Chapitre 1
Obligations et taux d'intérêt

Yannick Lucotte

ylucotte@gmail.com

Introduction à la Finance

L3 Economie-Gestion

Université d'Orléans

Septembre - Octobre 2018

Introduction

- Taux d'intérêt: variable fondamentale en économie et en finance

→ influence le choix entre consommation et épargne

→ influence les décisions d'investissement

→ influence les choix de portefeuille (arbitrage monnaie / titre): cf. préférence pour la liquidité et motif de spéculation chez Keynes

1) Qu'est-ce qu'un taux d'intérêt?
2) Pourquoi existe-t-il **des** taux d'intérêt?

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

1.1. La notion de valeur actualisée

- L'actualisation est la principe suivant lequel on exprime la valeur ou le rendement d'un actif de maturité donnée en valeur actuelle

$\longrightarrow$ un euro aujourd'hui n'est pas équivalent à un euro demain

- Exemple 1: je place 1 € pendant un an sur un compte rémunéré à 10%. J'ai 1 € aujourd'hui. J'aurai $1 \times (1 + 0{,}1) = 1{,}10€$ dans un an. Soit:

1 € aujourd'hui = 1,10 € demain

$\longrightarrow$ un euro aujourd'hui vaut plus qu'un euro dans un an

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

1 € aujourd’hui → 1,10 € dans un an

1/1,10€ (≈ 0,91€) aujourd’hui ← 1 € dans un an

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple 2: Considérons un placement de 100 €, au taux fixe de 10%, pendant *n* années. Combien cela rapporte-t-il?

$$\underline{\text{1ère année}} : \quad 100 \text{ euros} \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 110 \text{ euros}$$

$\underline{\text{2ème année}}$:

$$110 \text{ euros} \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 121 \text{ euros} = 100 \times (1 + 0,1)^2$$

$\underline{\text{3ème année}}$:

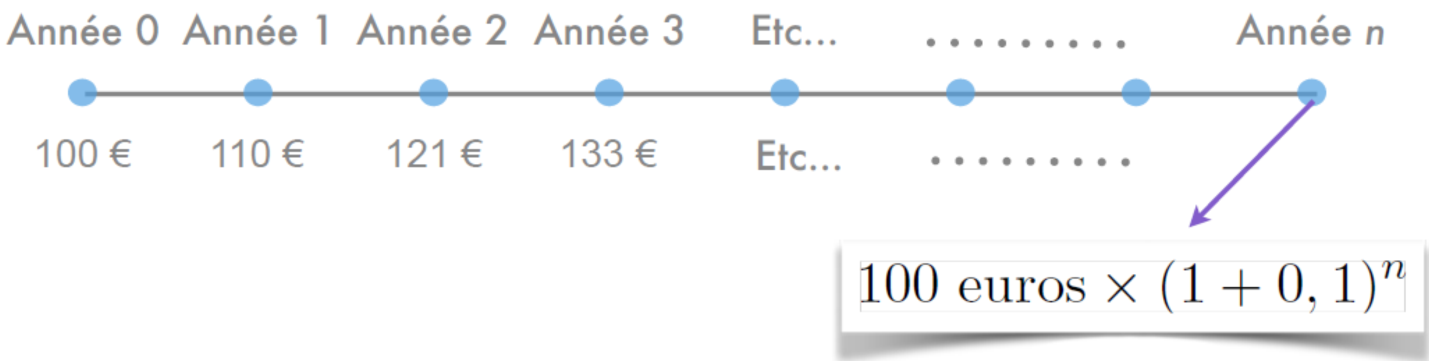
$$121 \text{ euros} \times \left(1 + \frac{10}{100}\right) = 133 \text{ euros} = 100 \times (1 + 0,1)^3$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\underline{\text{n-ième année}} : \quad 100 \text{ euros} \times (1 + 0,1)^n$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

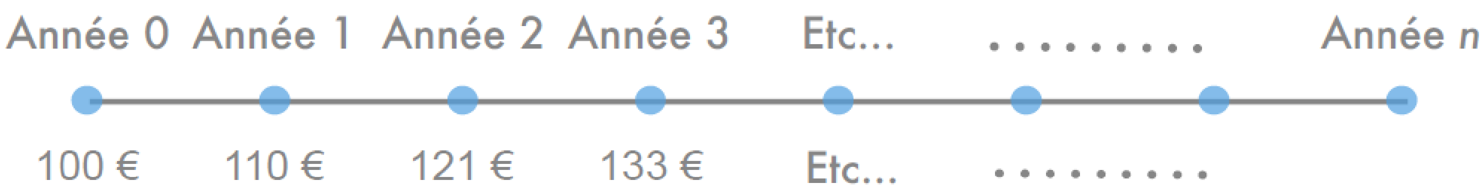
- Echéancier de 100 euros placés à 10% pendant *n* années:



- Pour un taux d'intérêt de 10%, il est équivalent de recevoir 100 euros aujourd'hui (année 0) ou…
  - 110 euros dans un an
  - 121 euros dans deux ans
  - 133 euros dans trois ans…

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- L'échéancier peut être également lu dans l'autre sens:



  - 133 € dans 3 ans valent 100 € aujourd'hui
  - 121 € dans 2 ans valent 100 € aujourd'hui

- On peut ainsi exprimer en valeur actuelle un montant à recevoir (ou à débourser) dans *n* années

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- C'est la définition même du principe d'actualisation

- Précisément, dans cet exemple, on dira que la valeur actualisée de 133 € à percevoir dans 3 ans est égale à 100 €, soit:

$$\frac{133}{\left(1+\frac{10}{100}\right)^3} = 100$$

- Définition de la valeur actualisée (VA) d'un montant futur (VF) à percevoir dans *n* années, étant donné *i* le taux d'intérêt (ou taux d'actualisation):

$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n}$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple 3: Quelle est la valeur actualisée (VA) de 250 € recevable dans 2 ans, si le taux d'intérêt est de 15% par an?

$$VA = \frac{VF}{(1+i)^n} = \frac{250}{\left(1+\frac{15}{100}\right)^2} = 189{,}04 \text{ €}$$

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Exemple 4: Vous avez gagné à une loterie. Vous avez le choix entre:
  - Recevoir 20 millions d’euros immédiatement
  - Recevoir 1 million d’euros par an pendant 20 ans

$\rightarrow$ Que faire sachant que $i = 10\%$?

