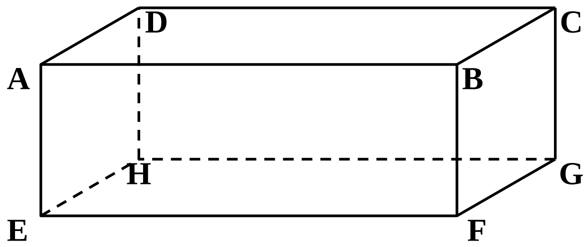
GEOMETRIE dans l'ESPACE : quelques mises au point.

Avertissement : ce document contient quelques exercices et items spécifiques de **la géométrie dans l'espace** (ou plus médiatiquement de *la géométrie spatiale !*) au programme du CRPE. L'objet du TD est donc de faire le point sur un certain nombre de connaissances nécessaires (*et non suffisantes !*) pour aborder (*sereinement ?*) les questions de la partie mathématique de l'épreuve du CRPE.

EXERCICE 1.

On considère le dessin ci-contre.
Il représente, en perspective cavalière, un pavé droit.
Compléter chaque phrase par l'une des quatre expressions :

☺ dans la réalité uniquement ;
☺ sur le dessin uniquement ;
☺ dans la réalité et sur le dessin ;
☺ ni dans la réalité et ni sur le dessin.



1) Les points **E**, **H** et **B** sont alignés.
2) Les (*supports des*) segments **[BF]** et **[BC]** sont perpendiculaires.
3) Les (*supports des*) segments **[EF]** et **[DC]** sont parallèles.
4) Les (*supports des*) segments **[DH]** et **[AB]** sont sécants.
5) Les segments **[BG]** et **[CF]** ont la même longueur et sont perpendiculaires.
6) La face **(ABCD)** est un parallélogramme, non rectangle.
7) La face **(ABFE)** est un rectangle.

Indication : on peut utiliser des couleurs en surlignant les objets sur lesquels on travaille.

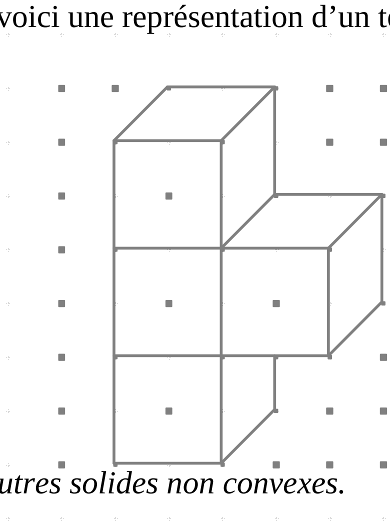
EXERCICE 2.

Construire un patron de chacun des solides suivants.

1) Un pavé droit de dimensions : 5,5cm, 4cm et 2,5cm.
2) Un prisme droit à base triangulaire, dont les dimensions de la base sont : 5,6cm, 4,2cm et 3,3cm et la hauteur 7cm
3) Un cylindre droit de hauteur 5cm et de rayon du disque de base 2cm.
4) Un cône de révolution de hauteur 6cm et de diamètre de disque de base 4cm.

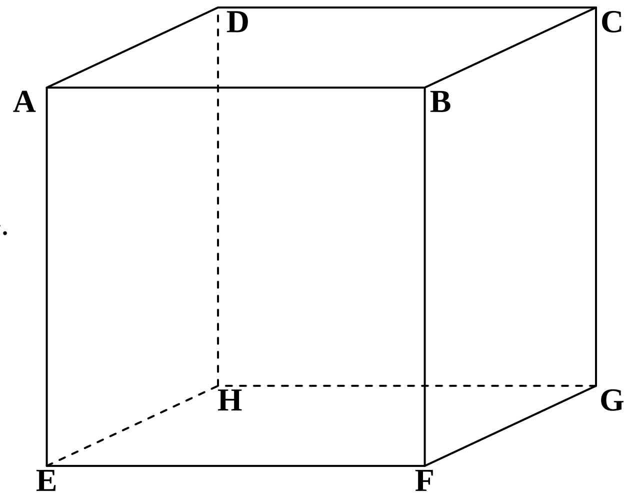
EXERCICE 3.

Le tétracube. On appelle tétracube, un solide obtenu par un assemblage de quatre cubes identiques collés face contre face[1].
On travaille dans un réseau pointé, voici une représentation d'un tétracube. Le but de l'exercice est de les représenter **TOUS**.



