximal que Marc aurait pu obtenir au tour 3 est 30.

Dans ce cas, son score moyen sur les huit tours aurait été : $\frac{30 + (7 \times 22)}{8} = 23$

Donc **avec une meilleure performance au tour 3, Marc aurait pu obtenir une moyenne égale à celle de Lucie mais pas strictement supérieure.**

3) Calcul de x et y

Si le score x obtenu par Lucie au premier tour est supérieur de 40% au score y qu'elle a obtenu au second tour, alors $x = y + \frac{4}{100} y = 1{,}4\, y$.

La moyenne de Lucie est $\frac{x+y+29+12+26+27+17+25}{8} = 23$ donc $x + y + 136 = 8 \times 23 = 184$.

Donc $x + y = 48$.

En remplaçant x par $1{,}4\, y$ on a : $1{,}4\, y + y = 48$ soit $2{,}4\, y = 48$ c'est-à-dire $\boldsymbol{y = 20}$.

On en déduit : $x = 1{,}4 \times 20$ d'où $\boldsymbol{x = 28}$.

Lucie a réalisé le score de 28 au tour 1 et le score de 20 au tour 2.

EXERCICE 8

ITEM 5. Volume **V1** du « petit » cylindre. Description : **b** est le périmètre du disque de base et $\boldsymbol{x}$ la hauteur. Il faut le rayon **r**. On a : $\mathbf{b} = 2\pi \times \mathbf{r}$, d'où $\mathbf{r} = \frac{\mathbf{b}}{2\pi}$. On a alors : $\mathbf{V1} = \pi \times \frac{\mathbf{b}}{2\pi} \times \frac{\mathbf{b}}{2\pi} \times \boldsymbol{x} = \frac{\mathbf{b}^2 \times \boldsymbol{x}}{4\pi}$. Volume **V2** du « grand » cylindre. Description : $(\mathbf{a} - \boldsymbol{x})$ est le périmètre du disque de base et **b** est la hauteur. Il faut le rayon **R**. On a : $(\mathbf{a} - \boldsymbol{x}) = 2\pi \times \mathbf{R}$, d'où $\mathbf{R} = \frac{(\mathbf{a} - \boldsymbol{x})}{2\pi}$.

On a alors **V2** = $\pi \times \frac{(\mathbf{a} - \boldsymbol{x})}{2\pi} \times \frac{(\mathbf{a} - \boldsymbol{x})}{2\pi} \times \mathbf{b}$. Il y a des petites simplifications à faire !

V2 = $\frac{(\mathbf{a} - \boldsymbol{x})^2 \times \mathbf{b}}{4\pi}$. Finalement **V** = **V1** + **V2** : à chercher ! *Ouf* !

ITEM 6. AIRE (domaine colorié) = AIRE (« grand » demi-disque) – somme des AIRES des demi-disques « blancs ». On a fait le plus dur !

- AIRE (« grand » demi-disque) = $(\pi \times 5 \times 5)/2 = 12{,}5\pi$.
- AIRE (« petit » disque « blanc ») = $(\pi \times \boldsymbol{x}/2 \times \boldsymbol{x}/2)/2 = \pi \times \boldsymbol{x}^2/8$.
- AIRE (« moyen » disque « blanc ») = $(\pi \times (10 - \boldsymbol{x})/2 \times (10 - \boldsymbol{x}/2))/2 = \ldots = \pi \times (10 - \boldsymbol{x})^2/8$.

AIRE (domaine colorié) = $\pi \times (12{,}5 - \boldsymbol{x}^2/8 - (10 - \boldsymbol{x})^2/8)$. Bon, voilà, c'est fait. On va arranger ça !
AIRE (domaine colorié) = $\pi \times (100 - \boldsymbol{x}^2 - (10 - \boldsymbol{x}^2)/8) = \pi/8 \times (100 - \boldsymbol{x}^2 - (100 - 20\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^2))$ =
AIRE (domaine colorié) = $\pi/8 \times 20\boldsymbol{x} = 2{,}5\pi \times \boldsymbol{x}$. Pas mal !