- Méthode: comparer 20 millions d’€ d’aujourd’hui (pas besoin d’actualiser) à la VA des flux de 1 million d’euros annuels sur 20 ans

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Calcul de la VA des flux de 1 million d'euros annuels sur 20 ans:

Versement l'année (t) =		1.000.000
Versement de l'année prochaine (année t+1)	$VA = \frac{1.000.000}{(1+0,1)}$	$= 909.090$
Versement de l'année t+2	$VA = \frac{1.000.000}{(1+0,1)^2}$	$= 826.446$
⋮ etc.	⋮	
Total =		9.400.000

- 9.400.000 € < 20.000.000 € !

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

1.2. Le taux actuariel

- Le taux actuariel est le taux d'intérêt qui égalise la VA des flux de paiements futurs associés à un titre (ou à un placement) à la valeur actuelle (courante) de ce titre

→ *« yield to maturity »*

- Exemple 1: J'emprunte 100 €, à 10%, sur un an. Quel est le taux actuariel?

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Le taux actuariel est le taux d’intérêt qui égalise la valeur actualisée du paiement futur à la valeur actuelle du prêt

  - Valeur actuelle du prêt: 100 euros
  - Valeur du paiement futur: $VF = 100 \times (1 + 0{,}1) = 110$ €

- On cherche *i* tel que:

$$100 = \frac{110}{(1+i)}$$

Soit: $1 + i = \frac{110}{100} \Leftrightarrow i = 10\%$

- Dans cet exemple très simple, le taux actuariel est égal au taux d’intérêt du prêt

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple 2: le cas d'un prêt à versements constants (ex: crédit immobilier, crédit à la consommation,…)

- J'emprunte 1000 € remboursables en 25 versements annuels de 126 euros. Quel est le taux d'intérêt associé à ce prêt?

Je cherche i tel que $\cancel{1000 \times (1 + i) = 126 \times 25}$ NON !!

Le prêt court sur 25 ans, il faut donc actualiser !

- Solution: Il faut calculer le taux actuariel, c'est-à-dire le taux d'intérêt qui égalise la VA des annuités futures à la valeur actuelle du prêt.

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Sachant que le versement annuel est de 126 € (à partir de l'année prochaine):

$$\text{1ère année} \Rightarrow \text{1er versement de 126 € :} \quad VA = \frac{126}{(1+i)}$$

$$\text{2ème année} \Rightarrow \text{2ème versement de 126 € :} \quad VA = \frac{126}{(1+i)^2}$$

$$\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots$$

$$\text{25ème année} \Rightarrow \text{dernier versement de 126 € :} \quad VA = \frac{126}{(1+i)^{25}}$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- J'emprunte 1000 € remboursables en 25 versements annuels de 126 euros. Quel est le taux d'intérêt associé à ce prêt?

- Pour trouver le taux actuariel, on égalise donc:

$$1000 = \frac{126}{(1+i)} + \frac{126}{(1+i)^2} + \frac{126}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{126}{(1+i)^{25}}$$

- Et on cherche le taux d'intérêt *i* pour lequel l'égalité est vérifiée

- Dans cet exemple, le résultat est: $i = 12\%$

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- **Formule générale**: le taux actuariel est le taux d’intérêt *i* tel que:

$$Valeur\ actuelle\ du\ prêt = \frac{V}{(1+i)} + \frac{V}{(1+i)^2} + \cdots + \frac{V}{(1+i)^n}$$

V: montant du versement annuel (fixe)

n: nombre d’années jusqu’à l’échéance

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

1.3. Le taux actuariel d’une obligation

- Rappel: une obligation est un titre de dette qui prévoit le paiement annuel d’un montant fixe d’intérêts jusqu’à l’échéance, ainsi que le remboursement du capital à cette date

- Valeur de l’obligation à l’émission: « valeur faciale » ou « valeur nominale » ou « pair ». C’est par rapport à cette valeur que sont calculés les intérêts

- Le montant versé chaque année: le « coupon »

- Le « taux nominal » ou « taux de coupon »: $\frac{coupon}{valeur\ nominale}$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple: Achat d'une obligation d'une valeur faciale de 100 euros, et qui promet le versement d'un coupon annuel de 15 euros. Quel est le taux nominal?

$$Taux\ de\ coupon = \frac{15}{100} = 0{,}15 \ \Rightarrow 15\%$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Comment calculer le taux actuariel d'une obligation?

- **Principe**: trouver *i* qui égalise:

  - La valeur actualisée des versements futurs (c.à.d. le flux actualisé des coupons + la valeur actualisée du remboursement final)

  - Au prix courant de l'obligation, noté *P* (sur le marché secondaire)

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple: soit une obligation de valeur faciale 1000 €, de coupon 100 €, de maturité 10 ans, avec remboursement au pair.

