



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

UE -OSSDE : Ouvrages sous sollicitations dynamiques et environnementales

Module 2 : Parasismique et dynamique des structure

Génie Parasismique

2022 - 2023



- Introduction
- Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique
- Éléments de base de dynamique de structures
- Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- **Introduction**

- Séismes , origines, caractéristiques
- Éléments de base de dynamique de structures
- Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

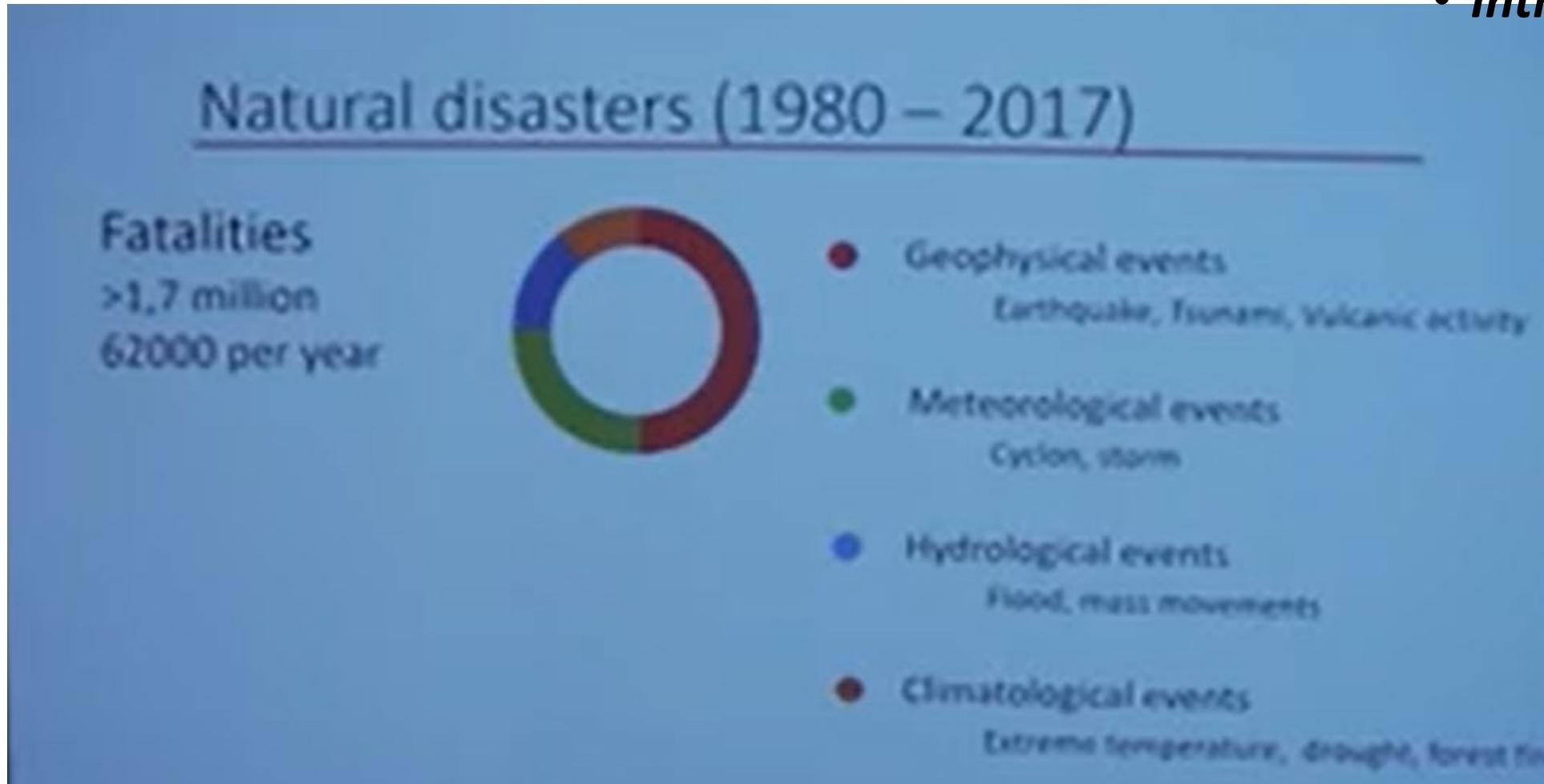
- ***Introduction***

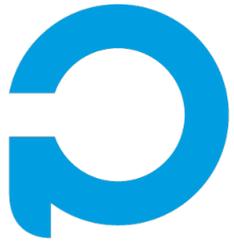
Objectives :

- Comprendre les principes d'évaluation des aléas sismiques
- Apprendre les bases de calcul des charges sismiques
- Maitriser les techniques de dimensionnement des structures vis-à-vis des risques sismiques
- Comprendre les dispositifs de conception et de construction en zones sismiques
- Evaluer l'état de structures après séismes
- Apprendre les technique de rénovation sismique



- ***Introduction***





POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Un **séisme** est un mouvement naturel du sol qui débute par une rupture brutale et dure peu (quelques secondes à quelques minutes)

- Différents types de séismes :
 - séisme d'origine tectonique
 - séisme d'origine volcanique
 - séismes d'effondrement
 - séismes artificiels et séismes induits



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

SEISMES VOLCANIQUES

Ces séismes sont liés aux mouvements magmatiques et à l'ouverture de fissures

SEISMES D'EFFONDREMENT

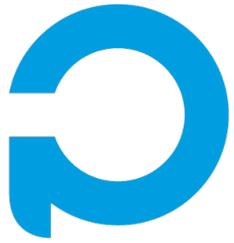
Ces séismes sont liés à l'effondrement de cavités naturelles et minières (par exemple terrains karstiques)

SEISMES ARTIFICIELS

Ces séismes sont liés à l'activité de l'homme. Il s'agit de toute explosion souterraine (du bâton de dynamite à l'explosion nucléaire)

SEISMES INDUITS

Ces séismes sont aussi liés à l'activité de l'homme. Par exemple, Ils peuvent être consécutifs à l'injection de fluides dans les forages ou au remplissage de barrages



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

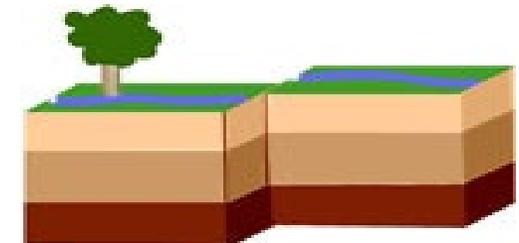
SEISMES TECTONIQUES

Le déplacement peut se décomposer *en un déplacement vertical (rejet) et un déplacement horizontal (coulissage).*

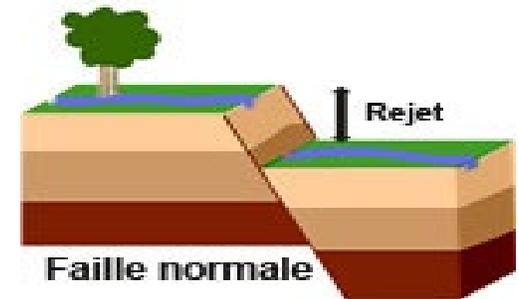
Exemple : séisme de San-Francisco du
18 avril 1906 :

rejet de 1 m et coulissage horizontal de 7 m.

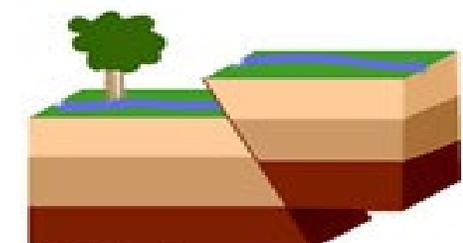
Les séismes tectoniques se produisent toujours dans la lithosphère (couche dont la base se situe entre 70 et 150 kms de profondeur) : celle-ci subit *des déformations lentes dues au déplacement des plaques.*



Faille décrochante



Faille normale



Faille inverse

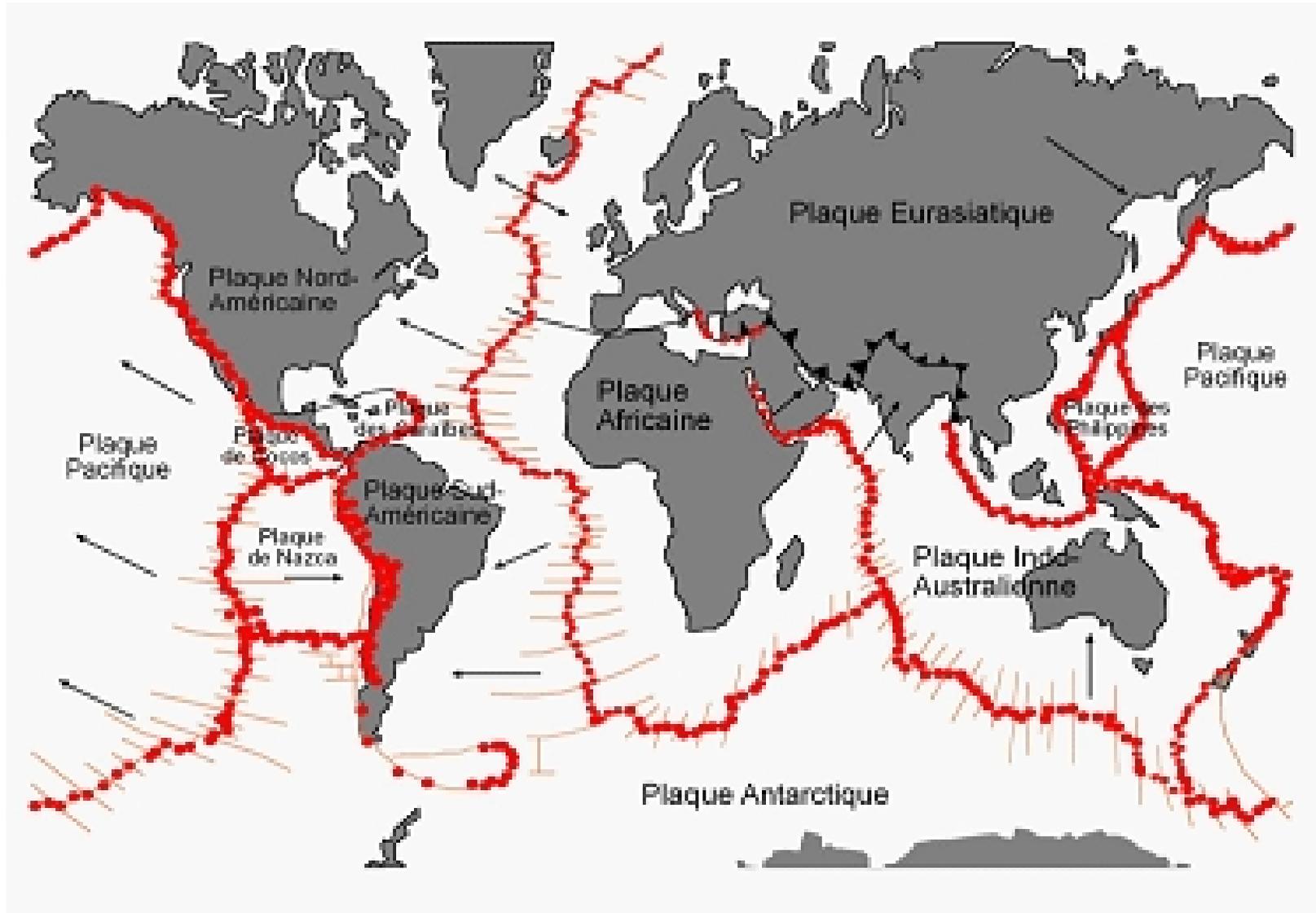


POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*





Seismes
dans le
monde

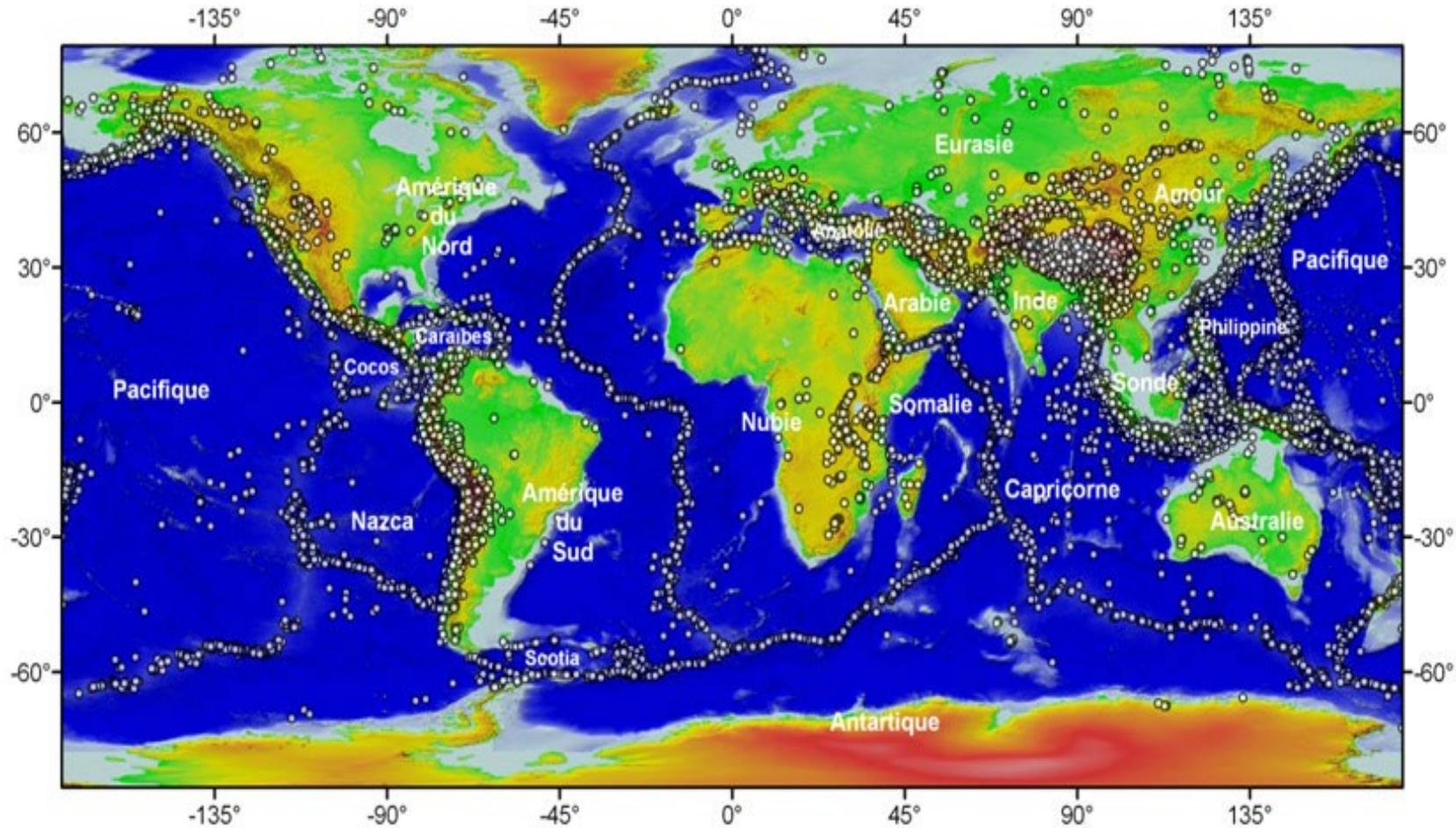


PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*



Où se produisent les séismes ?



Sur des failles : zones de plus faible résistance mécanique ,plus propices à s'accommoder de la déformation imposée par le mouvement relatif des plaques tectoniques.

La sismicité se concentre le long des frontières des grandes plaques tectoniques



Où se produisent les séismes en Europe ?