EXERCICE 9

(i) DIVISION EUCLIDIENNE.

Rappel. L'égalité : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$, avec $0 \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$ caractérise la division euclidienne de $\boldsymbol{a}$ par $\boldsymbol{b}$. Revoir le **CM1** sur la plate-forme *CELENE* pour le vocabulaire associé et pour les différentes propriétés. Les exercices proposés demandent de « réfléchir » aux relations entre les quatre nombres entiers naturels désignés par les lettres $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q}$ et $\boldsymbol{r}$. Incontournable pour le CRPE.

- On a : $\boldsymbol{b} = 83$ et $\boldsymbol{q} = 403$. On peut donc écrire : $\boldsymbol{a} = 83 \times 403 + \boldsymbol{r}$, avec $0 \leq \boldsymbol{r} < 83$. Quand $\boldsymbol{r} = 0$, on obtient le plus petit dividende : $\boldsymbol{a} = 83 \times 403 + 0 = 33\,449$. Quand $\boldsymbol{r} = 82$ (*le plus grand reste possible*), on obtient le plus grand dividende : $\boldsymbol{a} = 83 \times 403 + 82 = 33\,449 + 82 = 33\,531$.

Le dividende $\boldsymbol{a}$ est donc compris entre 33 449 et 33 531, sachant que le reste $\boldsymbol{r}$ est compris entre 0 et 82.

- On a : $8592 = \boldsymbol{b} \times 38 + \boldsymbol{r}$, avec $0 \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$.

Après avoir effectué la division euclidienne de 8592 par 38, on peut écrire deux égalités : $8592 = 38 \times 226 + 4 = 226 \times 38 + 4$. On a $4 < 226$, donc 226 est une valeur possible du quotient.
On peut chercher d'autres diviseurs. Par exemple : $8592 = (225 + 1) \times 38 + 4 = 225 \times 38 + (1 \times 38) + 4 = 225 \times 38 + 42$, avec $42 < 226$, donc 225 est un autre diviseur possible. Il y en a d'autres. Vérifier que 224, 223, 222 et 221 conviennent ; écrire alors les égalités correspondantes.

- On part de l'égalité : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{q} + \boldsymbol{r}$, avec $0 \leq \boldsymbol{r} < \boldsymbol{b}$. On sait de plus que le quotient possède deux chiffres, c'est-à-dire : $10 \leq \boldsymbol{q} \leq 99$. Donc, le plus petit nombre cherché est : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w} \times 10 + 0$ (*on choisit le plus petit quotient : 10 et le plus petit reste : 0*). Le plus grand nombre cherché est : $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{w} \times 99 + (\boldsymbol{w} - 1) = 100\boldsymbol{w} - 1$ (*le plus grand quotient est 99 et le plus grand reste est ($\boldsymbol{w}$ – 1)*). On attribue alors une valeur arbitraire à $\boldsymbol{w}$, on applique les égalités ci-dessus pour obtenir des exemples de nombres vérifiant les conditions étudiées.

(ii) MULTIPLES, DIVISEURS, Critères de DIVISIBILITE, NOMBRES PREMIERS et NOMBRES PREMIERS entre eux, …

- Le plus petit nombre de trois chiffres est 100, le plus grand est 999. Il y a 900 nombres dans ce tableau : il y en a 100 de 100 à 199, cette « régularité » se produit neuf fois. On y va pour les « effaçages » !

Les multiples de dix se terminent par « 0 ». Très mal dit ! On doit dire : le chiffre des unités est égal à 0. Bon d'accord. Pour chaque chiffre des centaines fixé, par exemple 4, le nombre s'écrit (4***d***0), où $\boldsymbol{d}$ désigne le chiffre des dizaines. Le chiffre $\boldsymbol{d}$ peut prendre 10 valeurs (de 0 à 9) ; donc pour le chiffre 4 des centaines, il y a 10 multiples de dix. Il y a alors $10 \times 9 = 90$ nombres qui se terminent par un « 0 » pour l'ensemble des nombres à trois chiffres.