1ère année $\Rightarrow$ 1er versement de coupon : $VA = \dfrac{100}{(1+i)}$

2ème année $\Rightarrow$ 2ème versement de coupon : $VA = \dfrac{100}{(1+i)^2}$

$\vdots$

10ème année $\Rightarrow$ dernier versement de coupon + VA du remboursement final : $VA = \dfrac{100}{(1+i)^{10}} + \dfrac{1000}{(1+i)^{10}}$

<u>Soit</u> :

$$P = \frac{100}{(1+i)} + \frac{100}{(1+i)^2} + \frac{100}{(1+i)^3} \dots \frac{100}{(1+i)^{10}} + \frac{1000}{(1+i)^{10}}$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Généralisation:
  - P: prix courant de l'obligation
  - C: coupon annuel
  - F: valeur du remboursement final
  - *n*: maturité de l'obligation

- Le taux actuariel d'une obligation est le taux d'intérêt *i* qui égalise:

$$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{F}{(1+i)^n}$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple (suite): soit une obligation de valeur faciale 1000 €, de coupon 100 €, de maturité 10 ans, avec remboursement au pair.

Taux actuariel en fonction de P

P (en €)	Taux actuariel
1200	7,13 %
1100	8,48 %
1000	10 %
900	11,75 %
800	13,81 %

Commentaires:

1) Si $P = V_N$ alors $i = i_N$
2) Relation négative entre P et i

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Le taux actuariel d'une obligation perpétuelle

- Une obligation perpétuelle est une obligation dont la maturité est infinie

$\rightarrow$ versement de coupons à l'infini, mais pas de remboursement final (il s'agit donc d'une rente)

- Calcul du taux actuariel:

$$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \ldots$$

$$\Leftrightarrow P = C \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n}$$

Suite géométrique de raison 1/(1+i) et de 1er terme 1/(1+i)

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- On peut donc écrire:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \left(\frac{1}{1+i}\right) \times \frac{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)^n}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)}$$

$$\text{et comme } \left(\frac{1}{1+i}\right) < 1 \text{ alors } \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{1+i}\right)^n = 0$$

$$\text{Donc } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^n} = \frac{1}{1+i} \times \frac{1}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{\frac{1}{1+i}}{1-\left(\frac{1}{1+i}\right)} = \frac{1}{i}$$

$$\text{Soit finalement } \boxed{P = \frac{C}{i}}$$

C'est le prix actuel d'une obligation perpétuelle de coupon C.

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Dans ce cas, le taux actuariel se calcule facilement:

$$P = \frac{C}{i} \Leftrightarrow \boldsymbol{i = \frac{C}{P}}$$

- La relation négative entre le taux d’intérêt *i* et le prix *P* apparaît ici évidente

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Bien comprendre la relation inverse entre *i* et *P*

- Lorsqu'il y a émission d'obligations: quel est le niveau de taux d'intérêt?

→ le « *benchmark* »

- Soit une hausse des taux d'intérêt sur les marchés de dette entre *t* et *t+1*. Sur la marché secondaire, on trouvera:
  - Des obligations émises en t au taux i_t
  - Des obligations émises en $t+1$ au taux i_{t+1} avec $i_{t+1} > i_t$

→ le prix des obligations émises en *t* baisse

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Le cas des obligations zéro-coupon

- Une obligation zéro-coupon *(« discount bonds »)* est une obligation qui est émise à un prix inférieur à sa valeur faciale, qui ne verse pas de coupon, et qui est remboursée à échéance à sa valeur faciale

- Obligations zéro-coupon beaucoup utilisées par les Etats pour un financement à court terme: Japon, USA (« T-bills »), pays européens

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Exemple: une obligation zéro-coupon de valeur facile 1000 € peut être émise à 900 € pour 1 an, et remboursée à maturité à 1000 €

- Le taux actuariel est alors i tel que:

Prix d’achat actuel

Remboursement dans 1 an

$$900 = \frac{1000}{(1+i)}$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{1000}{900} - 1 = 0{,}11 \rightarrow 11{,}11\%$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Généralisation:

$$P = \frac{F}{(1+i)^n}$$

- On en déduit:

$$(1+i)^n = \frac{F}{P}$$

- Soit:

$$\boldsymbol{i = \left(\frac{F}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1}$$

Avec $F > P$, sinon $i < 0\ldots$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

1.4. Le taux d'intérêt apparent

- Le taux d'intérêt apparent est une approximation du taux actuariel, telle que:

$$i_{apparent} = \frac{C}{P}$$

- Le taux apparent correspond au taux actuariel d'une obligation perpétuelle. Il permet de calculer facilement, en 1ère approximation, le taux actuariel d'une obligation

- Il s'agit d'une bonne approximation:
  1) Quand l'obligation est très éloignée de son échéance
  2) Quand le taux d'intérêt est élevé

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Explications:

  - Rappel: $$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \frac{C}{(1+i)^3} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{F}{(1+i)^n}$$

  - Quand l’obligation est très éloignée de son échéance $\longrightarrow$ dans l’expression des flux futurs actualisés:

$$\left(\frac{1}{1+i}\right)^n \to 0$$

  - Quand le taux d’intérêt est élevé: la valeur actualisée des paiements effectués dans le futur éloigné devient négligeable

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Remarque:

$$i_{apparent} = \frac{C}{P} = \frac{\frac{C}{V_N}}{\frac{P}{V_N}} = \frac{i_N}{\frac{P}{V_N}}$$

Si $P = V_N$ alors $i_{apparent} = \frac{C}{V_N} = i_N$

- De plus, on a vu que si $P = V_N$ alors $i_{actuariel} = i_N$. Par conséquent:

Si $P = V_N$ alors $i_{apparent} = \frac{C}{V_N} = i_N = i_{actuariel}$

$\rightarrow$ Plus le prix d’une obligation est proche du pair (valeur de l’obligation à l’émission), plus sont taux apparent est une bonne approximation de son taux actuariel

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Remarques:

  - Le taux d’intérêt apparent est négativement lié au prix de l’obligation (idem pour le taux actuariel)

  - Le taux d’intérêt apparent et le taux actuariel évoluent dans le même sens: une hausse (baisse) du taux apparent signifie toujours une hausse (baisse) du taux actuariel

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemples de cotations:

	Désignation	Cours en 2011 (en % de la V_N)	Taux actuariel
(A)	Emprunt d'Etat zéro-coupon à 10 ans, échéance 2021	52,3	6,69 %
(B)	Emprunt d'Etat zéro-coupon à 5 ans, émis en 2007, échéance 2012	95	5,26 %
(C)	Obligation de l'entreprise Bidon® 5,5% remboursement en 2012	100,23	5,25 %
(C')	Obligation de l'entreprise Bidon® 5,1% remboursement en 2021	110,17	4 %
(D)	OAT 8,35% échéance 2015	125,78	3 %

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

A. Taux d’intérêt actuariel facile à calculer (zéro-coupon):

$$52{,}3 = \frac{100}{(1+i)^{10}} \Leftrightarrow i = \left(\frac{100}{52{,}3}\right)^{\frac{1}{10}} - 1 = 0{,}0669 \rightarrow \mathbf{6{,}69\%}$$

B. Taux d’intérêt actuariel facile à calculer puisque l’échéance est dans un an:

$$i = \left(\frac{100}{95}\right) - 1 = 0{,}0526 \rightarrow \mathbf{5{,}26\%}$$

C. A mesure que l’échéance se rapproche (c.à.d. que la maturité se raccourcit), le cours d’une obligation se rapproche du pair

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

D. OAT: Obligation Assimilable au Trésor

→ obligation d'Etat d'une durée comprise entre 2 et 50 ans

→ obligations émises par tranches successives (au gré des besoins de financement de l'Etat), mais de telle sorte que toutes les tranches présentent des conditions identiques de durée et de taux

→ le prix d'émission varie afin de tenir compte des évolutions de taux d'intérêt du marché entre les différentes périodes d'émission

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

1.5. Distinction entre taux d’intérêt et taux de rendement

- Un taux nominal élevé ne suffit pas à faire d’une obligation un bon placement. En effet, tout dépend de l’évolution du taux d’intérêt de marché.

- La « bonne » mesure de ce qu’on gagne (ou perd) en détenant une obligation pendant une période donnée est le taux de rendement

- La taux de rendement tient compte du gain total lié à la détention d’un titre, c.à.d. les intérêts perçus **ET** le gain ou la perte en capital (si $P \neq V_N$). Soit pour un titre détenu entre t et $t+1$:

$$gain\ total = C + (P_{t+1} - P_t)$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Le taux de rendement est le taux R qui, appliqué au prix d'achat du titre, donne le gain total. Soit:

$$prix\ d'achat \times R = gain\ total$$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{R = \frac{gain\ total}{prix\ d'achat}}$$

- Soit, si on note P_t le prix d'achat, et sachant que $gain\ total = C + (P_{t+1} - P_t)$:

$$R = \frac{C + (P_{t+1} - P_t)}{P_t}$$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- On peut réécrire cette définition ainsi:

$$R = \frac{C}{P_t} + \left(\frac{P_{t+1} - P_t}{P_t} \right)$$

Taux d'intérêt apparent

Taux de gain en capital ou «taux de plus-value» (noté g)

Soit : $\boxed{R = i_{app} + g}$

- Remarques:
  - $R \neq i_{app}$ (sauf si $g = 0$)
  - $R \neq taux\ acturiel$
  - $R \neq i_N$ (sauf si $g = 0$). En effet, même si $P_t = V_N$, alors $R = \frac{C}{V_N} + g = i_N + g$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple:

  - On considère des obligations de maturités différentes (remboursement au pair), même qui présentent le même taux apparent lors de l'achat

  - On suppose qu'on conserve ces obligations un an

  - On considère que le taux actuariel passe de 10 à 20% au cours de cette année de détention

  - Question: Quelle est la conséquence en terme de rendement?

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

Nb d’années avant l’échéance au moment de l’achat (1)	Taux d’intérêt apparent au moment de l’achat en % (2)	Prix d’achat en € (3)	Prix de revente en € (4)	Taux de gain en capital (5)	Taux de rendement = (2)+(5)
30	10	1000	503	-49,7 %	-39,7 %
20	10	1000	516	-48,4 %	-38,4 %
10	10	1000	597	-40,3 %	-30,3 %
5	10	1000	741	-25,9 %	-15,9 %
2	10	1000	917	-9,17 %	+0,83%
1	10	1000	1000	0	+10,0%

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

Le prix de vente est calculé à partir de :

$$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} + \ldots + \frac{C}{(1+i)^n} + \frac{VF}{(1+i)^n}$$

avec :

- $n = 1, 2, 5, ..., 30$
- $i = 20\%$
- $C = 100 \rightarrow$ en effet, si i_{app} = 10%, alors c'est que C/P_t = 10% (cf. définition)

  Soit $C = i_{app} \times P_t$ = 10% x 1000 = 100 €

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Commentaires:

  - Même une obligation qui porte un intérêt initialement élevé peut générer un rendement négatif, dès lors que le taux d'intérêt du marché augmente (ici de 10 à 20%)

  - Une hausse du taux d'intérêt entraîne une baisse du prix des obligations existantes (relation inverse entre P et i)

  - Plus la maturité est longue, plus la variation du prix induite par une variation du taux d'intérêt est importante (cf. le concept de « duration » étudié dans la suite du cours)

  → une obligation d'échéance lointaine est plus sensible aux mouvements de taux d'intérêt: -49,7% pour une obligation à 30 ans; -25,9% pour une obligation à 5 ans

  - Le rendement est le résultat a posteriori d'un placement, alors que le taux actuariel est le résultat auquel peut s'attendre a priori un agent qui s'apprête à détenir un actif jusqu'à son échéance

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

1.6. Taux d’intérêt nominal et taux d’intérêt réel

- Jusqu’à présent, nous n’avons évoqué que des taux d’intérêt nominaux

- Taux d’intérêt nominal: mesure du coût d’une dette ou mesure du revenu associé à une créance