POLYTECH[®]
ORLÉANS

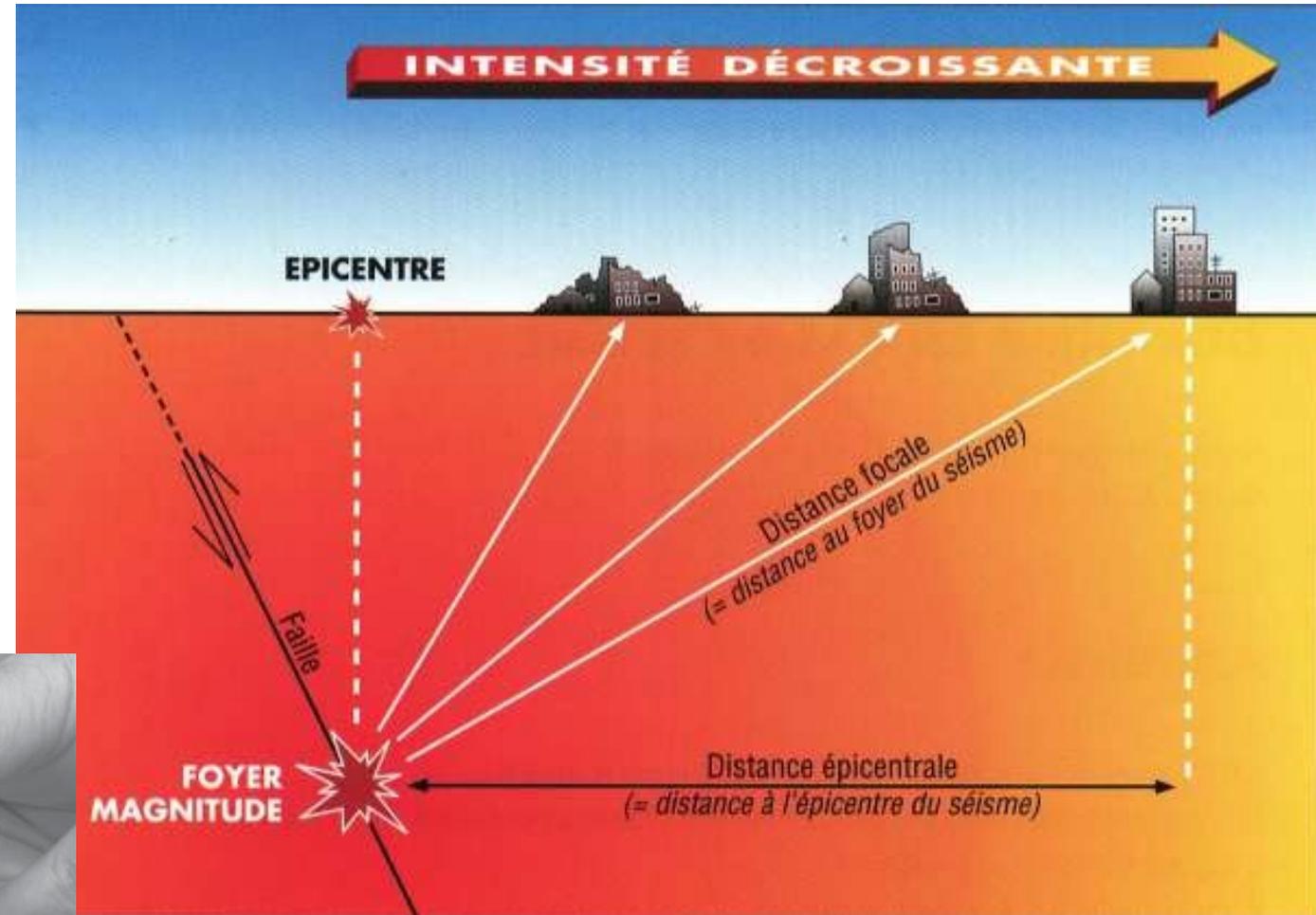
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

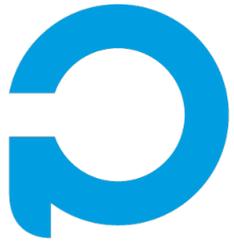
PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*



Origine





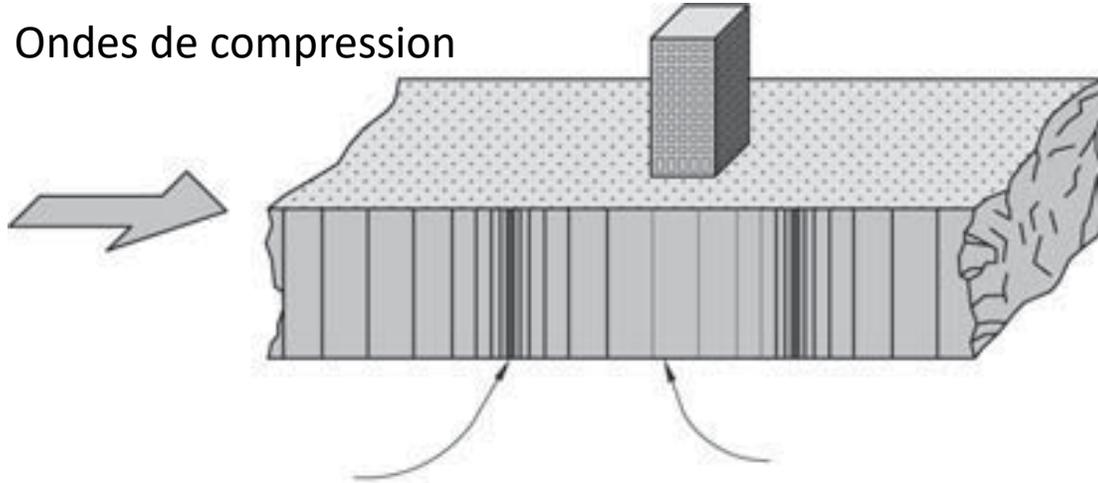
POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

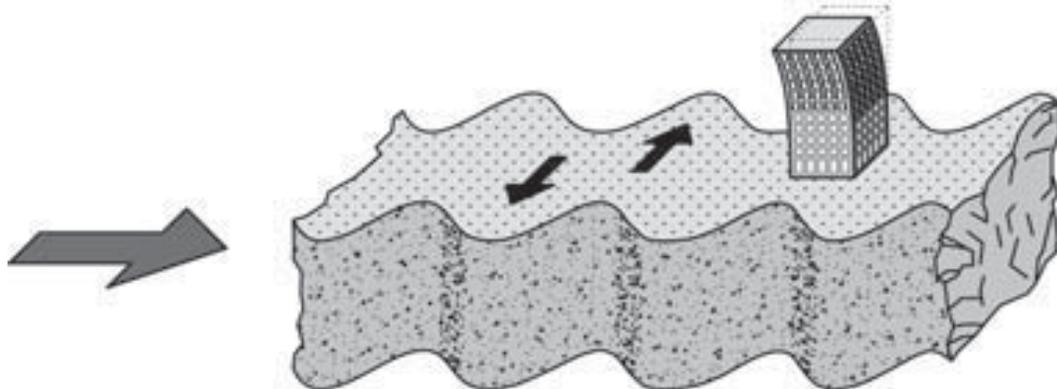
PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Ondes de compression



Ondes de cisaillement





POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Magnitude → la force d'un séisme

Mesure l'énergie sismique relâchée par la source du séisme et rayonnée vers l'environnement, calculée à partir de l'amplitude du mouvement vibratoire du sol.

Si on augmente la magnitude d'un degré, l'énergie de la source sismique est multipliée environ par trente (vrai quand il s'agit de la magnitude de surface).

Magnitude, échelle de Richter et communiqués de presse

Les communiqués de presse : **«la magnitude du séisme sur l'échelle ouverte de Richter ».**

Les sismologues utilisent une autre échelle de magnitude pour caractériser de façon univoque la force d'un séisme, la magnitude de moment (M_w).

La première magnitude a été définie par Charles F. Richter qui, en 1935, établit une échelle pour classer et comparer les séismes californiens selon un certain protocole et avec un certain type d'instrument. Cette mesure correspond à un type **de magnitude appelée magnitude locale (MI)** et qui n'est en fait valable que pour des séismes proches des instruments qui les mesurent et sous certaines conditions.



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Magnitude de Richter

Magnitude de Richter est égale au logarithme – à base dix – de l'amplitude maximale d'une onde sismique (mesurée à 100 kilomètres du foyer de la catastrophe) moins une constante de référence. Soit :

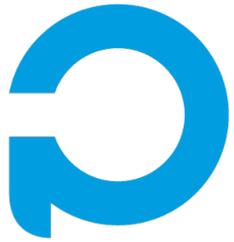
$$M = \log (A_{\max}) + c$$

Ainsi le rapport des amplitudes maximales des séismes de magnitude 7 et 8,8 vaut $10^{(8,8 - 7)}$ soit environ 63 et entre 2 et 9 vaut 10 millions !!!

L'échelle étant le logarithme d'une amplitude, elle est ouverte et sans limite supérieure.

Dans la pratique, les séismes de magnitude 9,0 sont exceptionnels et les effets des magnitudes supérieures ne sont plus décrits séparément.

Le séisme le plus puissant jamais mesuré atteignant la valeur de 9,5 fut le tremblement de terre de 1960 au Chili .



- *Séismes, origines, caractéristiques*

échelles d'intensité → **degré** d'intensité caractérisant le niveau de sévérité **des effets** de la secousse sismique.

L'échelle utilisée en France est celle mise au point en 1964 **par Medvedev**, Sponheuer et Karnik, dite **échelle MSK**, dans laquelle les intensités sont numérotées de I à XII.

I	secousse non ressentie, mais enregistrée par les instruments
II	secousse partiellement ressentie, notamment par des personnes au repos et aux étages
III	secousse faiblement ressentie, balancement des objets suspendus
IV	secousse largement ressentie dans et hors les habitations, tremblement des objets
V	secousse forte, réveil des dormeurs, chute d'objets, parfois légères fissures dans les plâtres
VI	légers dommages, parfois fissures dans les murs, frayeur de nombreuses personnes
VII	dégâts, larges lézardes dans les murs de nombreuses habitations, chûtes de cheminées
VIII	dégâts massifs, les habitations les plus vulnérables sont détruites, presque toutes subissent des dégâts importants
IX	destructions de nombreuses constructions, quelquefois de bonne qualité, chute de monuments et de colonnes
X	destruction générale des constructions, même les moins vulnérables (non parasismiques)
XI	catastrophe, toutes les constructions sont détruites (ponts, barrages, canalisations enterrées...)
XII	changement de paysage, énormes crevasses dans le sol, vallées barrées, rivières déplacées...



PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

MAGNITUDE

- mesure l'énergie au point de rupture
- relative à la taille de la source sismique
- ne varie pas quand on s'éloigne de l'épicentre

INTENSITE

- définie par l'importance des effets en un point donné de la surface
- diminue quand on s'éloigne de l'épicentre

On préfère aujourd'hui **la magnitude de moment (M_w)**, définie par Kanamori en 1977.

Les ordres de grandeur sont les suivants



Magnitude (M_w)	Surface de faille rompue (km^2)	Longueur de faille crustale rompue (km)	Glissement (m)
5	15	≈ 4	0,05-0,1
6	100	10-12	0,3-0,5
7	750	40-50	1-2
8	5 000	200	10



• *Séismes, origines, caractéristiques*

Les grands tremblements de terre dans le monde depuis le début du 20e siècle

- **Equateur – 1906** : Un séisme de 8,8 au large des côtes de la Colombie et de l'Equateur provoque un tsunami qui cause la mort d'un millier de personnes.
- **URSS – 1952** : Séisme de magnitude 9 sur la péninsule du Kamtchatka, qui provoque un tsunami dévastateur ressenti jusqu'au Chili et au Pérou : plus de 2.300 morts.
- **Alaska – 1957** : Un tremblement de terre de 8,6 frappe les îles Andreanof et provoque un important tsunami.
- **Chili – 1960** : **Un tremblement de terre de 9,5**, suivi d'un tsunami dévastateur dans plusieurs pays bordant l'océan Pacifique, fait 5 700 morts au Chili, 61 à Hawaï et 130 au Japon.
- **Alaska – 1964** : Un séisme de 9,2 près du détroit de Prince-William, suivi d'un tsunami, fait une centaine de morts.
- **Alaska – 1965** : Une secousse de 8,7, suivie d'un tsunami, touche les îles Aléoutiennes.
- **Asie du Sud-Est – 2004** : **Un séisme de 9,1 au large de l'île de Sumatra provoque le 26 décembre un tsunami qui dévaste une dizaine de pays voisins et fait plus de 270 000 morts ou disparus.**
- **Indonésie – 2005** : Un séisme de 8,6 près de l'île de Nias au large de Sumatra : 900 morts et 6 000 blessés.
- **Haiti – 2010** : **Un séisme de magnitude 7 fait entre 250 000 et 300 000 morts, plus de 300 000 blessés et plus d'un million de personnes déplacées, selon un bilan de l'ONU.**
- **Chili – 2010** : Un séisme de magnitude 8,8 et un tsunami touchent le centre-sud du Chili et font 523 morts et 24 disparus.
- **Chine – 2010** : Un tremblement de terre de magnitude 6,9 frappe la province reculée du Qinghai (nord-ouest) faisant 2 187 morts et 80 portés disparus.
- **Japon – 2011** : **Un séisme de magnitude 9 et un tsunami touchent cote pacifique du Tohoku au Japon et font plus de 8 000 morts et 20 000 disparus.**



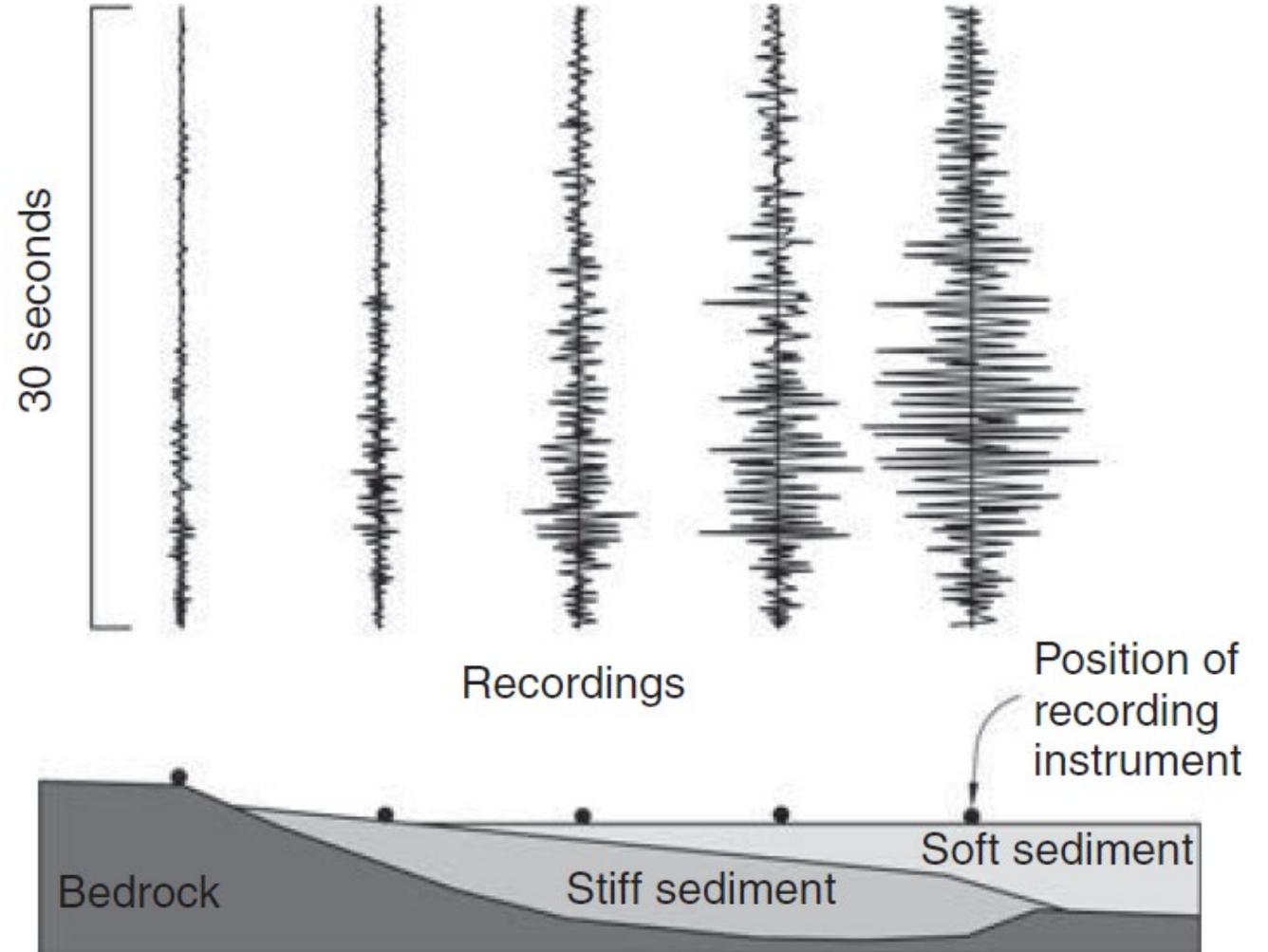
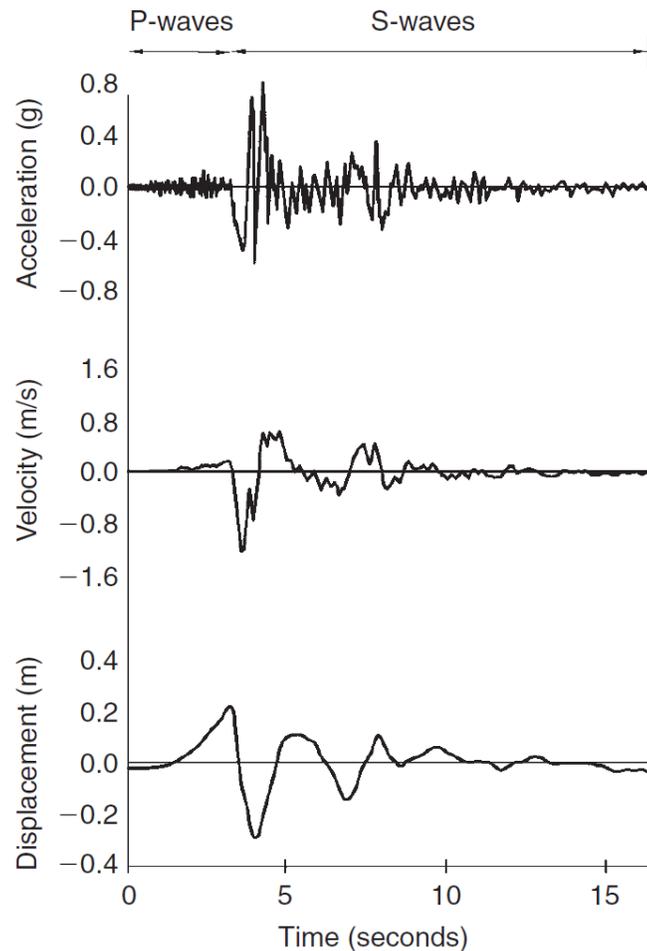
POLYTECH[®]
ORLÉANS