On continue. Les nombres divisibles par 5 se terminent par « 0 » ou « 5 ». Encore mal dit, bon d'accord, bis. Oui mais on a déjà décompté ceux qui se terminent par « 0 ». Il y a aussi 90 nombres se terminant par « 5 » (*même démarche que pour les multiples de dix*).

On continue. Le plus petit nombre possédant trois chiffres multiple de 11 est : 10×11 ; le plus grand est : $90 \times 11 = 990$ ($91 \times 11 = 1001$: quatre chiffres). Donc les nombres du tableau divisibles par 11 sont de la forme $11 \times \boldsymbol{x}$, avec $\boldsymbol{x}$ nombre entier naturel vérifiant : $10 \leq \boldsymbol{x} \leq 90$. Il y a 81 nombres $\boldsymbol{x}$: de 10 à 19, il y en a 9, on répète neuf fois cette « régularité ». Faisons le compte ! On a effacé : $90 + 90 + 81 = 261$ nombres. Il en reste alors $900 - 261 = 639$.

- *Rappel*. **W** = (***abcdef***) désigne le nombre à six chiffres dont la décomposition canonique est : $\mathbf{W} = \boldsymbol{a} \times 100000 + \boldsymbol{b} \times 10000 + \boldsymbol{c} \times 1000 + \boldsymbol{d} \times 100 + \boldsymbol{e} \times 10 + \boldsymbol{f}$
$\mathbf{W} = \boldsymbol{a} \times 10^5 + \boldsymbol{b} \times 10^4 + \boldsymbol{c} \times 10^3 + \boldsymbol{d} \times 10^2 + \boldsymbol{e} \times 10^1 + \boldsymbol{f} \times 10^0$. (Cf. le **CM** sur le cours *CELENE*).

Pour trouver la valeur de **W**, on étudie chacune des trois conditions. Il y a plusieurs techniques.

La condition (2) s'écrit : $\boldsymbol{a} < \boldsymbol{b} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{d} < \boldsymbol{e} < \boldsymbol{f}$. La plus petite valeur de $\boldsymbol{a}$ est 1.
On peut lister les nombres premiers ayant deux chiffres : 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89 et 97. Donc les nombres (***ab***), (***cd***) et (***ef***) sont à choisir parmi la liste, en respectant les conditions sur le rangement des chiffres de la condition (2). On peut alors former quatre nombres **W** : 134 789 ou 136 789 ou 234 789 ou 236 789.
Il reste la condition (1). Un grand classique : on « fait » la « somme des chiffres ».
$1 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 = 32$, non multiple de 3 ; $1 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 = 34$, non multiple de 3 ; $2 + 3 + 4 + 7 + 8 + 9 = 33$, multiple de 3 et $2 + 3 + 6 + 7 + 8 + 9 = 34$, non multiple de 3.
D'où la seule solution : **W** = 234 789. Pas mal !

- Les paquets de billes. Le nombre de billes par paquet est déjà un diviseur de 1820 commun à 20 et à 150. D'où la première étape : recherche des diviseurs de 1820. Plusieurs techniques possibles.
$1820 = 10 \times 182 = 10 \times 2 \times 91 = 10 \times 2 \times 7 \times 13$; on avance. $1820 = 2 \times 2 \times 5 \times 7 \times 13$. Pour trouver les diviseurs de 1820, on réalise toutes les combinaisons des facteurs premiers un à un, deux à deux, trois à trois et quatre à quatre : on en trouve alors 24. Quelques solutions (il y en a 10) : $7 \times 4 = 28$, c'est à dire 28 billes par paquet et 65 paquets ; $5 \times 2 \times 7 = 70$, c'est-à-dire 70 billes par paquet et 26 paquets. …