- Exemple: si un titre de 100 euros me rapporte 10% d’intérêt par an, je gagne 10 euros. C’est donc un supplément de pouvoir d’achat futur (achat de biens et de services)

- Problème: si au cours de l’année, le prix des biens et services augmente de 10%, le supplément de pouvoir d’achat généré à partir de mon titre est nul

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Dès lors, pour évaluer le coût d’une dette, ou le revenu lié à une créance, en termes de pouvoir d’achat de biens et de services, c’est-à-dire en termes réels, il faut tenir compte de l’inflation

- Définition: d’après l’équation de Fisher, on montre que le taux d’intérêt réel *ex ante* se définit tel que:

$$r = i - \pi^a$$

- Exemple: si le taux d’intérêt est de 8%, mais que l’inflation anticipée est de 10%, alors le patrimoine financier d’un agent se détériore en termes réels: $8\% - 10\% = -2\% < 0$

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Dans ces conditions, un prêteur est moins disposer à accorder un prêt

- Au contraire, il est intéressant d'emprunter

- L'inflation profite aux agents débiteurs et est défavorable aux agents créditeurs (épargnants)

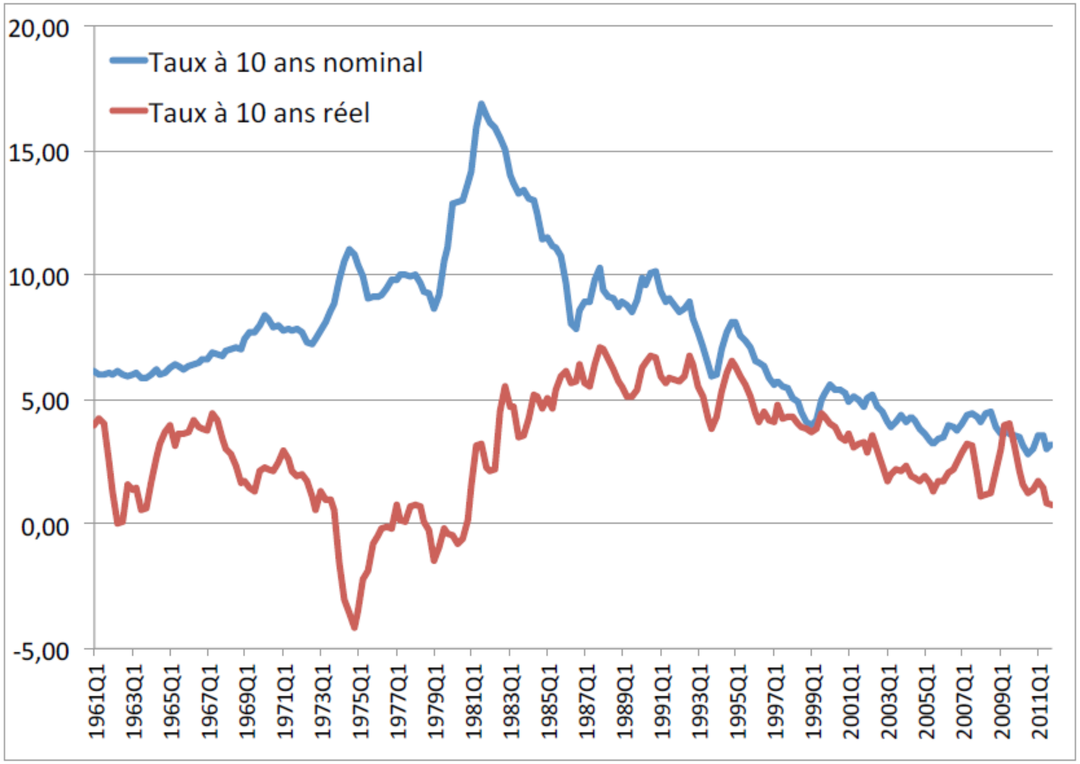
→ taxe d'inflation (Mankiw)

- Taux d'intérêt réel: bonne mesure des conditions de prêt et d'emprunt

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Il est plus facile de calculer le taux d'intérêt ex post, tel que:

$$r = i - \pi$$



Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

1.7. La duration d'une obligation

- Définition: partons d'un exemple:
  - Considérons une obligation de maturité 4 ans, de valeur faciale $V_N = 1000$ €, et de coupon 50 € (soit un taux du coupon de 5%). Dans 4 ans, son propriétaire aura au total récupéré:

$$1000 + 50 + 50 + 50 + 50 = 1200 \text{ €} \ (en\ valeur\ non\ actualisée)$$

- 1200 euros, c'est ce que l'investisseur aura au total dans 4 ans, sous l'hypothèse qu'il n'a pas réinvesti ses coupons

- S'il les réinvestit, alors les coupons vont eux-mêmes générer des intérêts

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- On peut alors se poser 2 questions presque équivalentes:

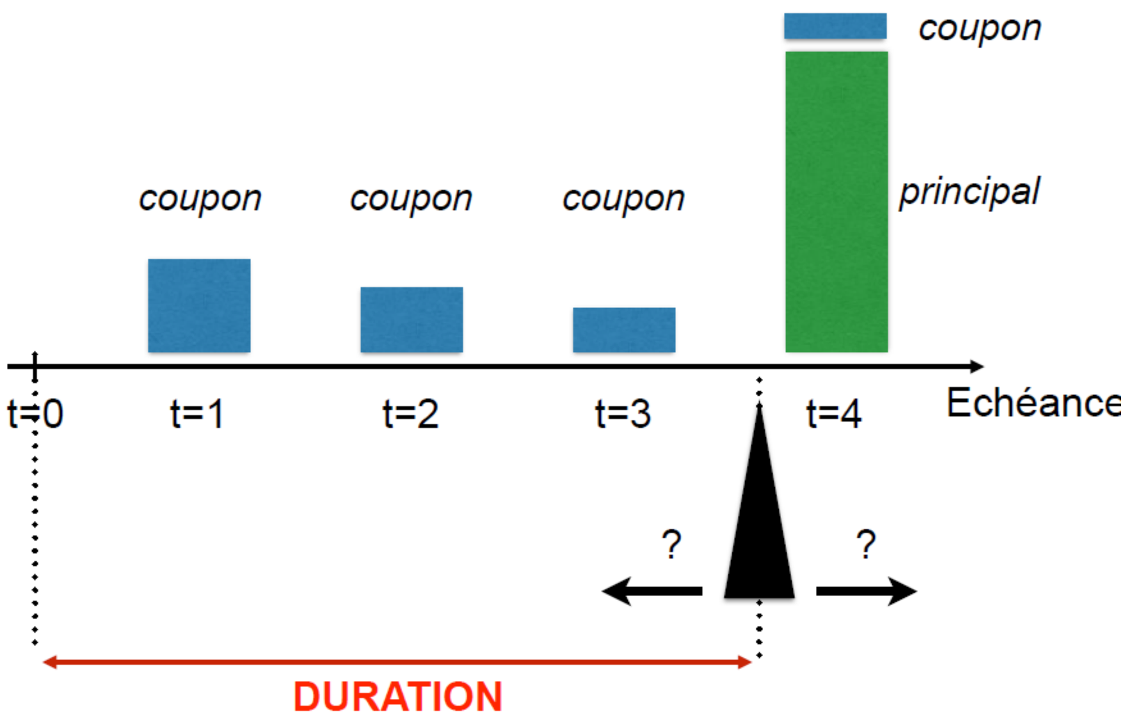
1) Si on réinvestit les coupons, combien obtiendrons-nous au bout de 4 ans? (assurément plus que 1200 €)

2) Si on réinvestit les coupons, en combien de temps atteindra-t-on les 1200 euros? (durée < 4 ans assurément)

→ cette durée correspond précisément à ce qu’on appelle la duration d’une obligation

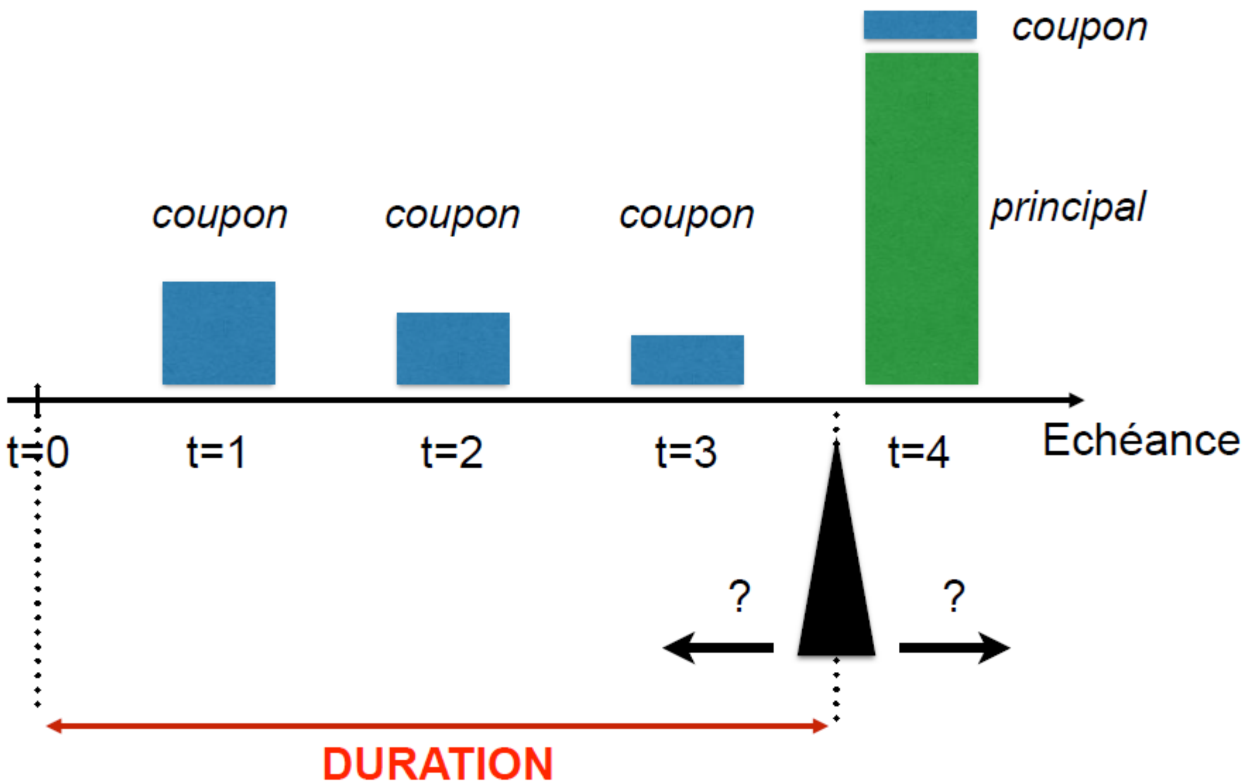
Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- On a l'habitude de représenter le concept de duration à partir du schéma suivant représentant une balance:



NB : les coupons sont ici actualisés (d'où décroissance)

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?



On cherche à placer le pivot de la balance à l'endroit où il assure l'équilibre parfait de la balance. La valeur d'abscisse correspondante est une durée (depuis t=0, date d'achat de l'obligation). Cette valeur = **la duration**.

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Définition: la duration est la durée qu'il faut pour que la détention d'une obligation donnée, avec réinvestissement des coupons, procure l'équivalent du montant promis par la détention jusqu'à l'échéance de cette obligation sans réinvestissement des coupons

- Quels sont les déterminants de la duration?

1) Le temps: la duration est d'autant plus importante (à coupons donnés) que la maturité est élevée.