*Indication : il y a **deux** pavés et **?** autres solides non convexes.*

[1] Un point important : on dira que deux tétracubes sont différents si, par un déplacement quelconque, ils ne peuvent pas être mis dans un même moule.



EXERCICE 4.

Soit le cube ci-contre d'arête **a**.

En coupant ce cube suivant le plan **(FCH)**,
on obtient deux polyèdres ou deux solides.

L'exercice ne concerne que le solide ne contenant pas **G**.
On l'appelle le solide $\boxed{S}$.

Questions :

1) Donner le nombre d'arêtes et de sommets de $\boxed{S}$.
2) Nommer chacune des faces triangulaires de $\boxed{S}$.
(Préciser la nature de chacun des triangles, justifier).
3) Calculer le volume de $\boxed{S}$.
(Indication : ***volume pyramide = 1/3 × aire (base) × hauteur***).

EXERCICE 5.

Le problème du verre rempli à **mi-hauteur** ou à **mi-volume**.

PREMIER CAS. On dispose d'un verre ayant la forme d'un **cylindre** droit de révolution. Est-ce que si on remplit ce verre à mi-hauteur ou à mi-volume, on boit la même quantité de liquide (*non alcoolisé, bien entendu !*) ? Expliquer.

DEUXIEME CAS. On dispose d'un **verre à pied de forme conique**. On le remplit à moitié ; oui, mais, à **mi-hauteur** ou à **mi-volume** ? C'est une question à étudier !

1) On remplit ce verre à **mi-hauteur**. On s'intéresse au rapport $\frac{\mathbf{VL}}{\mathbf{VC}}$, où **VL** est le volume du liquide (*le même que précédemment !*) et **VC** le volume du cône. On demande d'évaluer ce rapport $\frac{\mathbf{VL}}{\mathbf{VC}}$.
2) On remplit maintenant ce même verre à **mi-volume**. Evaluer le rapport $\frac{\mathbf{h}}{\mathbf{k}}$, où **h** désigne la hauteur du verre conique et **k** la hauteur du liquide. On peut travailler avec les hypothèses suivantes : hauteur **h** du verre conique = 10cm et diamètre **d** du verre conique = 10cm.
3) *C'est l'heure de l'apéritif. Qui d'entre nous y a pensé ?*

EXERCICE 6.

1) On considère un tétraèdre régulier en bois dont la mesure de la longueur de chaque arête vaut **a**. On tronque ce tétraèdre en coupant le morceau obtenu à partir de chaque sommet en retirant le tiers de chaque arête. Indiquer le nombre de faces, de sommets et d'arêtes du nouveau solide en précisant la nature des faces. Facultatif : déterminer le volume de ce nouveau solide en fonction de **a**.

2) On considère un cube en bois dont la mesure de la longueur de chaque arête vaut **b**. On tronque ce cube en coupant le morceau obtenu à partir de chaque sommet en retirant la moitié de chaque arête. Décrire le nouveau solide ainsi obtenu. Facultatif : déterminer le volume de ce nouveau solide en fonction de **b**.

3) Pour aller plus loin, essayer de représenter les solides tronqués définis ci-dessus.

« PISTES » de CORRECTION.

<u>Quelques définitions et propriétés.</u>

☺ On appelle **solide géométrique** tout objet indéformable ayant trois dimensions, limité par des surfaces fermées. On peut distinguer deux types de solides :

(i) ceux délimités par une surface uniquement composée de polygones, on les appelle les polyèdres ;

(i) ceux dont une au moins des parties de la surface le constituant n'est pas un polygone, on les appelle les non-polyèdres.

<u>Quelques exemples emblématiques</u> : le pavé droit est un polyèdre (*il est délimité par des rectangles*) et le cône de révolution est un non-polyèdre : il n'est pas délimité uniquement par des polygones.

☺ Où il est question de vocabulaire spécifique : **faces**, **arêtes** et **sommets**, voir les bons manuels de préparation au CRPE !

☺ On peut reconnaître un polyèdre convexe au fait que si on le « pose » sur une surface plane, il « repose » alors sur une face entière. Sinon, on dit que le polyèdre est non-convexe (ou concave).