- Nombres premiers entre eux. *Rappel* : deux nombres entiers naturels sont premiers entre eux si et seulement si leur PGCD vaut 1. *Autrement dit* : leur seul diviseur commun est 1.
On a : $825 = 3 \times 5 \times 5 \times 11$ et $686 = 2 \times 7 \times 7 \times 7$.
Pas de diviseur commun autre que 1, donc 825 et 686 sont premiers entre eux.
Soit $\mathbf{S} = 825 + 686 = 1511$ et $\mathbf{P} = 825 \times 686 = 565\,950$. En fait, 1511 est premier (il n'est pas divisible par aucun nombre premier inférieur à 41 et $41^2 = 1681 > 1511$). Ensuite, $P = 2 \times 3 \times 5^2 \times 7^3 \times 11$. Le seul diviseur commun à **S** et à **P** est donc 1, c'est-à-dire, **S** et **P** sont premiers entre eux.
Généralisation. Difficile ! Soient $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ deux nombres premiers entre eux, on note **S** leur somme et **P** leur produit. Il faut essayer d'établir que si $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ sont premiers entre eux, alors **S** et **P** le sont aussi.
Une piste : raisonnement par l'absurde. *Hypothèse* : $\mathbf{S} = \boldsymbol{m} + \boldsymbol{n}$ et $\mathbf{P} = \boldsymbol{m} \times \boldsymbol{n}$ ne sont pas premiers entre eux. Il existe alors un facteur premier commun noté $\boldsymbol{d}$, autre que 1. Dans ce cas, $\boldsymbol{d}$ divise **P**, mais comme $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ sont premiers entre eux, $\boldsymbol{d}$ ne peut diviser à la fois $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$; comme $\boldsymbol{d}$ divise P, il divise soit $\boldsymbol{m}$, soit $\boldsymbol{n}$. On suppose qu'il divise $\boldsymbol{m}$. Comme $\boldsymbol{d}$ divise **S**, il divise la différence $\mathbf{S} - \boldsymbol{m} = \boldsymbol{n}$. Contradiction, puisque $\boldsymbol{m}$ et $\boldsymbol{n}$ sont premiers entre eux. Donc l'hypothèse est fausse, d'où le résultat.

(iii) NOMBRES, ECRITURES et CALCULS d'hiver, …

- Les planètes. Une solution experte, why not : passage par les ***écritures scientifiques***.

V : $105 \times 10^6 = 1{,}05 \times 10^8$	**J** : $78 \times 10^7 = 7{,}8 \times 10^8$	**T** : $15 \times 10^7 = 1{,}5 \times 10^8$
M : $2250 \times 10^5 = 2{,}25 \times 10^8$	**S** : $1425 \times 10^6 = 1{,}425 \times 10^9$	**P** : $5900 \times 10^6 = 5{,}9 \times 10^9$

D'où le rangement : on range les nombres décimaux désignant le premier facteur, avec l'exposant 8 pour le deuxième facteur, de même avec l'exposant 9. A écrire.

- Quelques détails des calculs. On a : $3 - \frac{2}{7} = \frac{19}{7}$ et $1 + \frac{3}{5} = \frac{8}{5}$ d'où $\mathbf{W} = 2 - (\frac{19}{7} \div \frac{8}{5}) = 2 - (\frac{19}{7} \times \frac{5}{8}) = 2 - \frac{95}{56} = \frac{(112 - 95)}{56} = \mathbf{\frac{17}{56}}$

- <u>*Equation (1)*</u> : on trouve $\boldsymbol{x} = 0{,}8$. <u>*Equation (2)*</u> : on trouve $\boldsymbol{x} = -28{,}8$. (*Sauf erreur de calcul !*). Justement, vérifier que 0,8 est solution de *l'équation (1)* et que 28,8 est solution de *l'équation (2).* Pour chacune des deux équations, on remplace $\boldsymbol{x}$ par la valeur donnée et on vérifie que l'égalité est vraie.

- Un grand classique qui appelle, a priori, une mise en équations aboutissant à un système de deux équations à deux inconnues. On part comme ça, car il y a d'autres techniques moins directement algébriques !