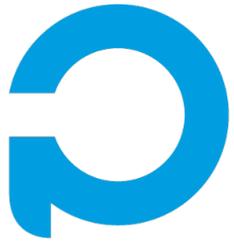
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Enregistrement d'un accéléromètre

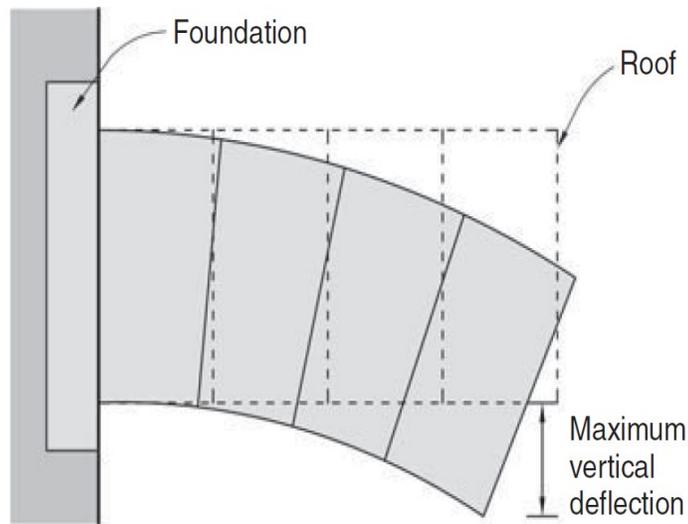




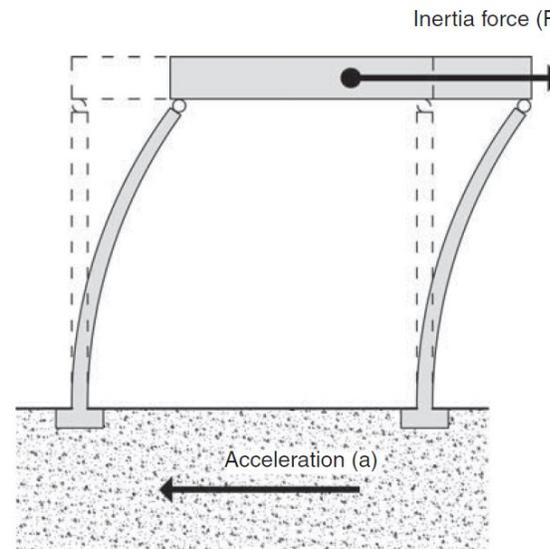
PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

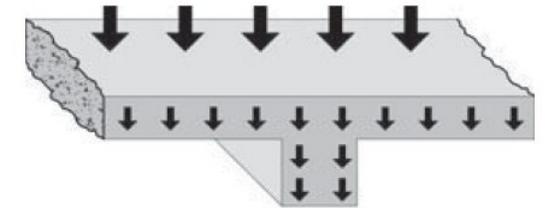
Action de séisme sur une structure – accélération verticale



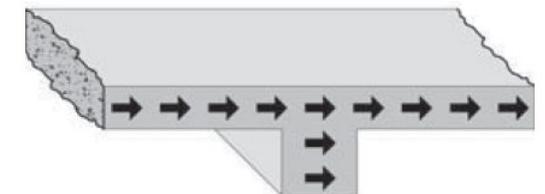
Action de séisme sur une structure – accélération horizontale



Descente des charges et charges de séisme



Gravity loads and forces



Horizontal inertia forces



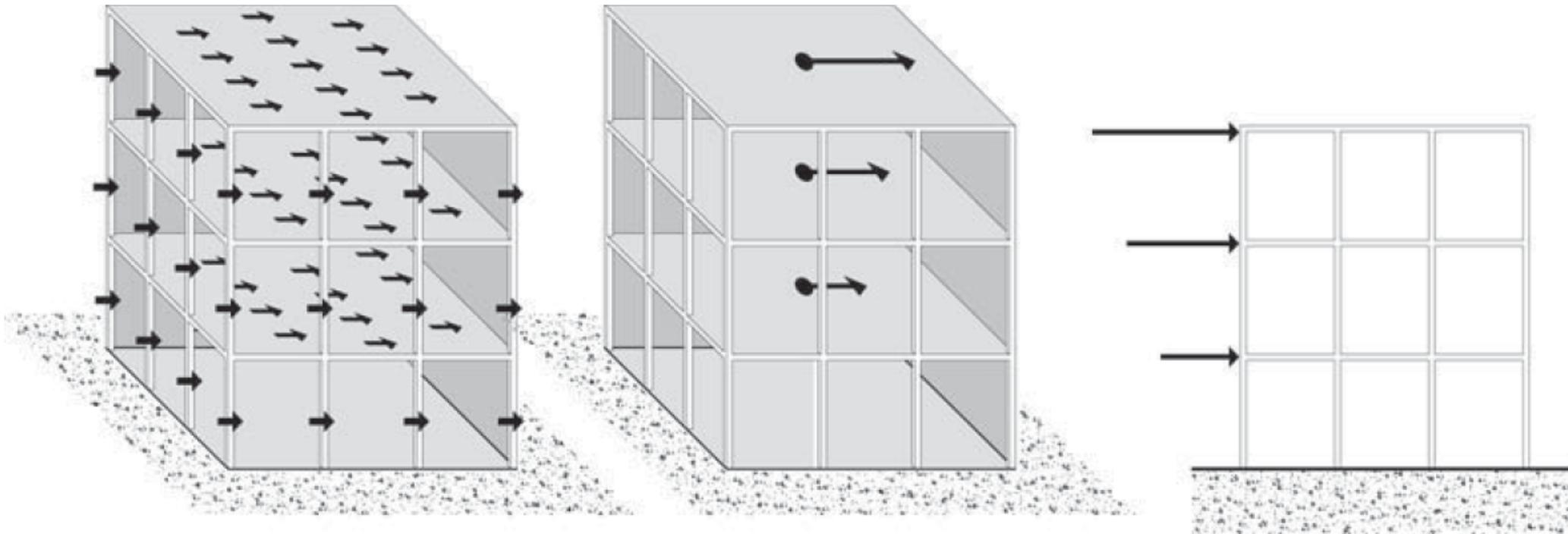
POLYTECH
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Conventions/simplifications



Forces d'inertie du au séisme

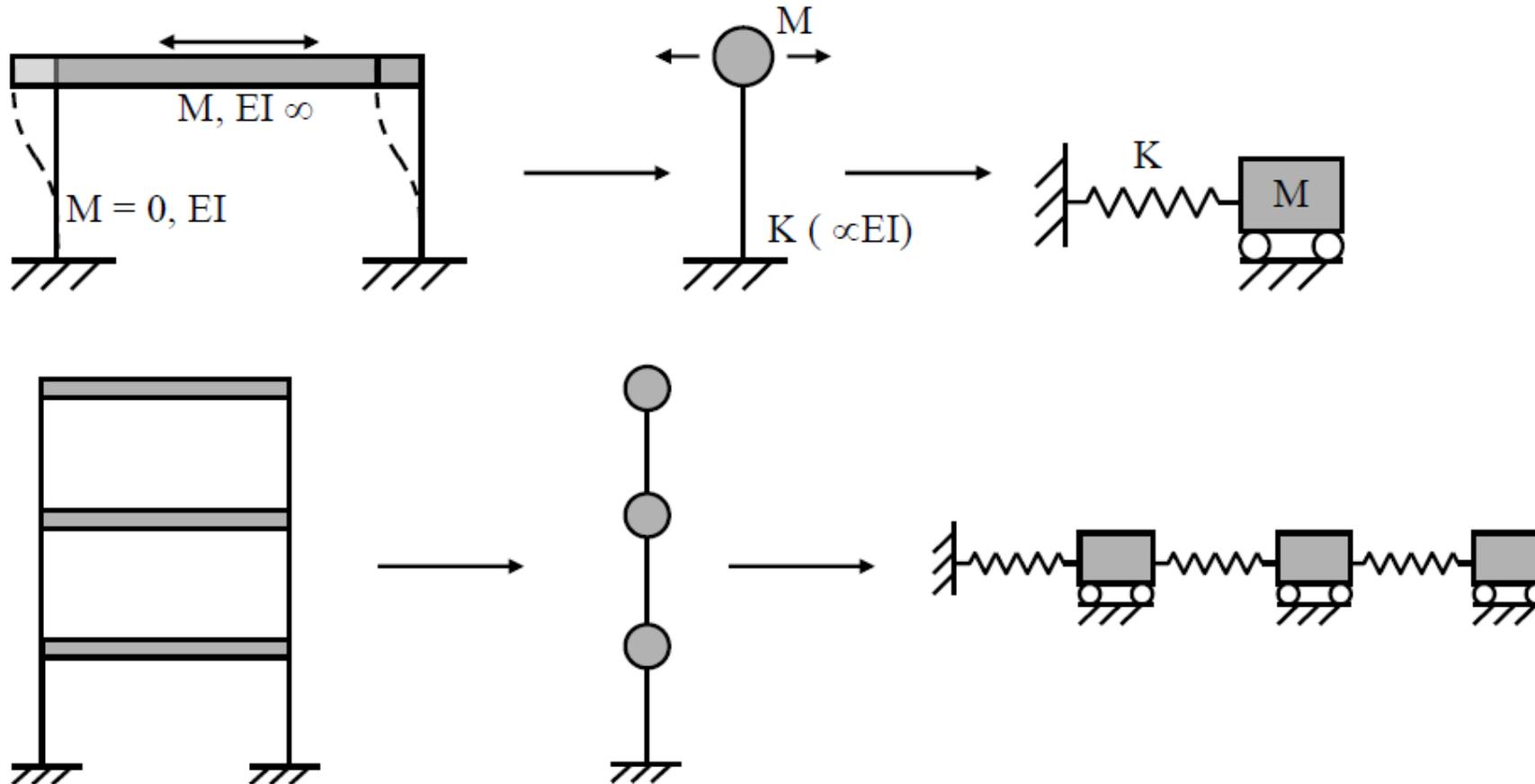
Simplification : les forces sont appliquées aux centres des masses

On considérera que les forces sont appliquées à l'extérieure



- *Séismes, origines, caractéristiques*

Conventions/simplifications





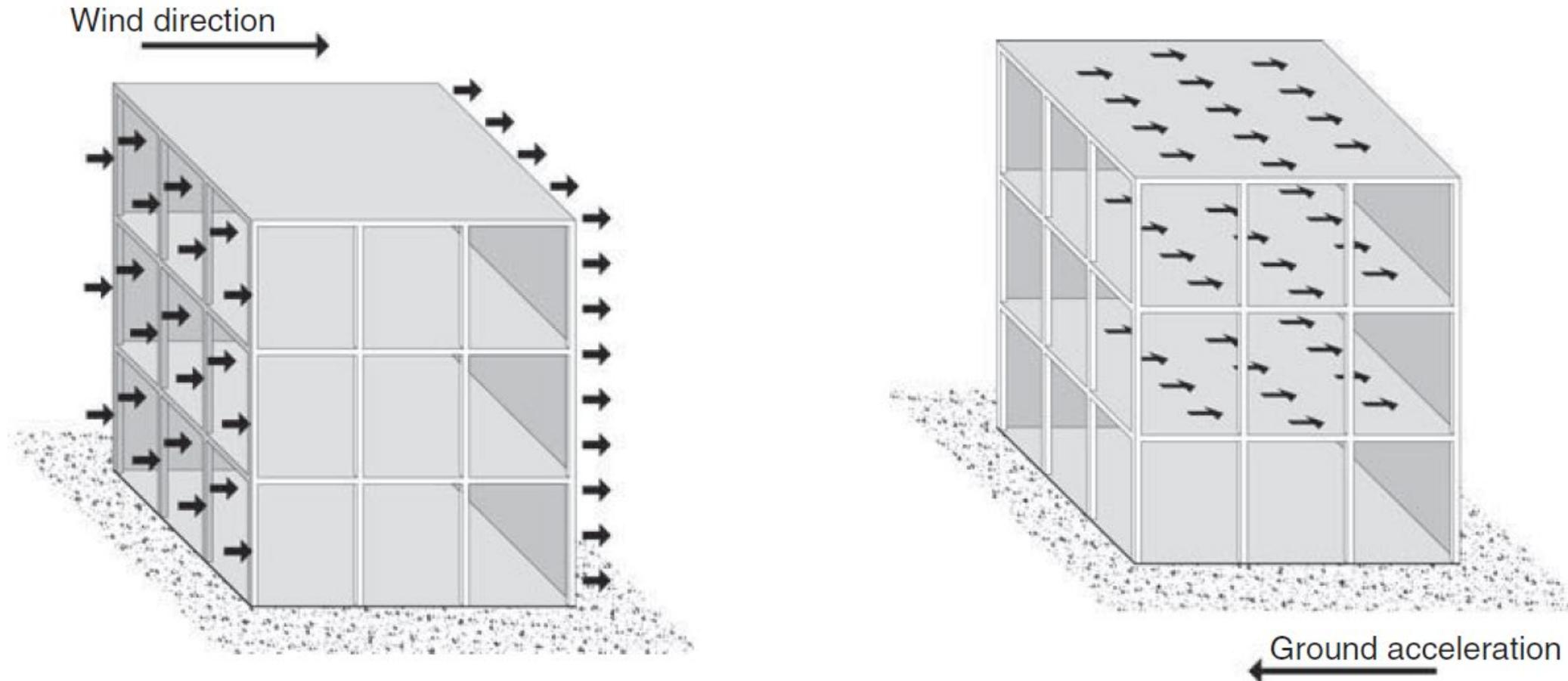
POLYTECH
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*

Similitude / différences avec les charges du vent



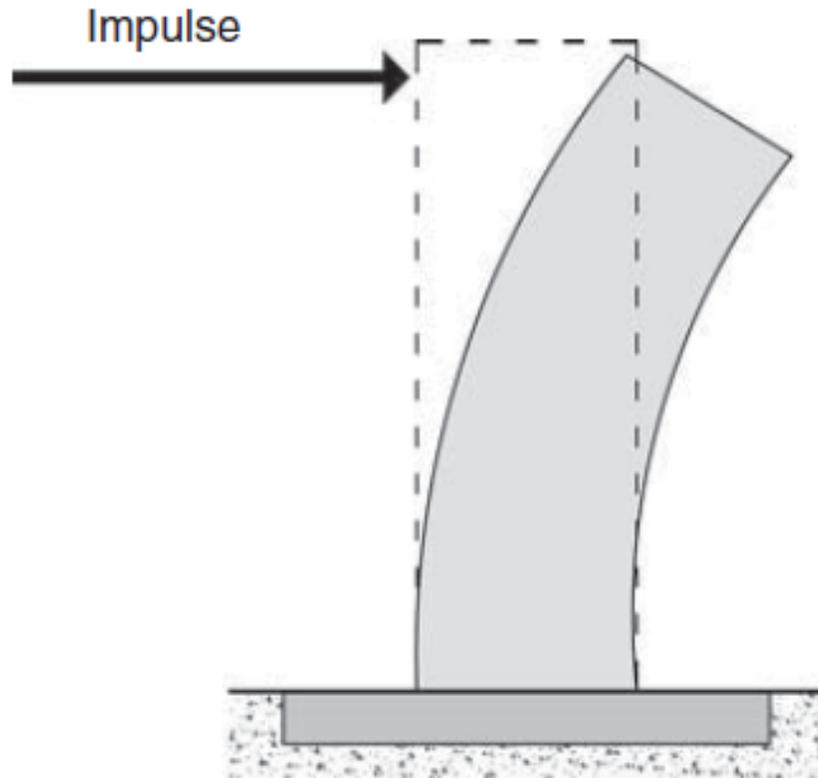


POLYTECH[®]
ORLÉANS

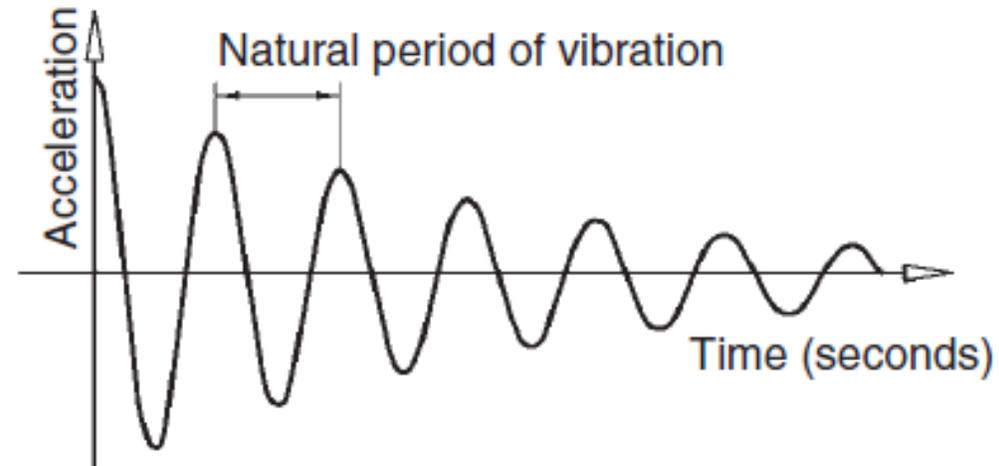
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Séismes, origines, caractéristiques*



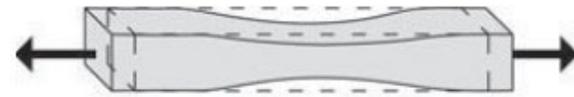
(a) First mode of vibration



(b) A record of the building acceleration after the impulse



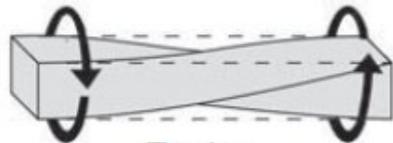
- ***Séismes, origines, caractéristiques***



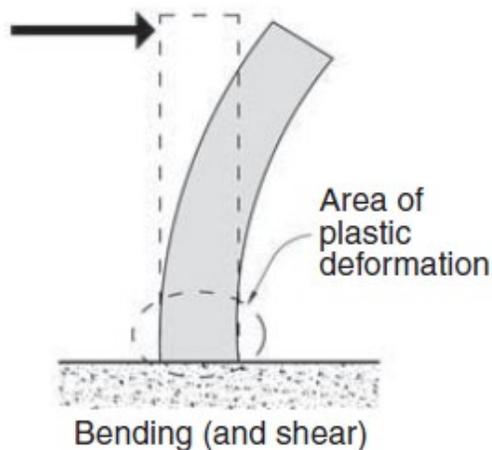
Tension



Compression



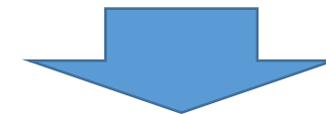
Torsion



Premières questions à répondre :

- Comment dimensionner des éléments structuraux ?
 - Mêmes principes que ceux appris au cours des différentes UE (EC2, EC3, etc). Mais les charges différentes

- 1- Comment calculer les charges sismiques ?
- 2 – Comment combiner les charges sismiques avec les autres charges ?
- 3 – Quelles particularité de l'approche de dimensionnement?
- 4 – Quels dispositifs constructifs ?