☺ Parmi les <u>polyèdres convexes</u>, il y en a qui ont des caractéristiques particulières. Ce sont ceux dont :

(i) toutes les faces sont des polygones réguliers ;

(ii) le même nombre d'arêtes part de chaque sommet en formant le même angle. Ces polyèdres sont les **polyèdres réguliers** (il en existe **cinq** : on les appelle aussi les solides de Platon, *à chercher*).

On s'arrête là pour cette partie.

☺ Autre point de vocabulaire : **prisme**, **pyramide**, **cylindre de révolution**, **cône de révolution** et **boule**, voir (*bis*) les bons manuels de préparation au CRPE.

<u>Représentations planes des solides.</u> On dispose de plusieurs représentations d'un solide sur un plan : des représentations en perspective (centrale, cavalière, axonométrique, …), une représentation des différentes vues, des patrons. Ce passage de l'espace au plan entraîne une perte d'informations. En effet, une représentation ne peut rendre compte à la fois de la vision d'un objet et de ce qu'on sait de lui, d'un point de vue mathématique. Ces « phénomènes » ont été étudiés par B. PARZYSZ qui a mis en évidence le conflit entre le « **VU** » ou le « **PERCU** » et le « **SU** ». C'est un point délicat de l'enseignement !

On continue du côté des mathématiques : **<u>postulats de la géométrie euclidienne dans l'espace</u>**. Il s'agit de définir ce que sont des **droites**, des **plans**, de caractériser les positions relatives de droites et de plans. Voir la correction de **<u>l'exercice 1</u>**. Ainsi que les bons manuels de géométrie de fin de collège ou de début de lycée !

On termine par **<u>les types de problèmes</u>** à traiter en géométrie dans l'espace.
En fait, on retrouve les types de problèmes identifiés en géométrie plane : **DECRIRE**, **CLASSER, RECONNAITRE**, **REPRODUIRE**, **CONSTRUIRE**, **REPRESENTER**, **CALCULER**, …

<u>RECONNAITRE</u> un solide : à partir d'un de ses patrons ou une de ses représentations.
<u>DECRIRE</u> un solide, oralement ou par écrit : en le voyant ou en l'imaginant.
<u>REPRESENTER</u> un solide en perspective ou autrement, en le voyant ou pas.
<u>CONSTRUIRE</u> un solide, à partir d'un patron ou d'autres informations. <u>CONSTRUIRE</u> un patron.
<u>CALCULER</u> des longueurs, des aires et des volumes, par application de formules ou autrement. …

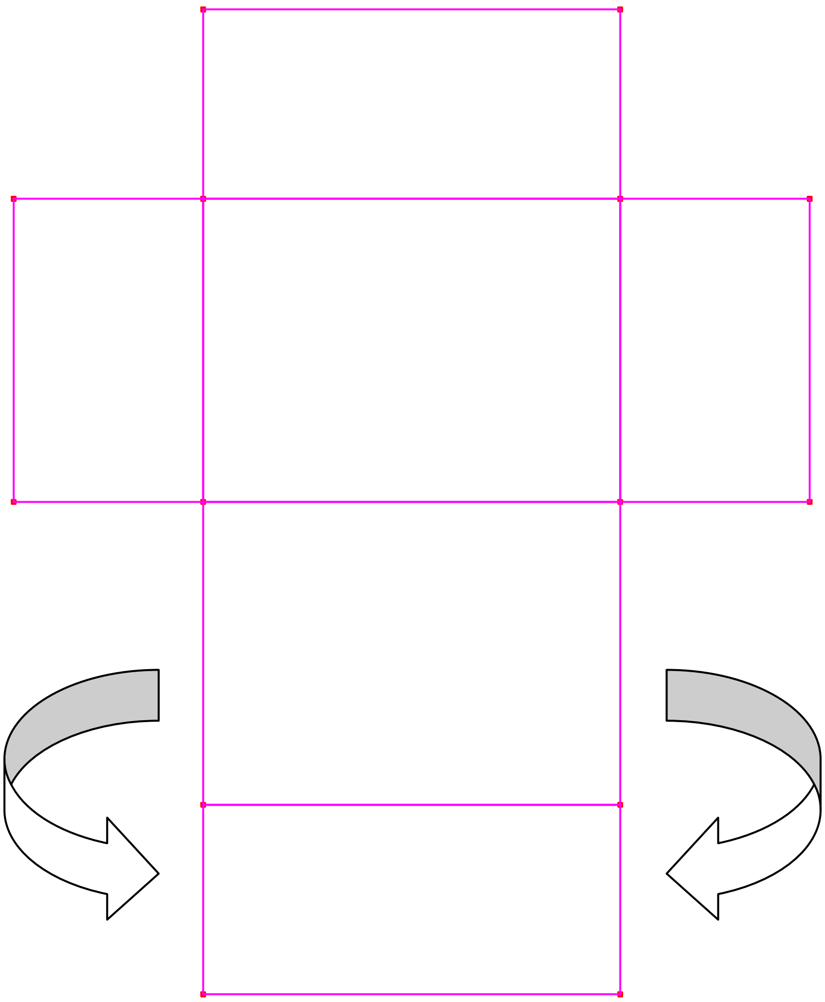
Se reporter aux **CM** de géométrie pour plus de précisions.