On appelle $\boldsymbol{x}$ le nombre de pièces de 5 euros et $\boldsymbol{y}$ celui de 2 euros. Les informations de l'énoncé permettent d'écrire : $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 12$ et $5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 39$.

Le système à résoudre est : $\begin{cases} \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = 12 \\ 5\boldsymbol{x} + 2\boldsymbol{y} = 39 \end{cases}$. <u>*Une piste*</u> : on exprime $\boldsymbol{x}$ (ou $\boldsymbol{y}$) en fonction de $\boldsymbol{y}$ (ou $\boldsymbol{x}$) dans la première équation et on substitue $\boldsymbol{x}$ (ou $\boldsymbol{y}$) dans la seconde équation par l'expression trouvée. A « faire ». On trouve $\boldsymbol{x} = 5$ et $\boldsymbol{y} = 7$.

Mais, on peut s'en sortir autrement par une résolution dite arithmétique. Contacter **PW** pour plus de « détails ». On y reviendra, peut être !

GEOMETRIE : pistes de correction

- <u>Le programme de construction</u>.

1. La construction ne pose pas de difficulté particulière. Il suffit de savoir tracer une médiatrice à la règle graduée et au compas afin de construire un ou plusieurs angles droits du rectangle. Pour le tracer, on peut aussi utiliser le fait que c'est un parallélogramme avec un angle droit.
<u>*Remarques*</u>. On attend donc une construction <u>sans équerre</u>. Toute bonne construction est acceptée !

2. Le point **E** est sur le cercle de centre **A** et de rayon **AB** donc **AE** = **AB**. Le point **E** est sur la médiatrice de **[AB]** donc **AE** = **EB**. De ces deux résultats, on déduit que **AB** = **AE** = **EB**, c'est à dire que le triangle **AEB** est équilatéral.

2. a) Il est équivalent de montrer que les points **A** et **F** sont sur la médiatrice de **[EB]**. On a vu que **AE** = **AB** donc le point **A** est appartient à celle-ci. Par construction, le point **F** lui appartient aussi. La droite **(AF)** est donc la médiatrice de **[EB]**.

3. b) Dire que **(AF)** est la médiatrice de **[EB]** équivaut à dire que les points **E** et **B** sont symétriques par rapport à **(AF)**. Par cette symétrie axiale, les points **A** et **F** sont leur propre symétrique. Par conséquent, les angles $\widehat{FAB}$ et $\widehat{FAE}$ sont symétriques l'un de l'autre. La symétrie conservant les angles, ils sont donc égaux entre eux. De la même manière, on montre que $\widehat{BFA} = \widehat{EFA}$. On peut aussi travailler dans le triangle équilatéral **AEB**. La médiatrice est aussi bissectrice, donc $\widehat{FAB} = \widehat{FAE}$.

4. a) On a $\widehat{GAB} = \widehat{GAF} + \widehat{FAB}$. D'une part, on a $\widehat{GAB} = 90°$, car le point **G** est sur **[AD]**, côté du rectangle **ABCD**, et d'autre part, on a $\widehat{FAB} = 60°/2 = 30°$ car **(AF)** étant la médiatrice de **[EB]**, elle est aussi la bissectrice de l'angle $\widehat{EAB}$ du triangle équilatéral **AEB**. Par conséquent, on en déduit $90° = \widehat{GAF} + 30°$ c'est à dire : $\widehat{GAF} = 60°$.

Le triangle **ABF** est rectangle en **B** car $\widehat{ABC}$ est droit (**ABCD** rectangle) et le point **F** appartient à **[BC]**, par construction. On vient de voir que $\widehat{FAB}$ = 30°. Comme la somme des angles du triangle **ABF** vaut 180°, on en déduit que $\widehat{BFA}$ = 60°. On a vu au 3.b) que $\widehat{BFA}$ = $\widehat{EFA}$, on en déduit que $\widehat{EFA}$ = 60°. Le point **G** appartenant à la demi-droite **[FE)**, on a donc $\widehat{GFA}$ = 60°.