Eurocodes 8

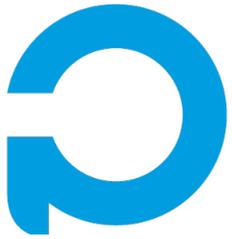


POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

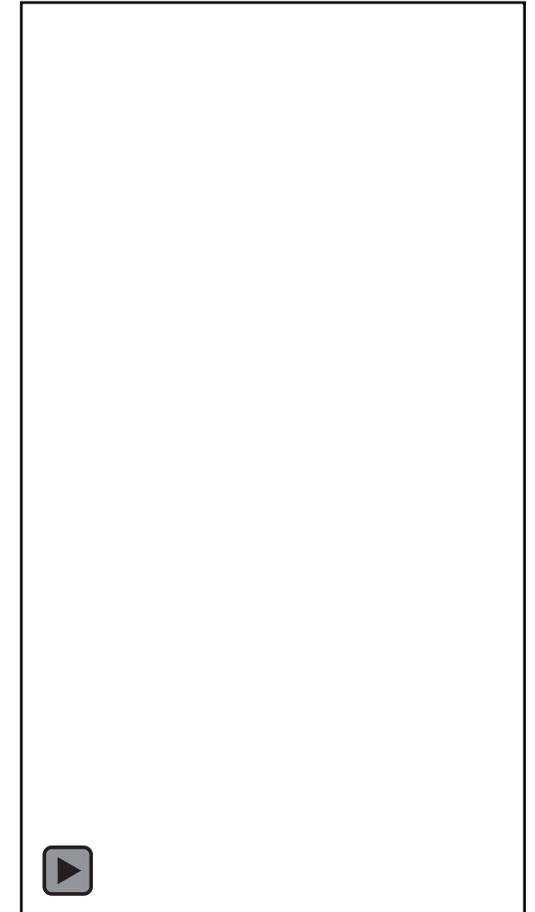
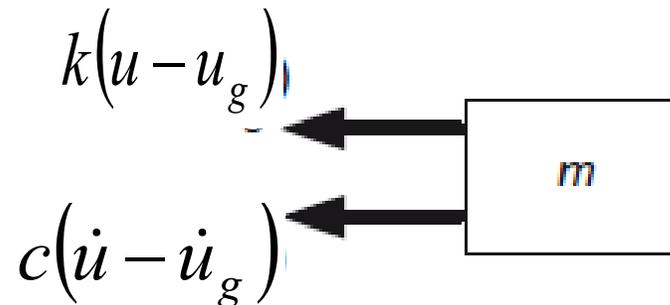
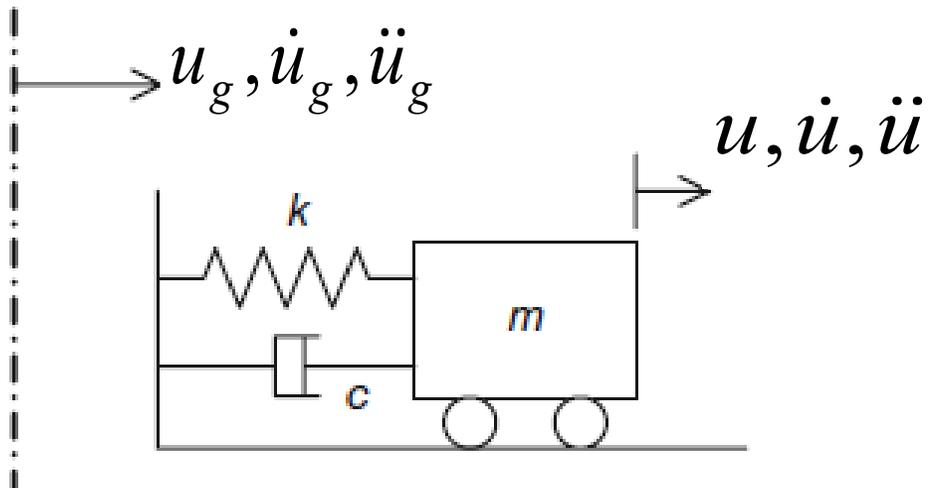
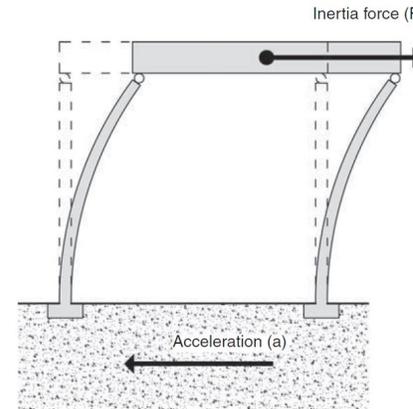
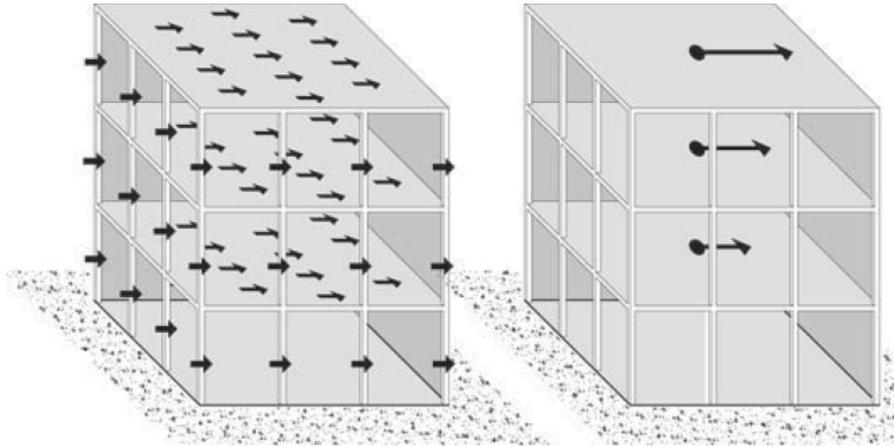
PARASISMIQUE

- **Introduction**
- **Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique**
- **Éléments de base de dynamique de structures**
- Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique



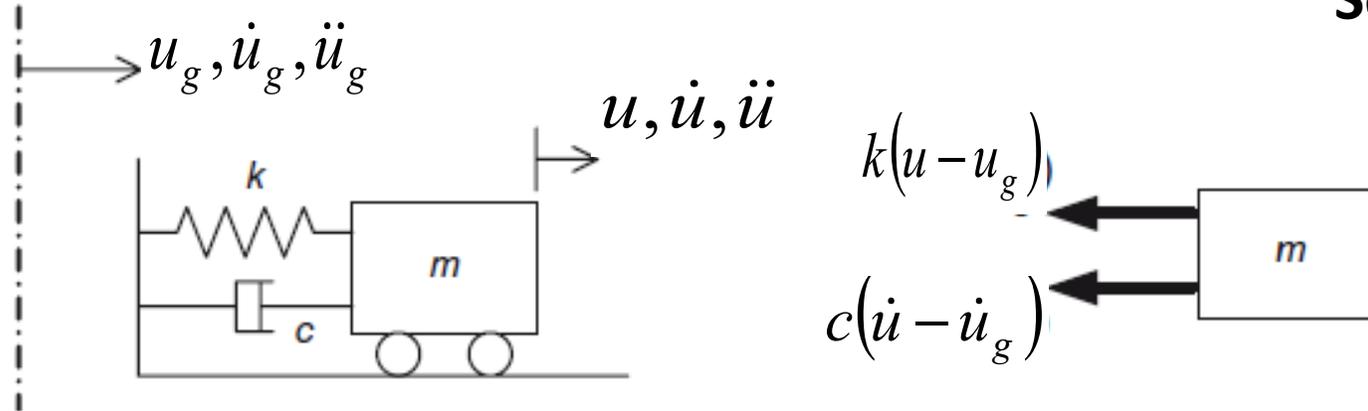
- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL





- *Bases de la dynamique des structures*
Séisme simplifié : systèmes 1DDL



$$-k(u - u_g) - c(\dot{u} - \dot{u}_g) = m\ddot{u}$$

$$v = u - u_g \quad -kv - c.\dot{v} = m.\ddot{v} + m\ddot{u}_g \quad m.\ddot{v} + c.\dot{v} + kv = -m\ddot{u}_g$$

Notons $\omega^2 = k/m$ $\xi = c/2m\omega$

$$\ddot{v} + 2\xi\omega.\dot{v} + \omega^2 v = -\frac{m\omega^2}{k}\ddot{u}_g = \frac{\omega^2}{k}(-m\ddot{u}_g)$$

Force d'inertie

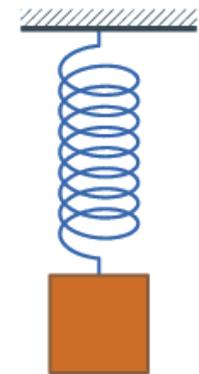
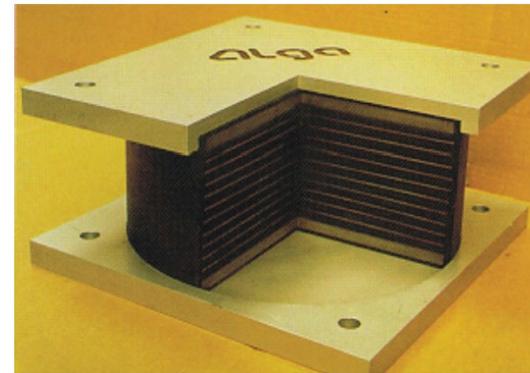
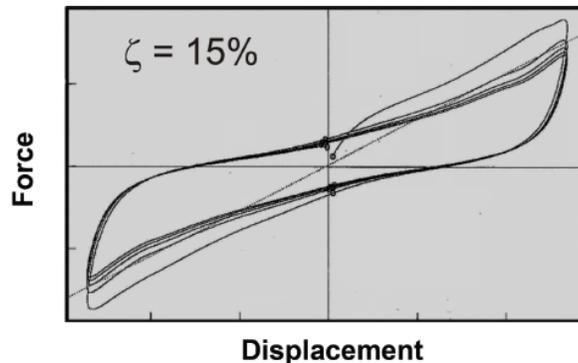


- *Bases de la dynamique des structures*

Concepts importants

Amortissement = Diminution de l'amplitude d'une oscillation à l'autre

- Comportement dissipative des matériaux (frottement, comportement visqueux)



- Amortissement par la structure, ou par dispositif amortissant
- Amortisseur $F = -C \cdot V$ (coefficient d'amortissement x vitesse)

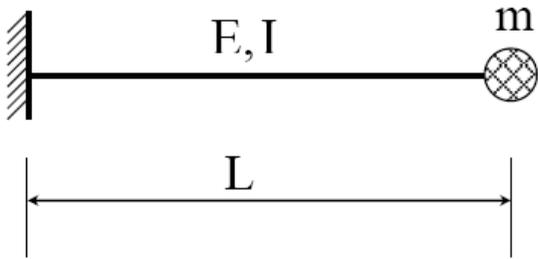
$$[C] = [N \cdot s \cdot m^{-1}]$$



- *Bases de la dynamique des structures*

Concepts importants

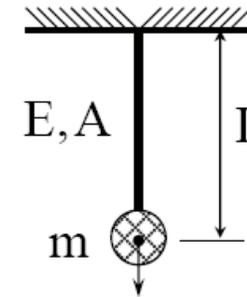
Rigidité = « La force généralisée » pour obtenir un 'déplacement généralisé' unitaire



$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Pour des mouvements verticaux

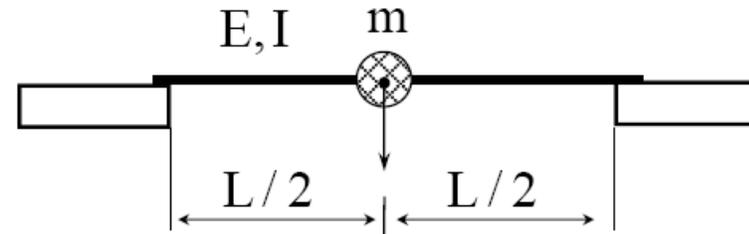
Traction



$$k = \frac{EA}{L}$$

Force généralisée = Force, Moment

Déplacement généralisé = déplacement, rotation



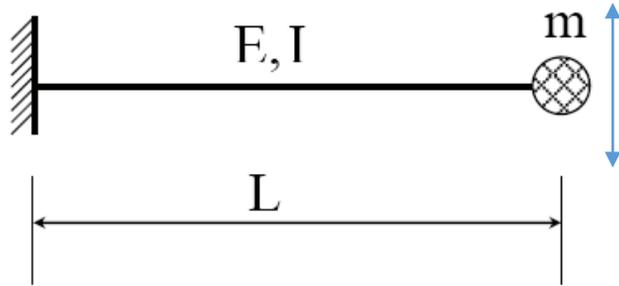
$$k = \frac{48EI}{L^3}$$

Mouvement vertical de m



Concepts importants

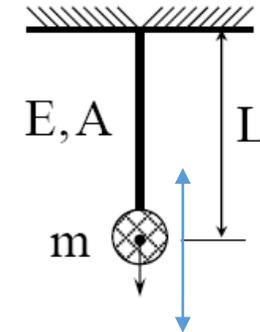
Rigidité = « La force généralisé » pour obtenir a ‘déplacement généralisé” ‘ unitaire



$$k = \frac{3EI}{L^3}$$

Pour des mouvements
verticaux

Traction



$$k = \frac{EA}{L}$$

La même structure a une rigidité différente dependant de la sollicitation

Problem : Let be a beam of section $S=h \times h$ of C60 and effective length of L , with one of its end fixed.