EXERCICE 1.

1) Les points **E**, **H** et **B** ne sont pas alignés, ni dans la réalité, ni sur le dessin.
2) Les segments **[BF]** et **[BC]** sont **perpendiculaires** dans la réalité, mais pas sur le dessin. C'est une information qu'on perd dans la représentation en perspective cavalière (*voir page précédente*).
3) Les segments **[EF]** et **[DC]** sont **parallèles** dans la réalité et sur le dessin. En effet, la perspective cavalière conserve le parallélisme. On a **(EF) // (AB)**, car côtés opposés du rectangle **(ABFE)** et **(DC) // (AB)**, car côtés opposés du rectangle **(ABCD)**, les droites **(EF)** et **(DC)** sont donc parallèles, car toutes deux parallèles à une même troisième droite **(AB)**.
4) Les segments **[DH]** et **[AB]** ne sont pas **sécants** dans la réalité, même si elles le sont sur le dessin. En fait, les segments **[DH]** et **[AB]** sont **orthogonaux**. L'orthogonalité est le « pendant » de la perpendicularité dans l'espace : les droites ne se coupent pas nécessairement. On a **(AB)** perpendiculaire au plan **(ADHE)**, cette droite est alors orthogonale à toute droite de ce plan, donc, **(AB)** est orthogonale à **(DH)**.
5) Les deux segments **[BG]** et **[CF]** n'ont pas la même longueur sur le dessin, ils ne sont pas perpendiculaires ni sur le dessin, ni en réalité. *Etudier le cas où la face **(BCGF)** est un carré.*
6) a) Dans la réalité, **(ABCD)** est rectangle comme face d'un pavé droit.
b) Par convention, la perspective cavalière conserve le parallélisme ; donc, sur le dessin, on a **(AB)** parallèle à **(DC)** et **(AD)** parallèle à **(BC)** ; **(ABCD)** est un parallélogramme.
7) a) Dans la réalité, **(ABFE)** est un rectangle, comme face d'un pavé droit.
b) Sur le dessin, **(ABFE)** est aussi un rectangle.