4.b) D'après la question précédente, $\widehat{GAF}$ = $\widehat{GFA}$ = 60°. L'angle $\widehat{AGF}$ est le troisième angle du triangle **GAF**, on a donc $\widehat{AGF}$ = 60°, ce qui établit que le triangle est équilatéral.

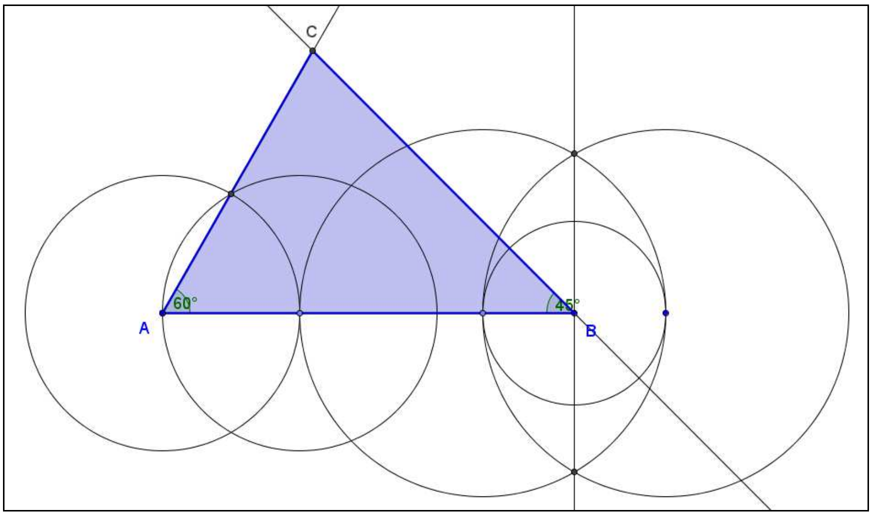
- <u>L'autre construction</u>.

1. Construction ci-dessous, non à l'échelle, réalisée avec le logiciel ***GeoGebra***.
Quelques éléments de justification. Pas de souci particulier pour le tracé du segment **[AB]**.

➢ <u>Pour l'angle de 60°</u>. On peut s'appuyer sur le fait que les angles d'un triangle équilatéral sont égaux à 60°. On construit au compas un triangle équilatéral de longueur de côté quelconque.

➢ <u>Pour l'angle de 45°</u>. On construit un angle droit au compas, puis on trace la bissectrice de cet angle. « Terminer » la construction.

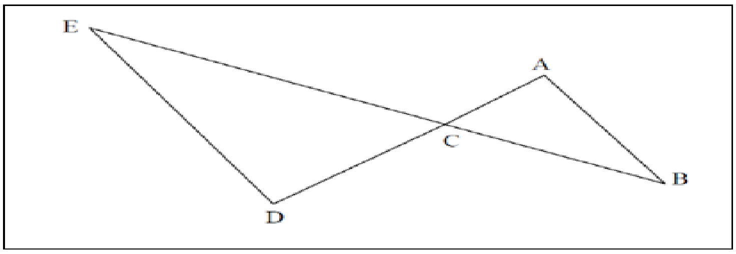
2. Le pauvre M1, il a tout faux ! Le triangle **ABC** n'est pas isocèle. On utilise un argument sur la valeur des angles. En effet, la somme des angles d'un triangle est égale à 180°. Or, on a : 60° + 45° = 105° et 180° – 105° = 75°.



- <u>Du côté de THALES</u>

1) a) (AB) et (ED) parallèles ?
Si les points **A**, **C**, **D** sont alignés et **AC** = 3 cm, **AD** = 8,4 cm alors **CD** = **AD** – **DC** = 5,4 cm.
Si les points **B**, **C**, **E** sont alignés et **BC** = 4,5 cm, **BE** = 12,6 cm alors **CE** = **BE** – **BC** = 8,1 cm.