Mais la duration est forcément inférieure (tout au plus égale) à la maturité résiduelle de l'obligation. Comme la maturité résiduelle diminue avec le temps, la duration elle-même diminue au fur et à mesure que le temps passe.

2) Le niveau des coupons: plus les coupons sont élevés, plus ils procureront de revenus s'ils sont réinvestis. La duration sera alors courte. A l'inverse, des coupons faibles impliquent une duration longue.

Cas extrême: obligation zéro-coupon: la duration est la plus longue possible puisqu'elle correspond exactement à la maturité.

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Interprétation et utilisation du concept de duration: la duration permet de mesurer la sensibilité d’une obligation au taux d’intérêt.

- Cette sensibilité doit être prise en compte par les investisseurs qui veulent se protéger contre le risque de taux (qui cherchent à le minimiser)

- **Rappel préalable** : il convient de rappeler que le prix (cours) d’une obligation évolue inversement avec le taux d’intérêt. On peut le comprendre de deux façons

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

1) Revenons à la définition du cours d'une obligation. Le prix d'une obligation correspond à la somme actualisée des flux qu'elle génère, soit :

$$P = \frac{C}{(1+i)} + \frac{C}{(1+i)^2} \frac{C}{(1+i)^3} + \cdots + \frac{C+RF}{(1+i)^n}$$

avec *P* le prix courant de l'obligation sur le marché secondaire, *C* le coupon, *i* le taux d'intérêt et *RF* le remboursement final (qu'on supposera être égal au principal).

On voit clairement, dans cette définition, que toute hausse du taux d'intérêt *i* fait baisser la valeur de la somme à droite du signe égal (*i* intervient au dénominateur). Par conséquent, pour que l'égalité soit assurée, il faut que *P* (à gauche du signe égal) diminue aussi. A l'inverse, une baisse de *i* fait augmenter le prix *P* de l'obligation

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

2) Explication alternative (plus « économique ») : si le taux du marché augmente, alors de nouvelles obligations vont être émises à un taux d'intérêt plus élevé que celui proposé par les obligations déjà émises.

Notre obligation existante rapportera donc moins que les nouvelles obligations. Elle constitue un « produit » qui rapporte moins.

Les investisseurs accepteront de l'acquérir sur le marché secondaire à condition que son prix baisse (elle est moins bien, son prix doit baisser). Ainsi, quand le taux d'intérêt augmente (diminue), le prix des obligations existantes baisse (augmente).

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Avant de voir comment calculer la duration, comprenons que la duration fournit une approximation de l’amplitude du changement de prix d’une obligation, en pourcentage, pour une variation du taux d’intérêt de 1% (ou 100 points de base) = une mesure de la sensibilité du prix de l’obligation aux mouvements du taux d’intérêt.

- La duration = exprimée en année

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Exemple :
  - Si une obligation a une duration égale à 5 ans : cela signifie que lorsque le taux d'intérêt augmente (baisse) de 1%, le prix de l'obligation diminue (augmente) de 5% environ.
  - Soit une obligation de duration égale à 7,5 ans. Si le taux d'intérêt augmente de 2%, alors le prix de l'obligation va baisser d'environ 15%.
  - Soit une obligation de maturité 3 mois (c'est-à-dire duration = 0,25) ; alors une hausse de 1% du taux d'intérêt du marché va faire baisser le prix de l'obligation de 0,25% environ.
- A partir de ces interprétations, on voit que plus la duration est élevée (faible), plus (moins) l'obligation est sensible aux mouvements du taux d'intérêt. Une obligation de duration 6 ans est deux fois plus sensible qu'une obligation de duration 3 ans

→ **La duration fournit une valeur approchée de cette sensibilité**

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- La duration : un outil d'arbitrage (et d'immunisation): la duration est utile aux investisseurs dans leur choix de portefeuille :

  - Les investisseurs qui anticipent une baisse des taux d'intérêt du marché vont privilégier l'achat d'obligations à duration longue (son prix va d'autant plus augmenter que la duration est élevée)

  - A l'inverse, les investisseurs qui anticipent une hausse des taux d'intérêt vont préférer des obligations à duration courte (ils réduisent ainsi leur exposition à la hausse des taux, qui devrait faire baisser le prix de l'obligation)

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Le concept de duration est également important pour l'investisseur qui souhaite se protéger (« s'immuniser ») contre le risque de taux (c'est là qu'intervient la notion d'**immunisation).**

- Explication : si le taux d'intérêt augmente:
  - D'une part le prix de l'obligation diminue
  - Mais d'autre part les coupons réinvestis (en nouvelles obligations plus rémunératrices) vont rapporter davantage.

- L'investisseur va chercher à *immuniser* son portefeuille contre les effets de cette hausse de taux. ***Immuniser*** **c'est faire en sorte que ces deux effets inverses se neutralisent**.

- On montre que dans le cas simple d'une seule variation du taux d'intérêt, la période de détention immunisant le porteur contre cette variation correspond justement à la **duration** de l'obligation.