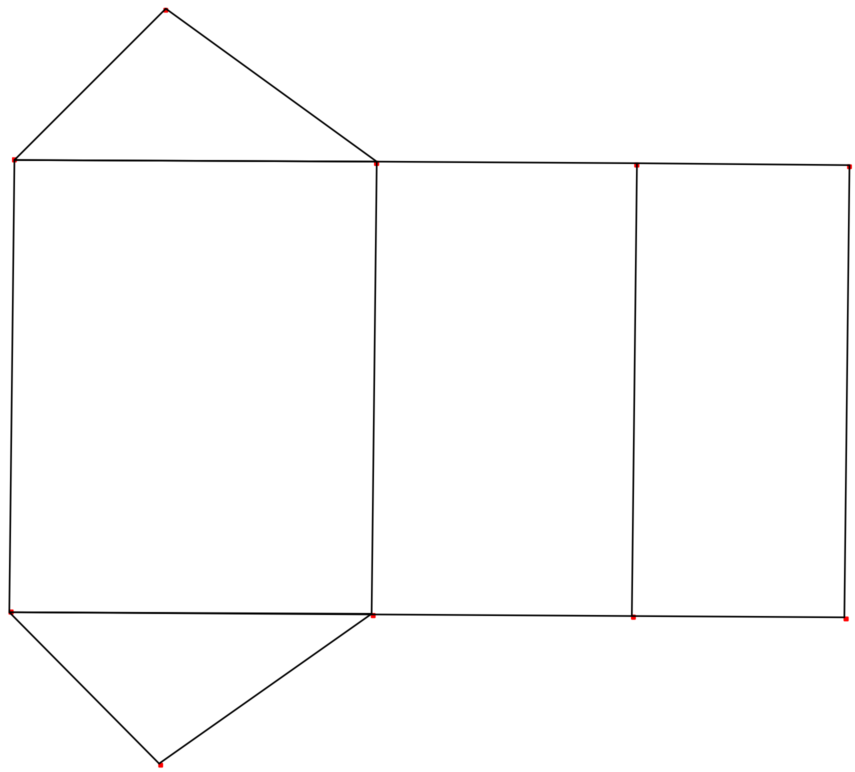
EXERCICE 2

1) Facile ! **Patron d'un pavé droit** : les dimensions ne sont pas marquées.

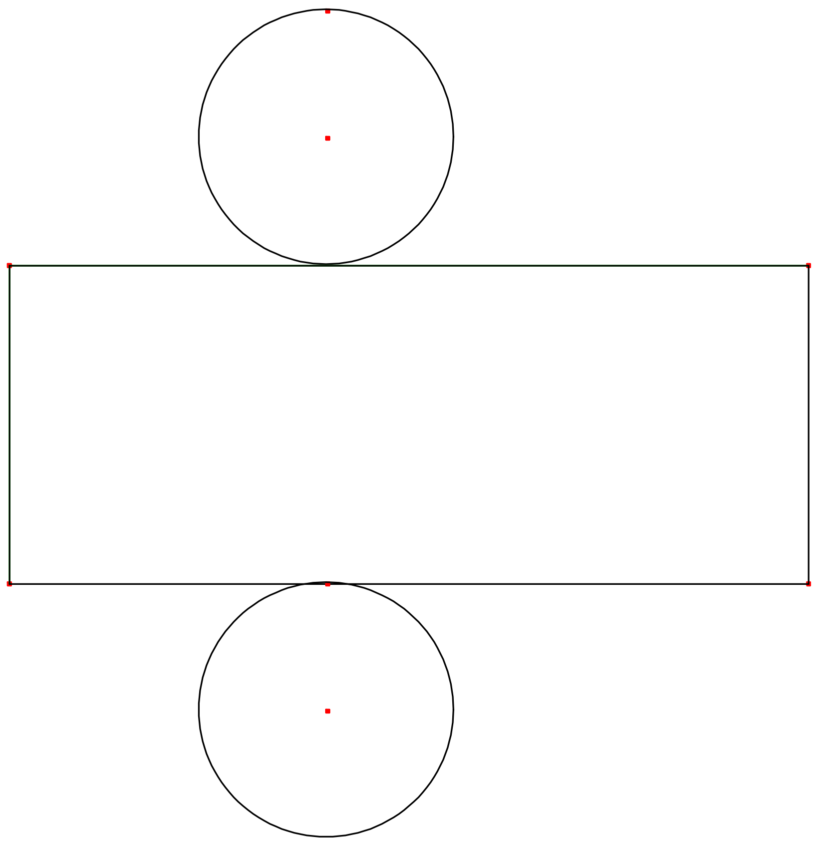


Il y a une erreur dans le patron ci-dessus : il faut échanger les deux rectangles du bas, comme indiqué par les flèches.

2) Facile aussi. **Patron d’un prisme droit à base triangulaire**, penser au TOBLERONE. Miam, Miam...



3) Patron du cylindre droit de révolution : **deux disques et une surface cylindrique**.



Pour les deux patrons de cette page, les dimensions n’ont pas été respectées.

4) <u>Justification pour la construction du patron du cône</u>.

Appelons **S** le sommet du cône et **M** un point sur le cercle de base. La longueur **SM** est constante. Le patron va donc être composé d'un disque de diamètre 4cm et d'une portion de disque dont il reste à déterminer rayon et angle.

Si **O** est le centre du cercle de base, le triangle **(SOM)** est un triangle rectangle en **O**. D'après le théorème de Pythagore, on a donc $\mathbf{SM^2} = 6^2 + 2^2 = 36 + 4 = 40$.

SM est donc la racine carrée de 40 soit environ 6,32 (cm). <u>Vocabulaire</u> : on dit que **[SM]** est une génératrice du cône de sommet **S**.

La longueur de la circonférence de rayon **SM** correspond à un angle au centre de 360°.