<u>Méthode 1</u>. Utilisation de la réciproque du théorème de Thalès.
On calcule les rapports $\frac{CA}{CD}$ et $\frac{CB}{CE}$.
$\frac{CA}{CD} = \frac{3}{5,4} = \frac{30}{54} = \frac{5}{9}$ et $\frac{CB}{CE} = \frac{4,5}{8,1} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$. Les points **A**, **C**, **D** et **B**, **C**, **E** sont alignés dans le « même » ordre avec $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$; donc, d'après la réciproque du théorème de Thalès, on a : **(AB) // (ED)**.



<u>Méthode 2</u>. Utilisation d'une homothétie de centre **C**
Soit ***h*** l'homothétie de centre **C** qui transforme **A** en **D**. Le rapport de ***h*** est : $k = -\frac{CA}{CD} = -\frac{3}{5,4} = -\frac{30}{54} = -\frac{5}{9}$ (Ce rapport est négatif car **C** est un point du segment **[AD]**).
Prouvons que ***h*** transforme **B** en **E**. On a : $\frac{CB}{CE} = \frac{4,5}{8,1} = \frac{45}{81} = \frac{5}{9}$

Puisque **C** est un point du segment **[BE]**, alors $k = -\frac{\mathbf{CB}}{\mathbf{CE}} = -\frac{5}{9}$; On en conclut que le point **E** est l'image de **B** par ***h***.
L'homothétie ***h*** transforme donc la droite **(AB)** en la droite **(DE)** et on sait deux droites homothétiques sont parallèles, donc **les droites (AB) et (ED) sont parallèles.**

1) b) Égalité des angles $\widehat{CED}$ et $\widehat{ABC}$

Méthode 1. Utilisation des angles alternes-internes

Dans la configuration des deux droites **(AB)** et **(ED)** avec la sécante **(BE)**, les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CED}$ sont alternes-internes. De plus, les droites **(AB)** et **(ED)** sont parallèles donc **les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CED}$ sont égaux.**

Méthode 2. Si deux droites sont parallèles, toute perpendiculaire à l'une est perpendiculaire à l'autre.
Les droites **(AB)** et **(ED)** sont parallèles, la droite **(AB)** est perpendiculaire à la droite **(AD)**, donc les droites **(AD)** et **(ED)** sont perpendiculaires. On en conclut que l'angle $\widehat{CDE}$ vaut 90°.
Dans le triangle **ABC**, rectangle en **A**, on a $\widehat{ABC} = 90° - \widehat{ACB}$. Dans le triangle **CDE**, rectangle en **D**, $\widehat{CED} = 90° - \widehat{ECD}$. Or les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ECD}$ sont opposés par le sommet donc ils sont égaux.
Donc les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{CED}$ sont égaux.

2) a) Aire du triangle ABC

Dans le triangle ABC, rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ donc $AB^2 = BC^2 - AC^2$.

$4{,}5^2 - 3^2 = 11{,}25$ donc $AB = \sqrt{11{,}25}$ cm.

$\text{Aire(ABC)} = \frac{AC \times AB}{2} = \frac{3\text{ cm} \times \sqrt{11{,}25}\text{ cm}}{2}$ donc Aire(ABC) ≈ 5,031 cm².

L'aire du triangle ABC est 5 cm² (au cm² près).

2) b) Aire du triangle EDC

Le triangle CED est un agrandissement du triangle ABC : il existe donc une homothétie de centre C et de rapport $\frac{9}{5}$ (voir le calcul à la question 1) a)) qui transforme ABC en CED.

Dans cet agrandissement, les longueurs sont multipliées par le coefficient $\frac{9}{5}$, les aires sont multipliées par le coefficient $\left(\frac{9}{5}\right)^2$ soit $\frac{81}{25}$.

Donc $\text{Aire(CED)} = \frac{81}{25} \times \text{Aire(ABC)} = \frac{243\sqrt{11{,}25}}{50}$ cm² donc Aire(CED) ≈ 16,301 cm²

L'aire du triangle EDC est 16 cm² (au cm² près).