- 1 – Define the stiffness of the beam for a load applied at the free end of the beam
a- normal to the axis of the beam (flexion) b- in the axis of the beam (compression)
- 2 - compare the calculated stiffness and discuss results for $h=40\text{cm}$ and $L=2\text{m}$
- 3 – How flexural stiffness evolves with the section of the beam

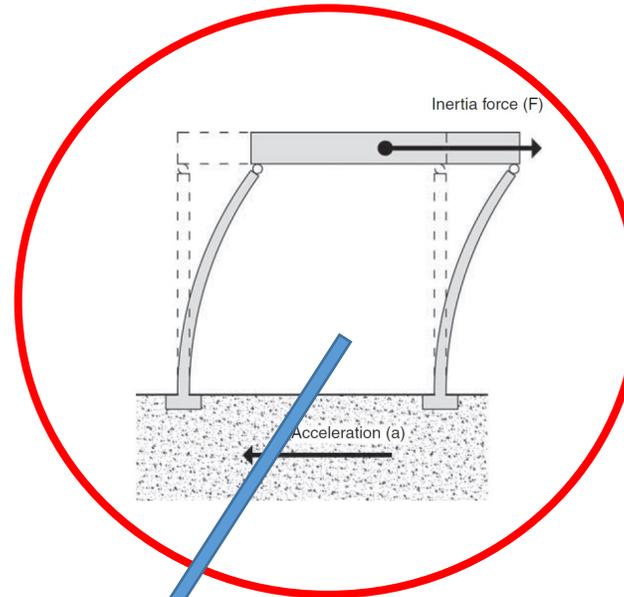
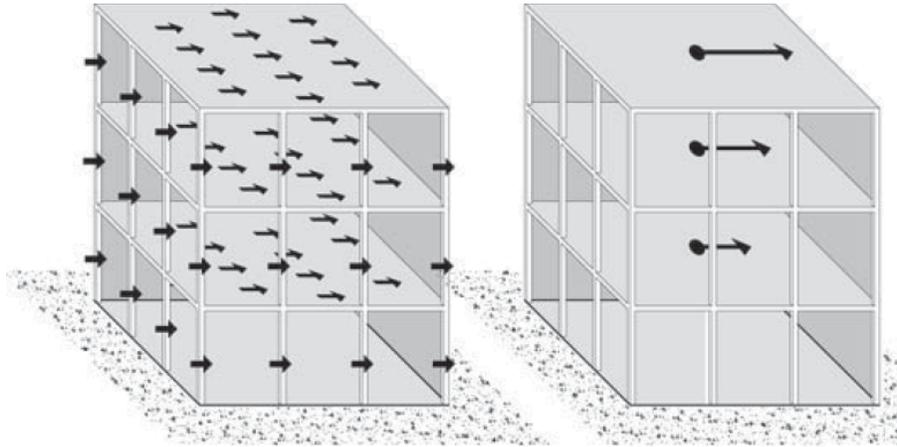


POLYTECH
ORLÉANS

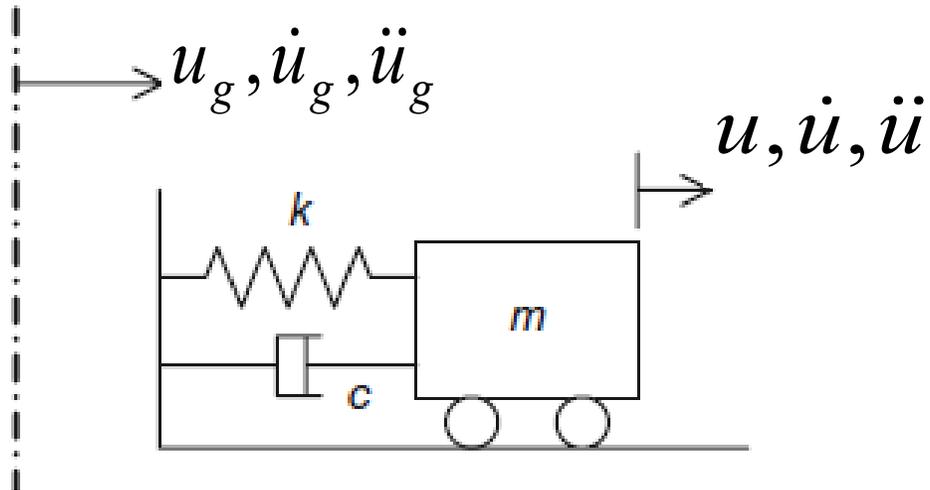
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- *Bases de la dynamique des structures*



**Comment calculer
la rigidité d'une
structure ?**



$$k(u - u_g)$$
$$c(\dot{u} - \dot{u}_g)$$



Comment calculer les déplacements d'une structure ?

Principe des travaux virtuels $\rightarrow \int_V f'_i u_i dV + \int_S T_i^{(n)} u_i dS = 1 \delta$

$$\delta = \int_{\ell} \left(\frac{MM'}{EI} + \frac{NN'}{EA} + \chi \frac{TT'}{GA} \right) dx$$

moment fléchissant dû
aux actions réelles

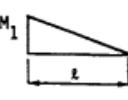
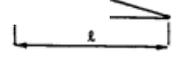
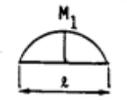
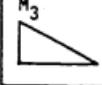
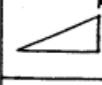
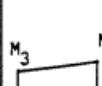
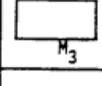
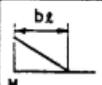
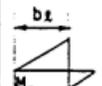
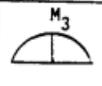
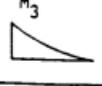
moment fléchissant dû à une force
unitaire placée au point où l'on
cherche le déplacement dans la
direction et le sens de celui-ci

Intégral de Mohr

En général,

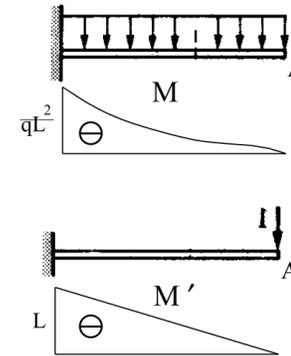
$$\delta = \int_{\ell} \left(\frac{MM'}{EI} \right) dx$$

$$\frac{1}{l} \int M' M'' dx$$

$M' \backslash M''$				
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{M_3}{6} (2M_1 + M_2)$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{6} M_1 M_4$	$\frac{M_4}{6} (M_1 + 2M_2)$	$\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} M_1 M_4$
	$\frac{M_1}{6} (2M_3 + M_4)$	$\frac{1}{3} M_1 M_3 + \frac{1}{3} M_2 M_4 +$ $\frac{1}{6} M_1 M_4 + \frac{1}{6} M_2 M_3$	$\frac{2-a}{6} M_1 M_3 +$ $\frac{1+a}{6} M_1 M_4$	$\frac{1}{3} (M_3 + M_4) M_1$
	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{1}{2} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1}{2} M_1 M_3$	$\frac{2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3$	$\frac{2-b}{6} M_1 M_3 +$ $\frac{1+b}{6} M_2 M_3$	$[\frac{1}{3} - \frac{(b-a)^2}{6K}] M_1 M_3$ Si : a < b; K = b(1-a) Si : a > b; K = a(1-b)	$\frac{1+b-b^2}{3} M_1 M_3$
	$\frac{b(3-b)}{6} M_1 M_3$	$\frac{b}{6} [(3-b)M_1 + bM_2] M_3$	$\frac{2b-a + \frac{(b-a)^2(1-b)}{K}}{6} M_1 M_3$ Pour K, voir ci-dessus	$\frac{b^2(2-b)}{3} M_1 M_3$
	$1 - 3\frac{(1-b)^2}{6} M_1 M_3$	$\frac{1-3(1-b)^2}{6} M_1 M_3 -$ $\frac{1-3b^2}{6} M_2 M_3$	Si : a < b $[1 + a - 3\frac{(1-b)^2}{1-a}] \frac{M_1 M_3}{6}$ Si : a > b $-\frac{1-3b^2}{6} M_1 M_3 -$ $-\frac{[2-a-3\frac{b^2}{a}]}{6} M_1 M_3$	$\frac{6b^2-4b^3-1}{3} M_1 M_3$
	$\frac{1}{3} M_1 M_3$	$\frac{1}{3} (M_1 + M_2) M_3$	$\frac{1+a-a^2}{3} M_1 M_3$	$\frac{8}{15} M_1 M_3$
	$\frac{1}{4} M_1 M_3$	$\frac{1}{12} (3M_1 + M_2) M_3$	$\frac{3-3a+a^2}{12} M_1 M_3$	$\frac{1}{5} M_1 M_3$
	$\frac{1}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{12} (M_1 + 3M_2) M_4$	$\frac{1+a+a^2}{12} M_1 M_4$	$\frac{1}{5} M_1 M_4$

Integrales de Mohr

Exemple



flèche en A

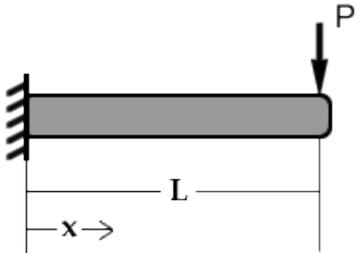
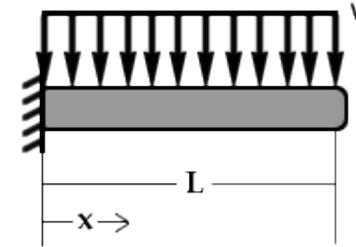
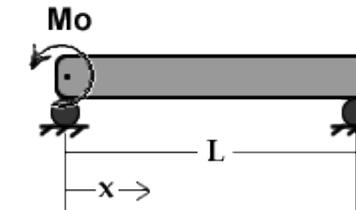
$$\delta = \frac{L}{EI} \frac{1}{4} \frac{qL^2}{2} L = \frac{qL^4}{8EI}$$

rotation en A

$$\delta = -\frac{L}{EI} \frac{1}{3} \frac{qL^2}{2} 1 = -\frac{qL^3}{6EI}$$



- *Bases de la dynamique des structures*

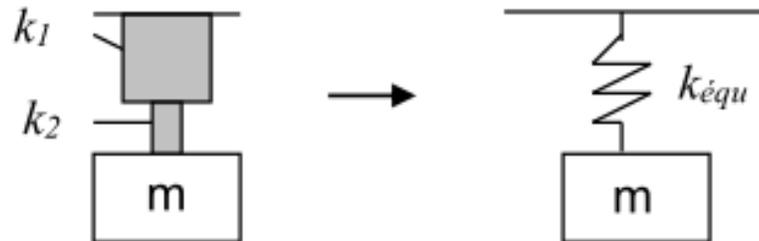
Sollicitation	Réaction d'appui	Flèche	Rotation	Équation de la déformée
	$M_A = PL$ $R_A = P$	$f = \frac{PL^3}{3EI}$	$\phi = \frac{PL^2}{2EI}$	$y = \frac{-Px^2}{6EI} (3L - x)$
	$M_A = \frac{wL^2}{2}$ $R_A = wL$	$f = \frac{wL^4}{8EI}$	$\phi = \frac{wL^3}{6EI}$	$y = \frac{-wx^2}{24EI} (x^2 - 4Lx + 6L^2)$
	$R_B = -\frac{M_0}{L}$ $R_A = \frac{M_0}{L}$	$f = \frac{M_0 X}{XEI}$	$\phi_A = \frac{M_0 L}{3EI}$ $\phi_B = \frac{M_0 L}{6EI}$	$y = \frac{-M_0 x}{6EIL} (x^2 - 3Lx + 2L^2)$



- *Bases de la dynamique des structures*

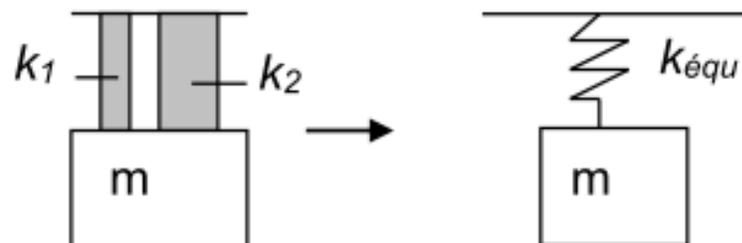
Systèmes équivalents

Système (de ressorts) en série :



$$\frac{1}{k_{\text{équi}}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

Système (de ressorts) en parallèle :



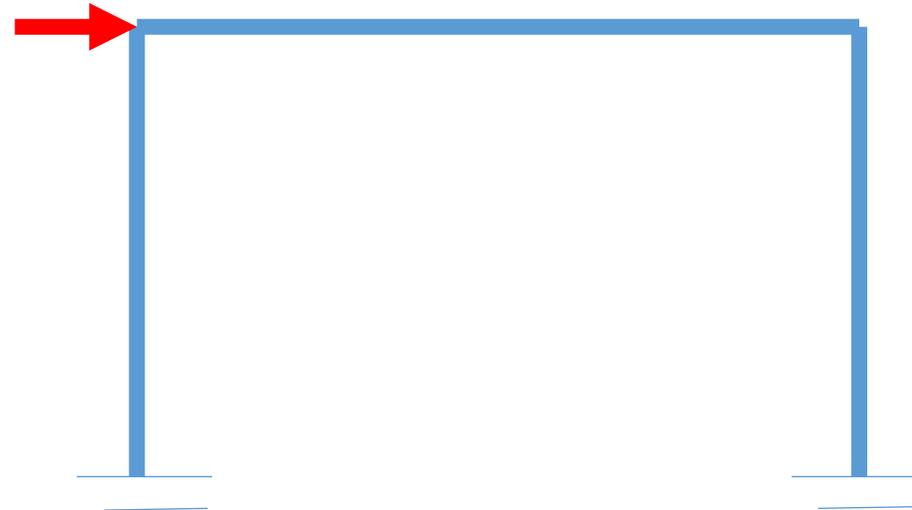
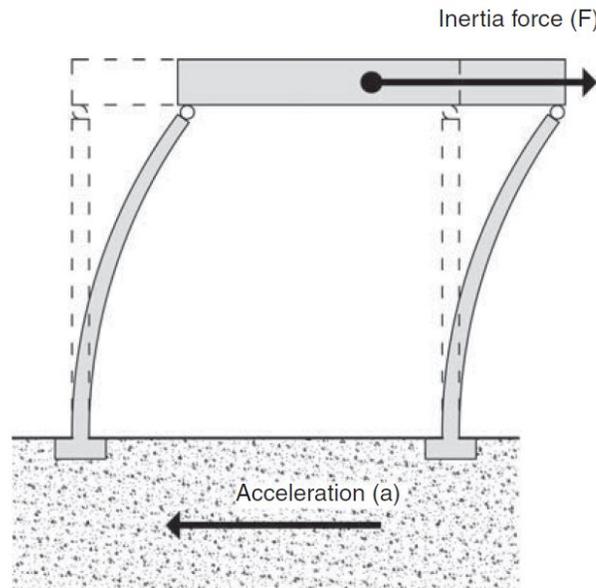
$$k_{\text{équi}} = k_1 + k_2$$



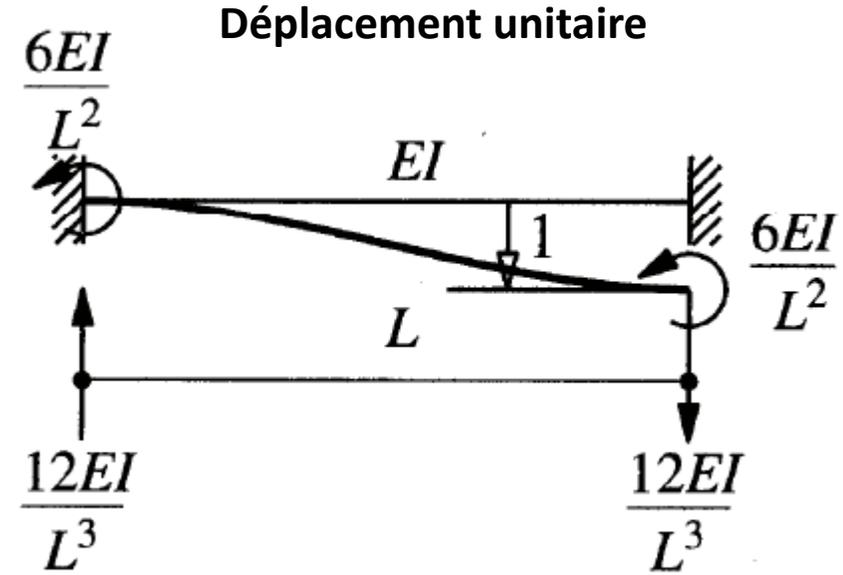
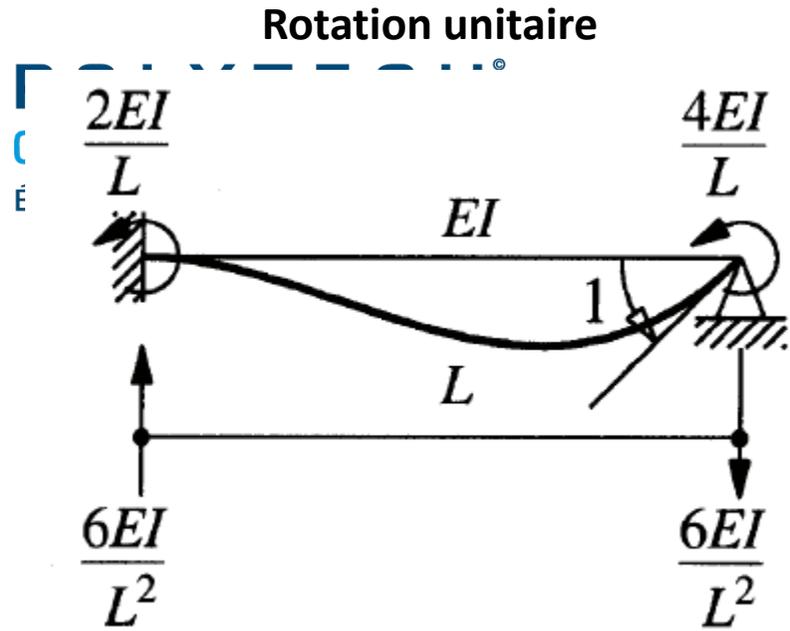
- *Bases de la dynamique des structures*