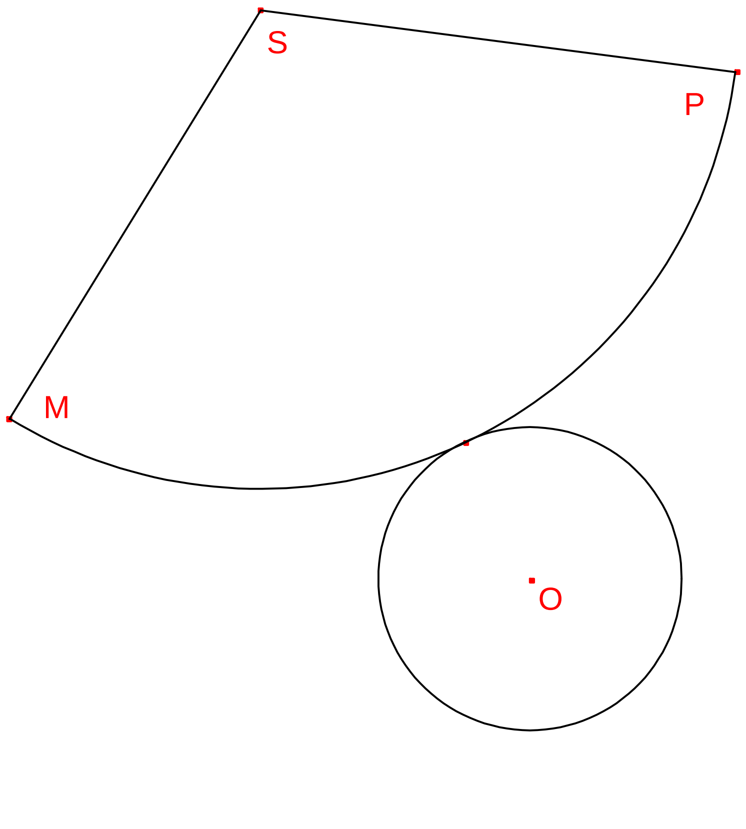
Il faut déterminer la valeur de l'angle $\widehat{MSP}$.

L'arc $\overset{\frown}{MP}$ a pour longueur la longueur du cercle de centre **O** et de rayon 2cm.

Il y a **proportionnalité** entre la longueur de l'arc et l'angle au centre correspondant.

Valeur de l'angle au centre (en degré).	**360**	**?**
Longueur de l'arc intercepté (en cm).	$2 \times pi \times \sqrt{40}$	$2 \times pi \times 2$

Le calcul aboutit à un angle de **114°**, ce qui permet de conclure.