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Calcul de la duration: la duration se calcule en faisant la somme des flux actualisés (coupons) multipliée par le temps écoulé depuis l’émission (en nombre d’années), et en divisant la valeur obtenue par la somme actualisée des flux (= le prix de l’obligation). Soit:

$$D = \frac{\sum_{t=1}^{N} \frac{t.C_t}{(1+i)^t}}{\sum_{t=1}^{N} \frac{C_t}{(1+i)^t}}$$

avec

- D = la duration
- N = le nombre total d’annuités (= nombre d’années x remboursements par an)
- C = flux financiers (= coupon et/ou principal)
- i = le taux actuariel
- t = temps écoulé depuis l’émission (en nombre d’années)

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Application: Considérons une obligation de durée de vie égale à 5 ans, avec un coupon de 5% annuel et de valeur faciale 100. Calculons la duration sous l’hypothèse que le taux de marché (ou le taux actuariel) est égal à 3%

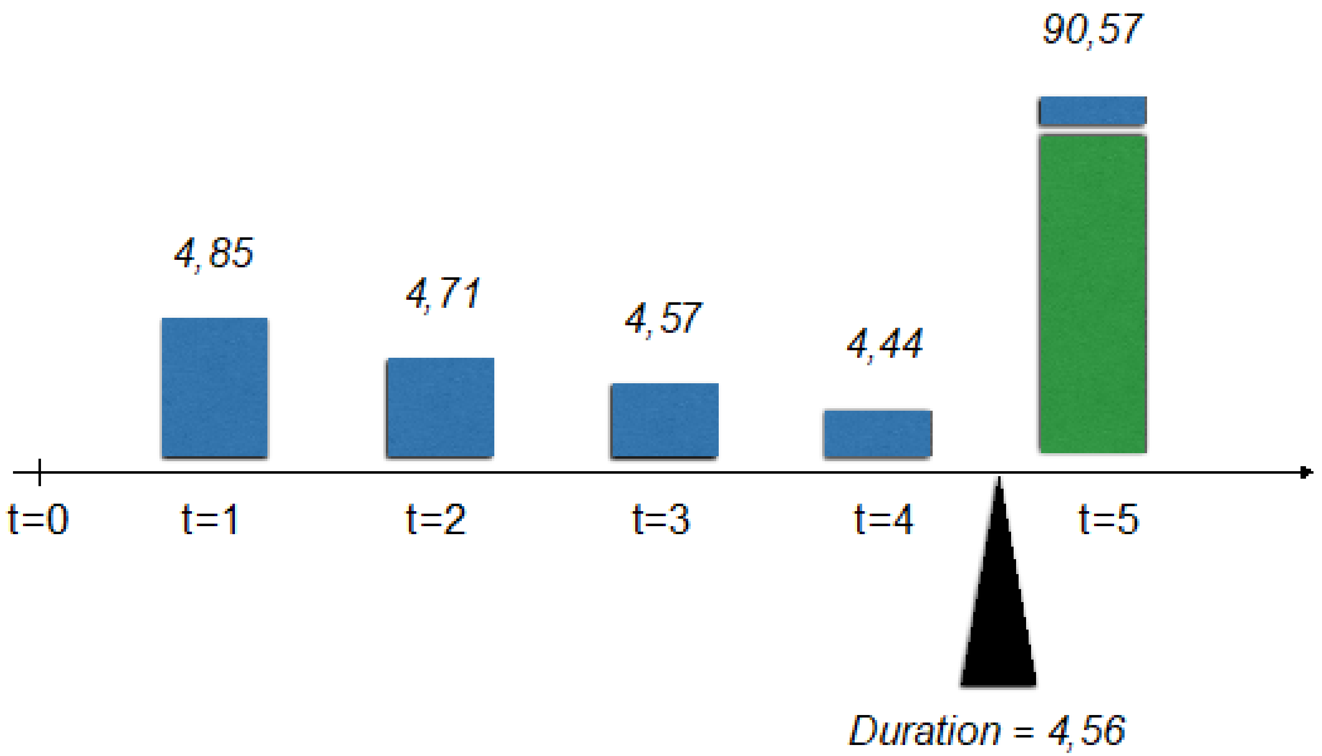
Durée (t)	Flux (C)	Dénominateur	Numérateur (*)
1	5	$5/(1+3\%) = 4{,}85$	4,85
2	5	$5/(1+3\%)^2 = 4{,}71$	9,42
3	5	$5/(1+3\%)^3 = 4{,}57$	13,72
4	5	$5/(1+3\%)^4 = 4{,}44$	17,76
5	105	$105/(1+3\%)^5 = 90{,}57$	452,86
	SOMME =	109,16	498,64

(*) numérateur de la formule = dénominateur x *t*

La duration est donc ici égale à 498,64 / 109,16 = **4,56** (années)

(NB : pour un taux actuariel = 3%, le prix de l’obligation = 109,16)

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?



Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

- Calcul de la valeur approchée de la duration: on montre qu'il est possible d'approcher la valeur de la duration en calculant la moyenne des variations de prix obtenues en augmentant et en baissant le taux d'intérêt de 100 points de base

- Partant de l'exemple précédent:

  - considérons que le taux d'intérêt baisse de 100 pb ; soit i = 2%. Alors, le cours de l'obligation passe à 114,14 (démo tableau ci-dessous)

  - considérons que le taux d'intérêt augmente de 100 pb ; soit i = 4%. Alors le cours de l'obligation serait égal à 104,45 (cf. démo tableau ci-dessous).

Section 1. Qu'est ce qu'un taux d'intérêt?

Si le taux actuariel baisse de 100pb	
1	4,901960784
2	4,805843906
3	4,711611673
4	4,61922713
5	95,10173503
SOMME =	**114,1403785**

Si le taux actuariel augmente de 100pb	
1	4,807692308
2	4,622781065
3	4,444981793
4	4,274020955
5	86,30234621
SOMME =	**104,4518223**

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Calculons enfin la moyenne des variations dans les deux sens :

((109,16 – 104,45) + (114,14 – 109,16)) / 2 = **4,84**

- On considère la valeur obtenue comme une approximation (ici assez raisonnable) de la duration

Section 1. Qu’est ce qu’un taux d’intérêt?

- Concept de duration = une mesure de la sensibilité du cours d’une obligation aux mouvements de taux d’intérêt
- Duration élevée (faible) = forte (faible) sensibilité = risque élevé (faible)
- La duration augmente avec la maturité et diminue avec les coupons
- Concept (outil) utile pour apprécier la sensibilité d’un titre aux variations des taux d’intérêt et pour définir un choix de titres qui va minimiser le risque de taux (cf. « immunisation »).