Concepts importants

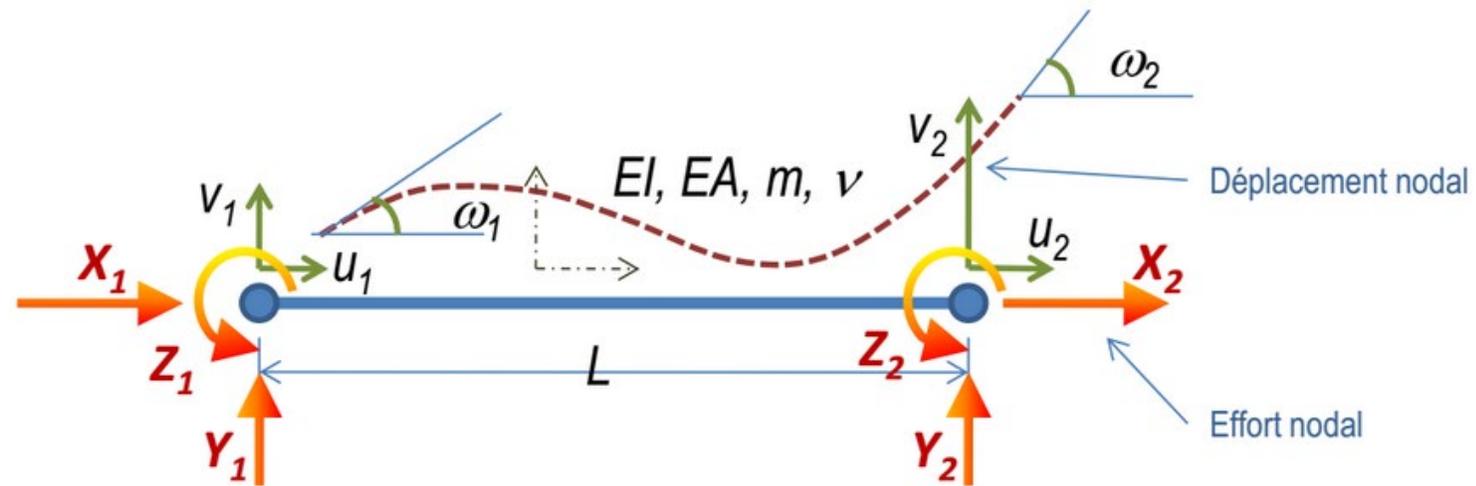
Rigidité = « La force généralisée » pour obtenir un 'déplacement généralisé' unitaire



Comment calculer la rigidité d'un système flexible ?
Exemple : Rigidité d'un portique



Chopra: Dynamics of Structures Printice Hall, 1995



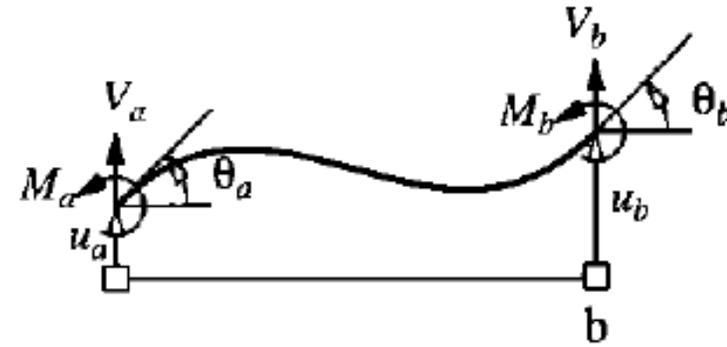


POLYTECH[®]

ORLÉANS

École d'ingénieurs de l'Université d'Orléans

Table de base identification de la rigidité



(M = moments ; V = réactions)

(θ_a, θ_b = rotations $::: u_a, u_b$ = déplacements)

$$M_a = \frac{4EI}{L} \theta_a + \frac{2EI}{L} \theta_b + \frac{6EI}{L^2} u_a - \frac{6EI}{L^2} u_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L} \theta_a + \frac{4EI}{L} \theta_b + \frac{6EI}{L^2} u_a - \frac{6EI}{L^2} u_b$$

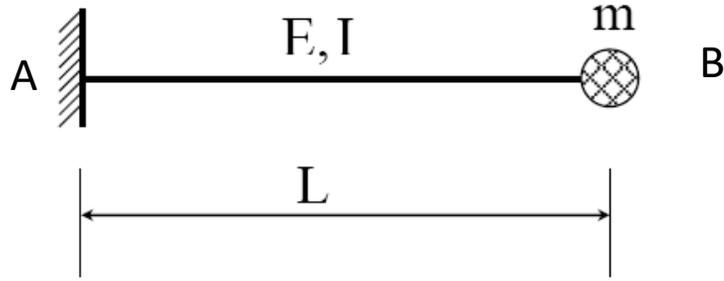
$$V_a = \frac{6EI}{L^2} \theta_a + \frac{6EI}{L^2} \theta_b + \frac{12EI}{L^3} u_a - \frac{12EI}{L^3} u_b$$

$$V_b = -\frac{6EI}{L^2} \theta_a - \frac{6EI}{L^2} \theta_b - \frac{12EI}{L^3} u_a + \frac{12EI}{L^3} u_b$$

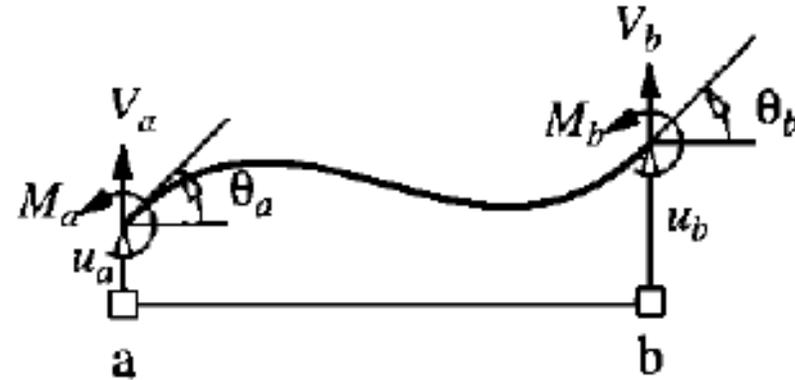


Application pour le calcul de la rigidité d'une poutre

POLYTECH®



On cherche la force vertical V pour un déplacement vertical unitaire en B $u_b=1$



On applique les équations données

$$\theta_a = u_a = 0$$

$$V_b = -\frac{6EI}{L^2} \theta_a - \frac{6EI}{L^2} \theta_b - \frac{12EI}{L^3} u_a + \frac{12EI}{L^3} u_b$$

$$V_b = -\frac{6EI}{L^2} \theta_b + \frac{12EI}{L^3} u_b$$

$$V_b = -\frac{3}{2} \frac{6EI}{L^2} \frac{u_b}{L} + \frac{12EI}{L^3} u_b = \frac{3EI}{L^3} u_b$$

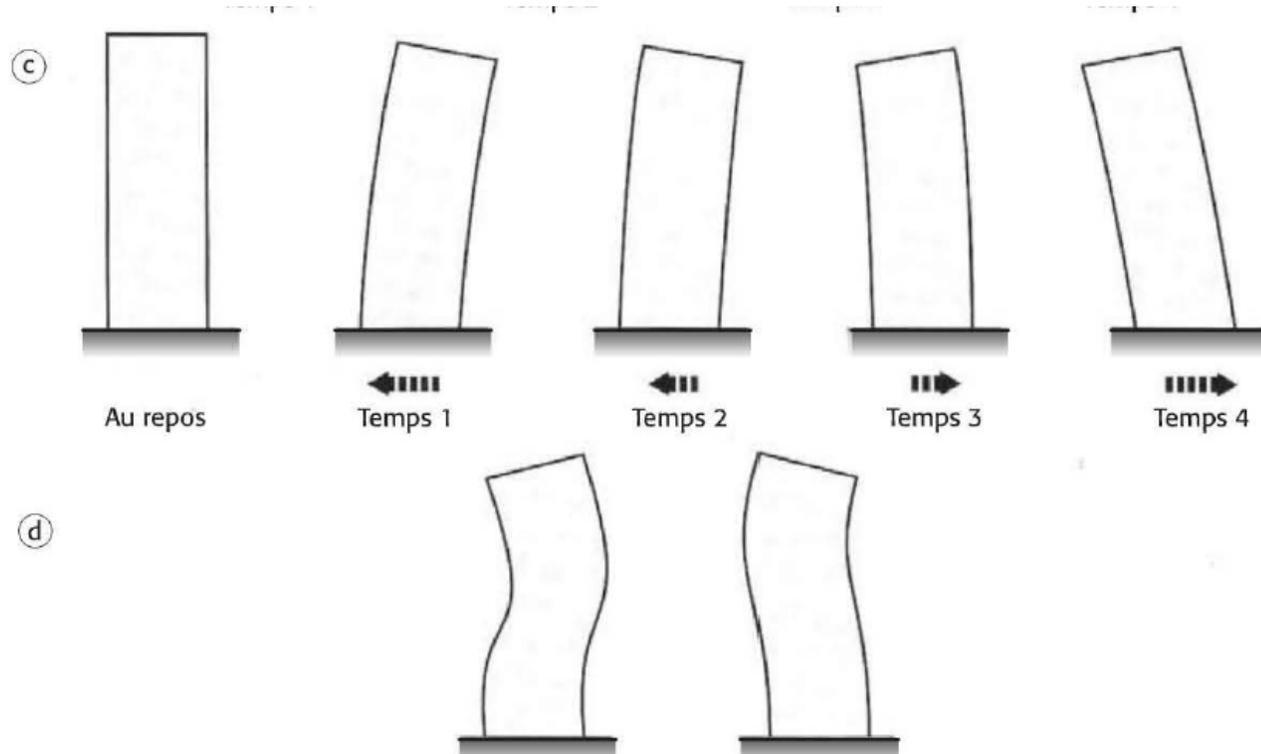
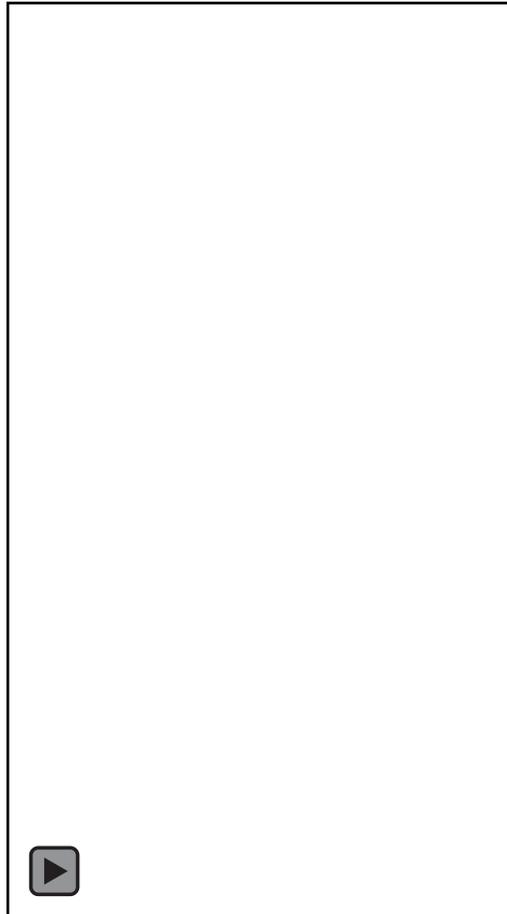
$$k = \frac{3EI}{L^3}$$



- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : système 1DDL

Retour au problème de séisme d'un système à 1DDL

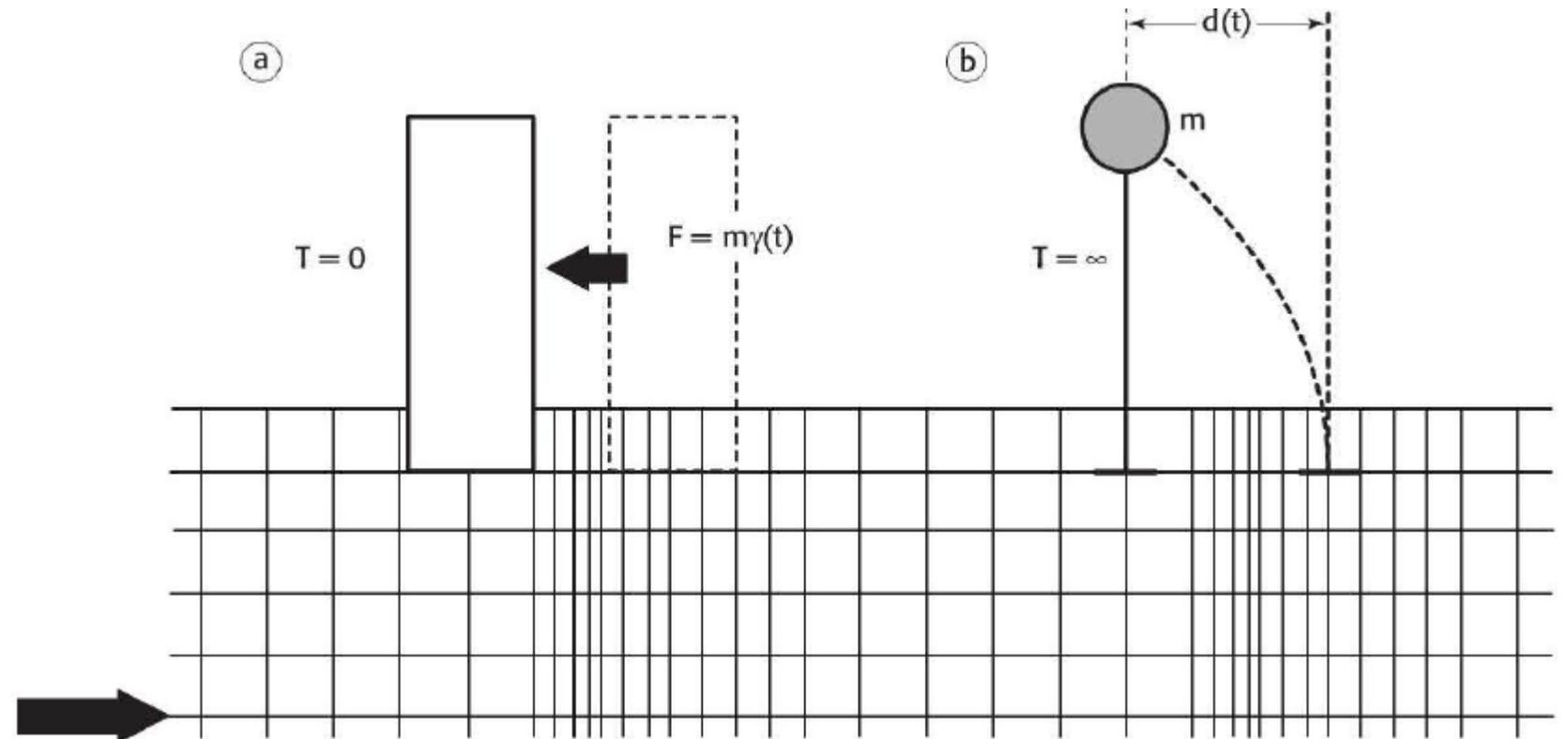
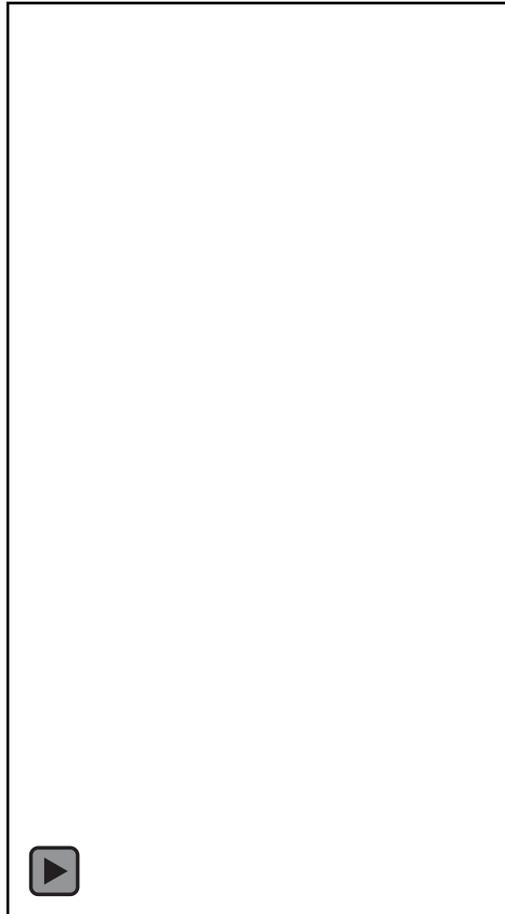




- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : système 1DDL

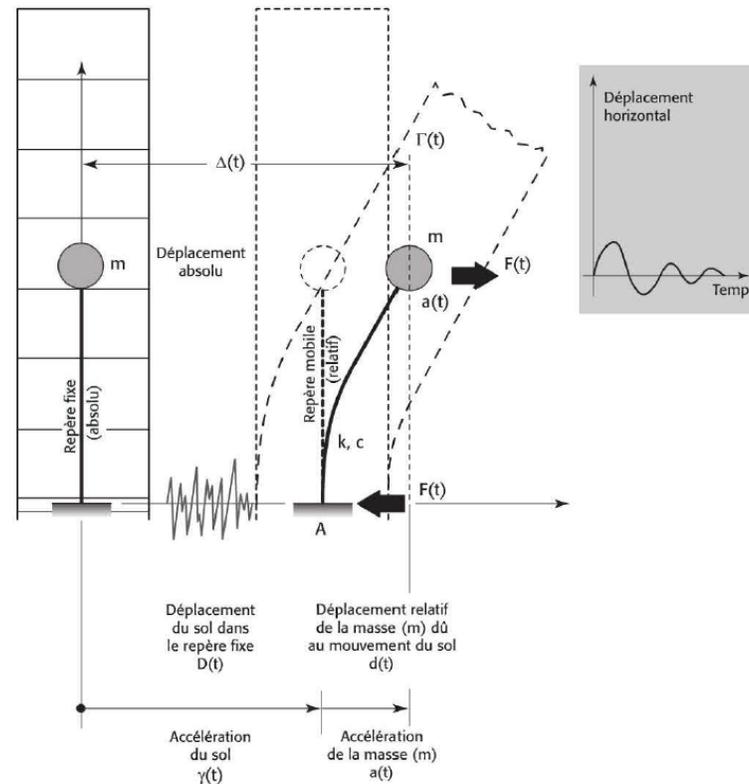
Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL