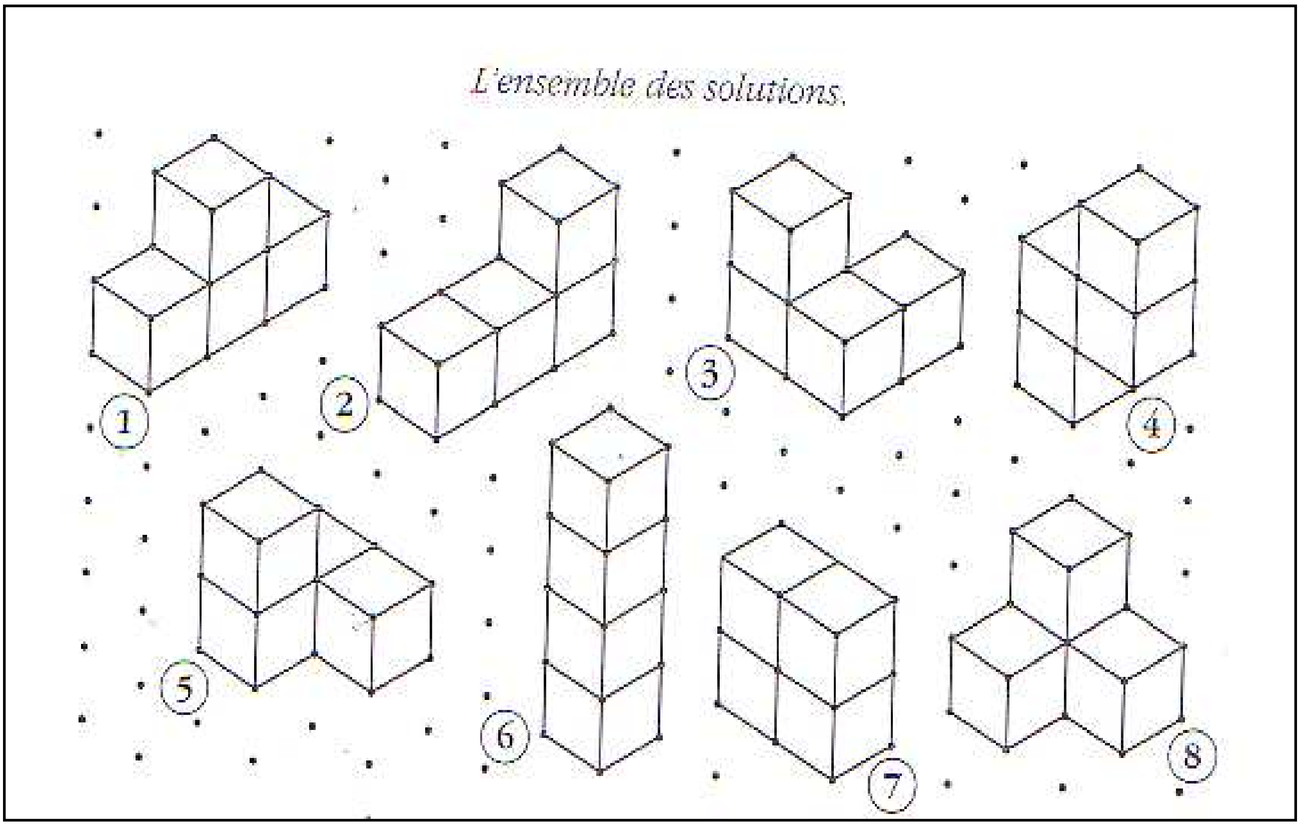


Pour mettre à l'épreuve la technique proposée, construire un patron, à l'échelle 1, d'un cône de révolution de rayon de disque de base égal à 3cm et de hauteur 8cm.

EXERCICE 3

Encore un exercice astucieux qui demande de bien « voir » les assemblages. Dans ce cas, il est conseillé de réaliser les assemblages.
Il y a **deux** pavés droits et **six** solides non convexes. Il faut bien voir que les solides $\boxed{3}$ et $\boxed{5}$ ne rentrent pas dans le même moule, c'est-à-dire qu'ils ne sont pas identiques !
Autre point, la perspective utilisée ici n'est pas une ***PC***.

La valise POLYDRON et les cubes manipulés en **TD** ont confirmé la réponse.



EXERCICE 4.

1) On a remplacé **3** arêtes du cube par **3** arêtes qui sont des diagonales des faces carrées du cube. Le nombre d'arêtes de $\boxed{S}$ reste donc **12** arêtes. On a supprimé un sommet du cube. Le nombre de sommets de $\boxed{S}$ est donc de **7**.
2) a) Les segments **[CH]**, **[CF]** et **[HF]** sont des diagonales des faces carrées du cube initial : **(CHF)** est donc un **triangle équilatéral**.

   b) **(FBC)** et **(DHC)** sont des **triangles rectangles isocèles** : les angles $\widehat{FBC}$ et $\widehat{HDC}$ sont des angles droits comme angles des faces carrées du cube initial ; **BC= BF = HD = DC** comme côtés des faces carrées du cube initial.
3) Volume de $\boxed{S}$ = volume du cube **(ABCDEFGH)** – volume de la pyramide **(CFGH)**. C'est la formule la plus efficace pour calculer ce volume !
   En prenant **C** comme sommet de la pyramide et **(FGH)** comme base triangulaire, on a les calculs suivants :
   aire (FGH) = ½ aire (EFGH) = ½ a^2. Volume (CFGH) = $\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} a^2 \times a = \frac{1}{6} a^3$.

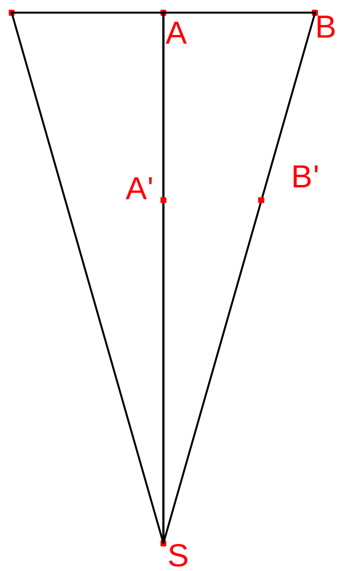
   D'où : $\boxed{\textbf{Volume(S)} = a^3 - \frac{1}{6} a^3 = \frac{5}{6} a^3}$.