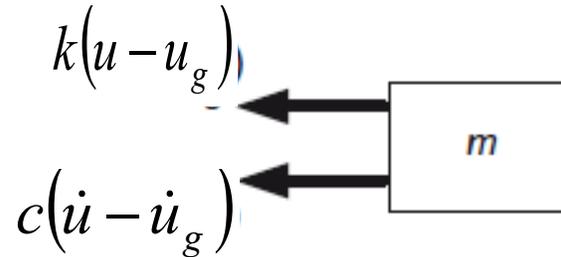
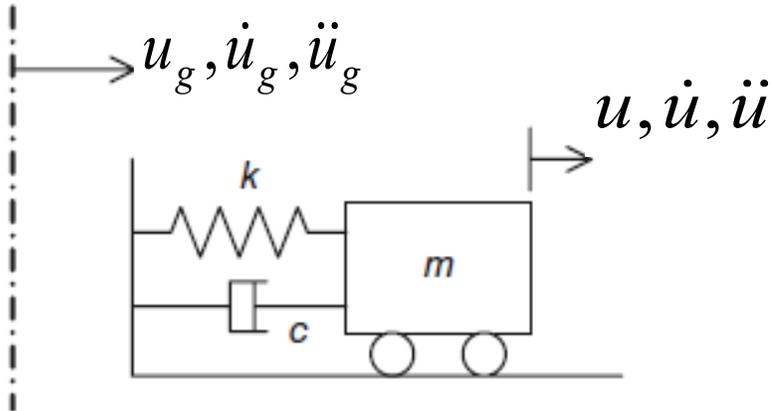
- *Bases de la dynamique des structures*
Séisme simplifié : système 1DDL

Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL





- *Bases de la dynamique des structures*
Séisme simplifié : système 1DDL

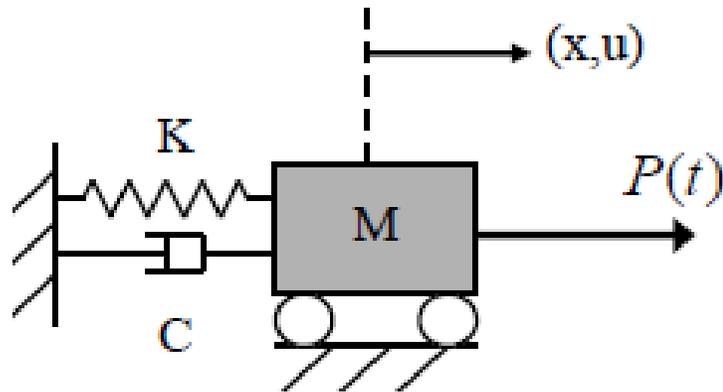


$$-k(u - u_g) - c(\dot{u} - \dot{u}_g) = m\ddot{u}$$

$$v = u - u_g \quad -kv - c.\dot{v} = m.\ddot{v} + m\ddot{u}_g$$

Notons $\omega^2 = k/m \quad \xi = c/2m\omega$

Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL



$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P(t)$$

$$m.\ddot{v} + c.\dot{v} + kv = -m\ddot{u}_g$$

Force d'inertie

$$\ddot{v} + 2\xi\omega.\dot{v} + \omega^2 v = -\frac{m\omega^2}{k}\ddot{u}_g = \frac{\omega^2}{k} \left(-m\ddot{u}_g \right)$$

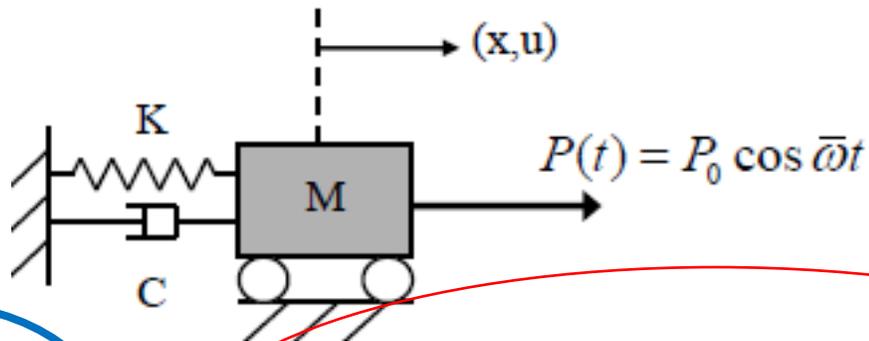


- *Bases de la dynamique des structures*
Séisme simplifié : système 1DDL

Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL
résolution de l'équation de mouvement

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P(t)$$

Cas Particulière où la force $P(t)$ est harmonique



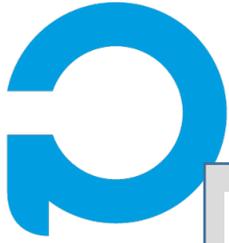
Équation du mouvement :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P_0 \cos \bar{\omega} t$$

La solution = la solution de l'équation homogène + une solution particulière

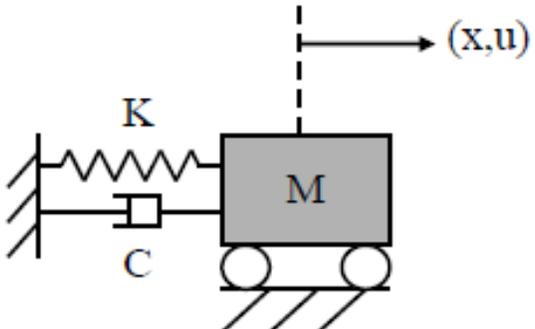
A

B



A- Oscillateur libre, amorti (Free **damped** S.D.O.F)

A.1- Solution analytique(1/3)



$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$\rightarrow s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2 = 4\omega^2(\xi^2 - 1)$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\omega^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Cas 1 : Amortissement critique (critical damping)

$$\Delta = 0 \quad \xi^2 - 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad \xi^2 - 1 = 0 \quad \xi = 1 \quad s_1 = s_2 = -\xi\omega \quad u(t) = (c_1 + c_2 t)e^{-\xi\omega t}$$

$$u(t=0) = u_0 \quad c_1 = u_0$$

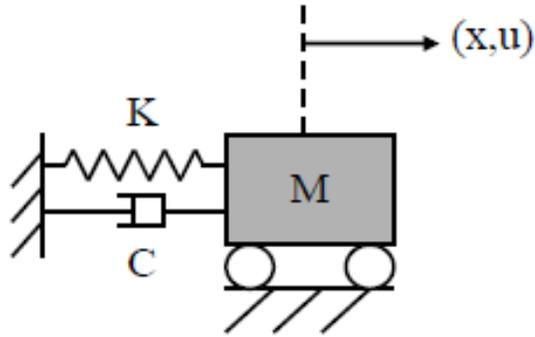
$$\dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \quad c_2 = \dot{u}_0 + \xi\omega u_0$$

$$\rightarrow u(t) = [u_0 + (\dot{u}_0 + \xi\omega u_0).t]e^{-\xi\omega t}$$



A- Oscillateur libre, amorti (Free **damped** S.D.O.F)

A.1- Solution analytique(2/3)



$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2 = 4\omega^2(\xi^2 - 1)$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\omega^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Case 2 : Amortissement subcritique (Subcritical damping)

$$\Delta < 0 \quad \xi^2 - 1 < 0$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm i\omega_D$$

$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t)$$

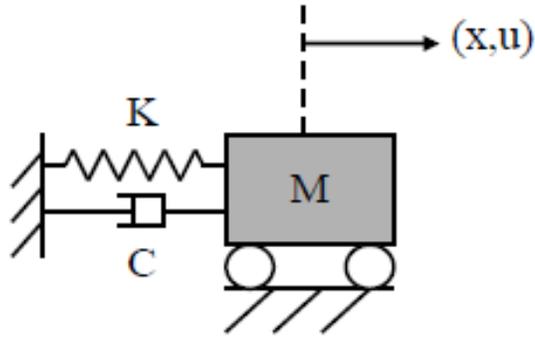
$$= e^{-\xi\omega t} \cdot A \cos(\omega_D t - \phi)$$

avec

$$\begin{cases} A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi\omega u_0}{\omega_D}\right)^2} \\ \phi = \arctan \frac{(\dot{u}_0 + \xi\omega u_0)/\omega_D}{u_0} \end{cases}$$



A.1- Solution analytique(3/3)



$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$
$$\Leftrightarrow \ddot{u} + 2\xi\omega\dot{u} + \omega^2 u = 0$$

$$s^2 + 2\xi\omega s + \omega^2 = 0$$

$$\Delta = 4\xi^2\omega^2 - 4\omega^2 = 4\omega^2(\xi^2 - 1)$$

$$s_{1,2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{-2\xi\omega \pm \sqrt{4\omega^2(\xi^2 - 1)}}{2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1}$$

Case 3 : Amortissement supercritique (Supercritical damping)

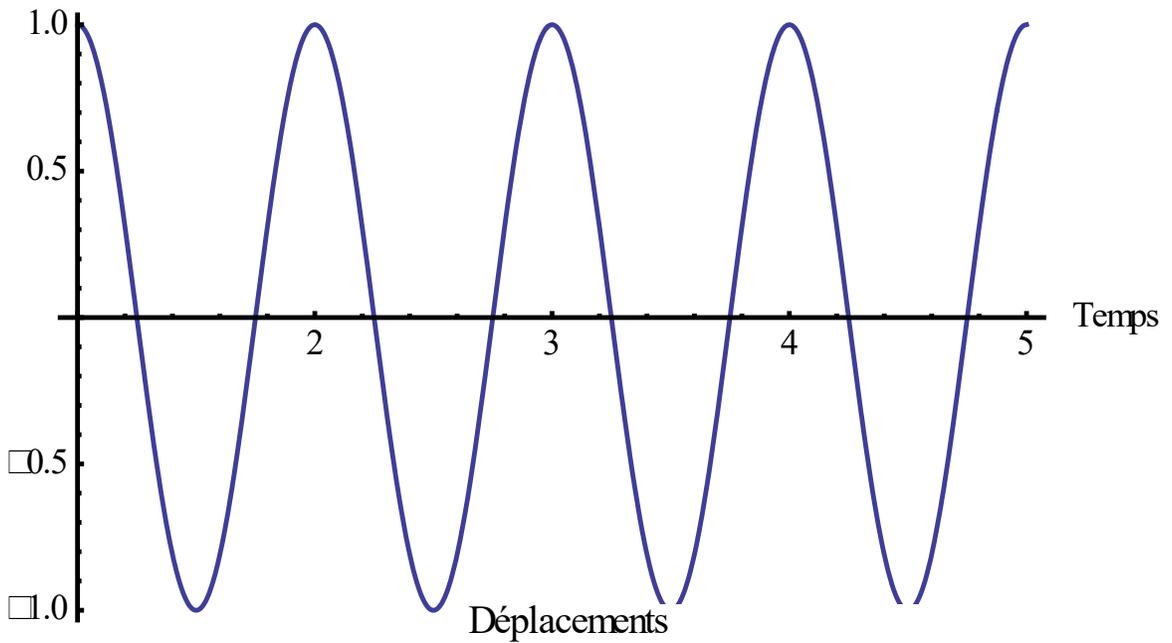
$$\Delta > 0 \quad \xi^2 - 1 > 0$$

$$s_{1,2} = -\xi\omega \pm \omega\sqrt{\xi^2 - 1} = -\xi\omega \pm \omega_D$$

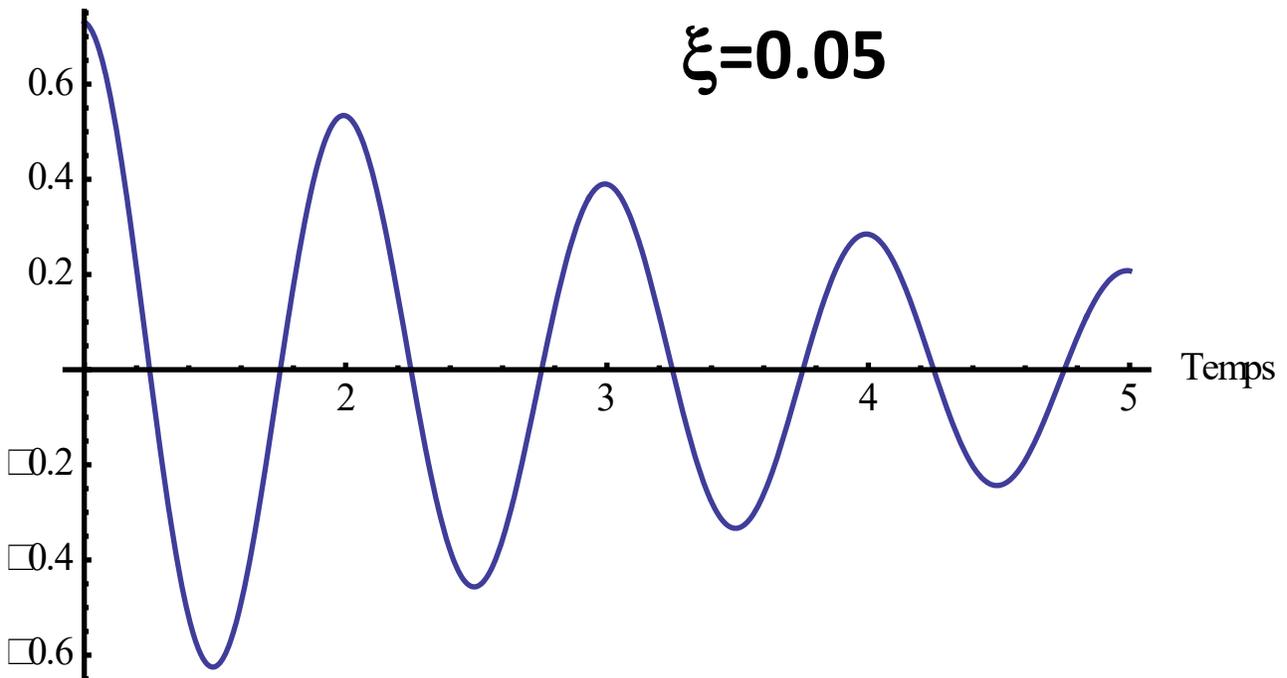
$$u(t) = e^{-\xi\omega t} (A_1 \cdot \cosh \omega_D t + A_2 \sinh \omega_D t)$$



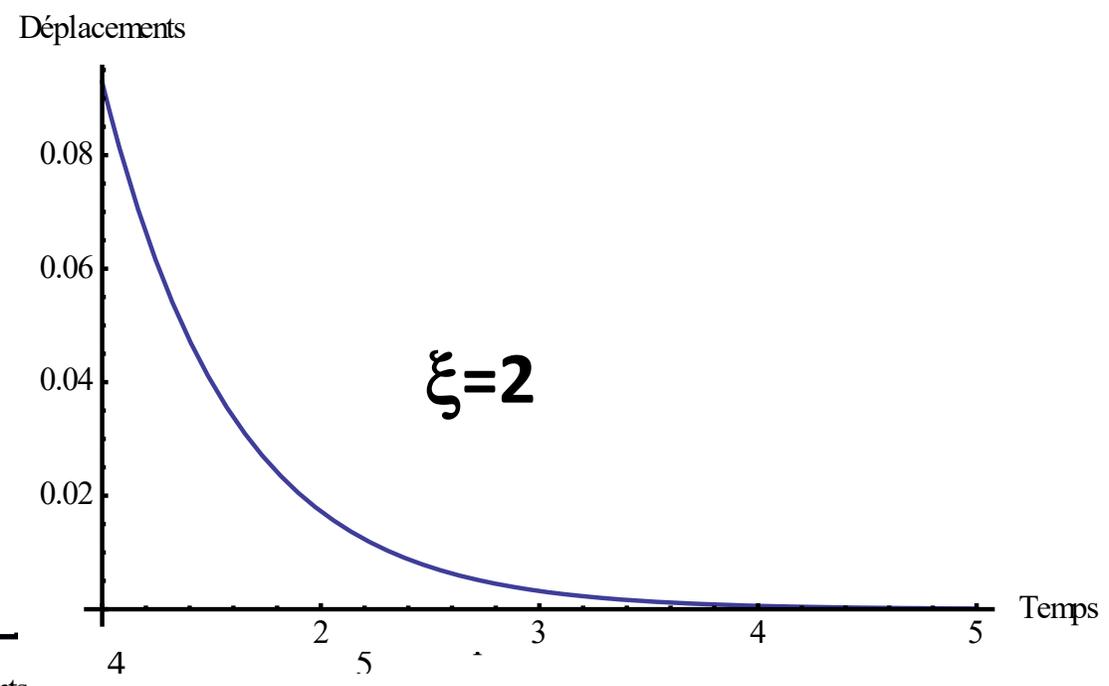
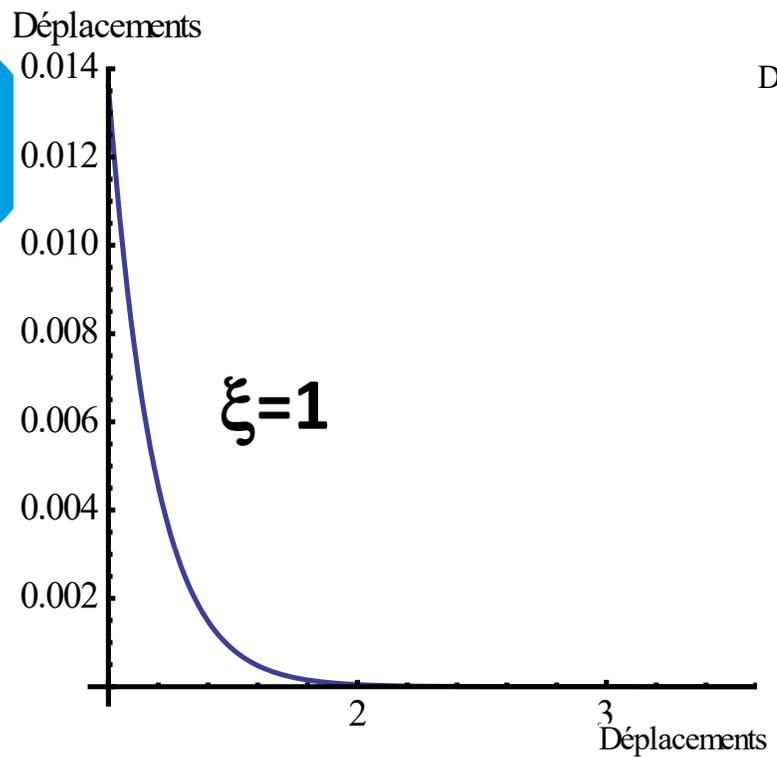
Déplacements