EXERCICE 5.

PREMIER CAS.

Le volume d'un cylindre est le produit de l'aire de la base par la hauteur. La base étant une constante, il y a **proportionnalité** entre volume et hauteur de liquide. Donc, dans ce cas, remplir le verre à mi-hauteur équivaut à remplir le verre à mi-volume.

DEUXIEME CAS.



1) Dans le cas où on remplit le verre à mi-hauteur, le rapport $\dfrac{\mathbf{VL}}{\mathbf{VC}}$ est égal à $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{8}}$. Pourquoi ?

- ♣ On utilise une propriété dite du « **k, $\mathbf{k^2}$, $\mathbf{k^3}$** » vue au collège qui nous dit que si on multiplie (ou on divise) par **k** une dimension d'un solide, alors l'aire de son patron est multiplié (ou divisée) par $\mathbf{k^2}$ et le volume par $\mathbf{k^3}$.
- ♣ On a oublié cette propriété. Il faut s'en sortir par le calcul ! On va utiliser les informations numériques données dans l'énoncé. **VC** = 1/3 × pi × 5 × 5 × 10 = 1/3 × pi × 250 (cm^3). **VL** = 1/3 × pi × 2,5 × 2,5 × 5 = 1/3 × pi × 31,25 (cm^3). Or $\dfrac{250}{31,25}$ = **8**, d'où la réponse. Résultat qui peut surprendre !

2) Maintenant, on remplit le verre à mi-volume, on chercher à évaluer la hauteur du liquide. (*Voir la figure ci-dessus*).

VL = 1/3 × pi × 125 (cm^3) (♥), puisque le verre est rempli à mi-volume.

Or **VL** = 1/3 × pi × **A'B'** × **A'B'** × **SA' (♦)**, en prenant les notations de la figure. Il nous manque ainsi le rayon (= **A'B'**) et la hauteur (= **SA'**). On peut exprimer **SA'** en fonction de **A'B'**, dans le triangle **(SAB)**, puisqu'on connaît **AB** (= 5cm) et **SA** (=10cm). En effet, les droites **(A'B')** et **(AB)** sont parallèles. On peut ainsi appliquer le théorème de Thalès au triangle **(SAB)**. On a : $\dfrac{\mathbf{SA'}}{\mathbf{SA}} = \dfrac{\mathbf{SB'}}{\mathbf{SB}} = \dfrac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{AB}}$; c'est-à-dire : $\dfrac{\mathbf{A'B'}}{\mathbf{5}} = \dfrac{\mathbf{AB}}{\mathbf{10}}$, d'où **2 × A'B' = AB**, autrement dit : le rayon est la moitié de la hauteur (*ouf !*).

Application : on identifie les formules (♥) et (♦**).**

On obtient **:** 1/3 × pi × 125 = 1/3 × pi × $\dfrac{\mathbf{SA'}}{\mathbf{2}} \times \dfrac{\mathbf{SA'}}{\mathbf{2}}$ × **SA'**. On simplifie, il reste **500 = SA'$^{\mathbf{3}}$** ; on doit donc chercher un nombre (*positif*) qui, élevé au cube donne 500. On peut utiliser la calculatrice et la touche $\boxed{\mathbf{x^y}}$ ou faire afficher la racine cubique de 500. Mais on peut aussi raisonner et trouver une bonne approximation de la valeur voulue en testant des cubes à calculer. Par exemple : 7 × 7 ×7 = 7^3 = 343 et 8 × 8 ×8 = 8^3 = 512. Cette information est suffisante pour dire que le niveau est situé entre 7cm et 8cm. On continue … Finalement, on obtient une hauteur à peu près égale à **7,9cm**. D'où le rapport demandé.

EXERCICE 6.

La meilleure solution pour répondre aux deux questions de cet exercice est de fabriquer un patron de chacun des deux solides, puis de « remonter » ce solide, afin de trouver le nombre d'arêtes, le nombre de faces, leurs natures, et le nombre de sommets.

De plus, pour le cube tronqué, nous vous renvoyons à l'exercice « **le cube tronqué** », construit à partir des sujets du CRPE de CAEN 1995 et La REUNION 1996. (*Les réponses aux questions de* ***l'exercice 6*** *sont étudiées en détails !*).