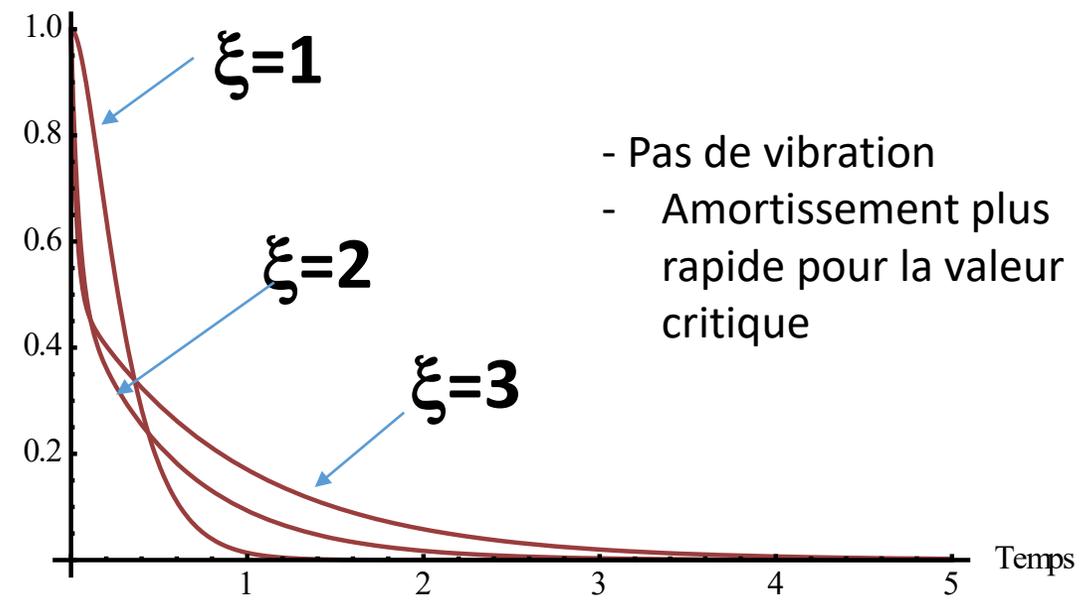
Déplacements



Temps



Pourquoi il ne faut pas chercher un amortissement supercritique





POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

A- Oscillateur libre, amorti (Free **damped** S.D.O.F)

A.2- Identification du coefficient d'amortissement (2/4)

Les origines de l'amortissement:

- (1) Structure interne des matériaux
- (2) assemblage, fondations, éléments non-structuraux
difficile à évaluer cette partie
nécessité des mesures : différentes possibilités

a/ atténuation des vibrations libres

b/ amplification à la résonance

c/ largeur du pic de la résonance



A.2- Identification du coefficient d'amortissement (2/4)

Première méthode (1) :

Décrément logarithmique de l'amplitude

Solution

$$\begin{aligned} u(t) &= e^{-\xi\omega t} (A_1 \cos \omega_D t + A_2 \sin \omega_D t) \\ &= e^{-\xi\omega t} . A \cos(\omega_D t - \phi) \end{aligned}$$

$$\xi = \frac{C}{2\omega M}$$

$$\beta = \frac{\varpi}{\omega}$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

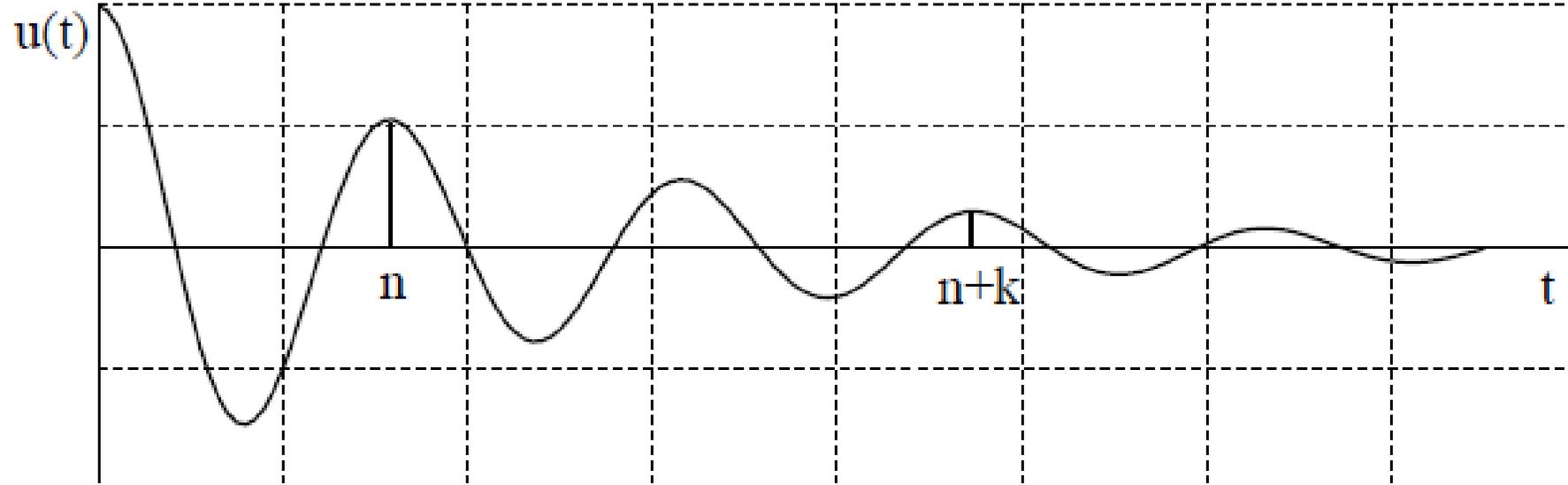
Principe

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = 0$$

$$\text{avec } \begin{cases} A = \sqrt{u_0^2 + \left(\frac{\dot{u}_0 + \xi \omega u_0}{\omega_D}\right)^2} \\ \phi = \arctan \frac{(\dot{u}_0 + \xi \omega u_0) / \omega_D}{u_0} \end{cases}$$

Première méthode (1) :

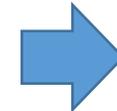
Décroissement logarithmique de l'amplitude (Cont)



$$u(t) = Ae^{-\xi\omega t} \cos \omega_D t \quad t_n = \frac{2\pi n}{\omega_D} \quad t_{n+k} = \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D}$$

$$\frac{u_n}{u_{n+k}} = \frac{e^{-\xi\omega \frac{2\pi n}{\omega_D}}}{e^{-\xi\omega \frac{2\pi(n+k)}{\omega_D}}} = e^{2\pi k \xi \frac{\omega}{\omega_D}}$$

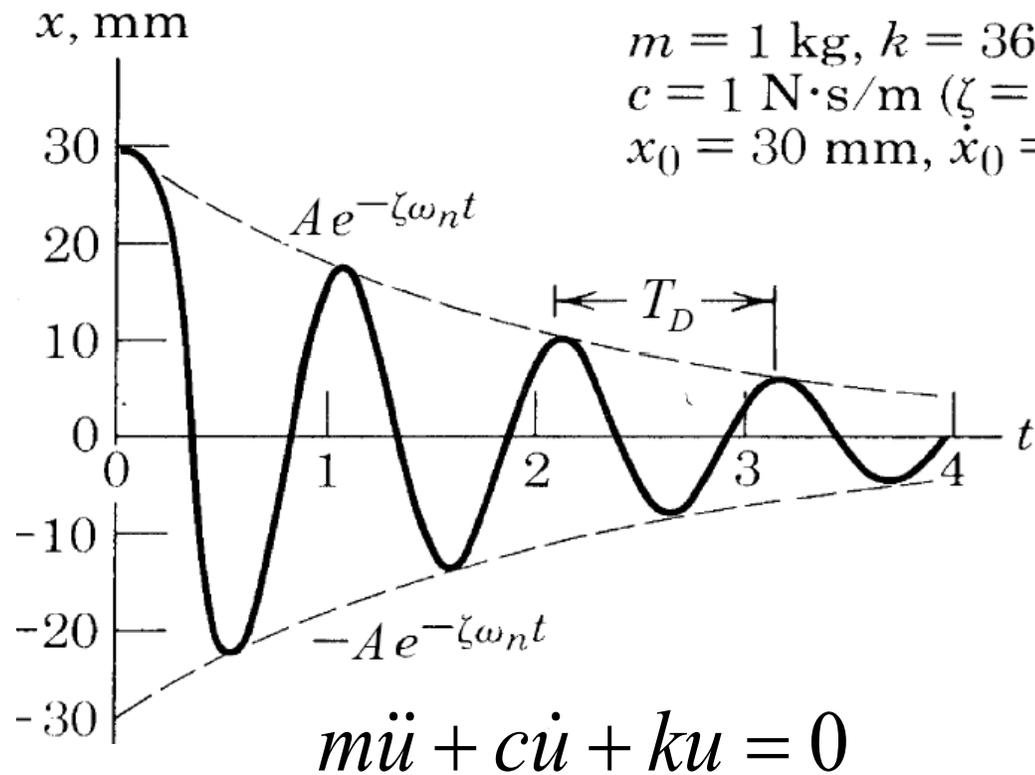
$$\delta_k = \ln \left(\frac{u_n}{u_{n+k}} \right) = 2\pi k \xi \frac{\omega}{\omega_D} = 2\pi k \xi / \sqrt{1 - \xi^2} \approx 2\pi k \xi$$



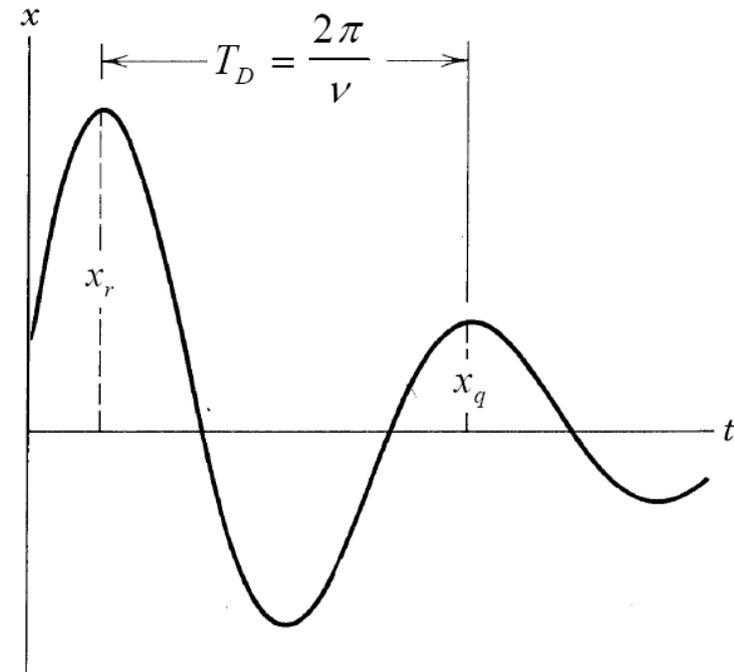
$$\xi = \frac{\delta_k}{2\pi k}$$



Deuxième méthode (Atténuation)



$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$





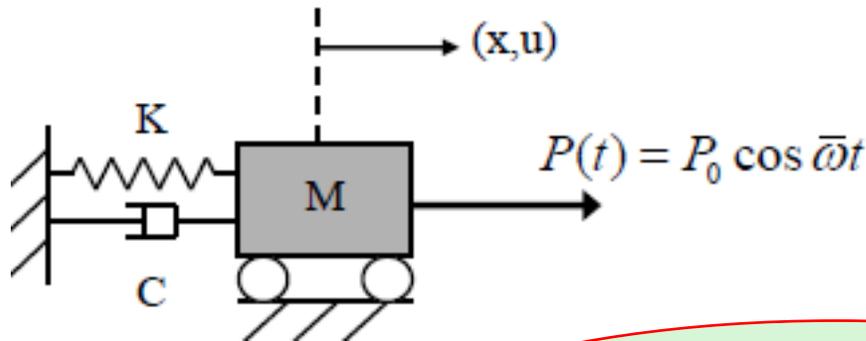
- *Bases de la dynamique des structures*
Séisme simplifié : système 1DDL

Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL

Résolution de l'équation de mouvement

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P(t)$$

Cas Particulière où la force $P(t)$ est harmonique

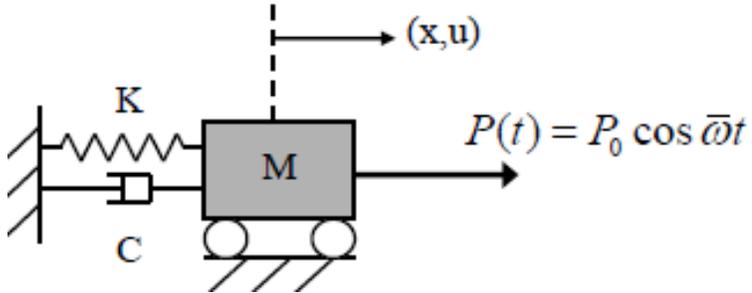


Équation du mouvement :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P_0 \cos \bar{\omega} t$$

La solution = la solution de l'équation homogène + une solution particulière

$$u_g(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$



Équation du mouvement :

$$M \ddot{u} + C \dot{u} + K u = P_0 \cos \bar{\omega} t$$

Solution = **solution générale du problème homogène** + solution particulière

B) Solution Particulière

$$u_p(t) = U \cos(\bar{\omega} t - \phi) = U \cos \bar{\omega} t \cos \phi - U \sin \bar{\omega} t \sin \phi$$

$$\left[U(-\bar{\omega}^2 M + K) \sin \phi - UC \bar{\omega} \cos \phi \right] \sin \bar{\omega} t + \left[U(-\bar{\omega}^2 M + K) \cos \phi + UC \bar{\omega} \sin \phi \right] \cos \bar{\omega} t = P_0 \cos \bar{\omega} t$$

$$\equiv 0 \rightarrow \tan \phi = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\equiv P_0 \rightarrow U = \frac{P_0/K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

$$\text{avec } \begin{cases} \xi = \frac{C}{2\omega M} \\ \beta = \bar{\omega}/\omega \end{cases}$$



$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \cos \omega t$$

$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$



Component transitoire
des déplacements

$$+ U \cos(\omega t - \phi)$$



Component permanent
des déplacements

$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$

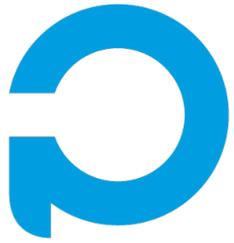
$$+ U \cos \omega t \cos \phi - U \sin \omega t \sin \phi$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \xi = \frac{C}{2\omega M}$$

$$U = \frac{P_0}{K} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$



Solution dans l'espace complexe

Équation du mouvement :

$$M \ddot{\bar{u}} + C \dot{\bar{u}} + K \bar{u} = P_0 e^{i\bar{\omega}t} \quad (1bis)$$

Re-écriture de la solution pour faire apparaître la fonction de transfert

$$\longrightarrow \text{Trouver } \bar{u}(t) \text{ (complexe)} \longrightarrow u(t) = \Re[\bar{u}(t)]$$

Solution particulière : $\bar{u}(t) = \bar{U} e^{i\bar{\omega}t}$

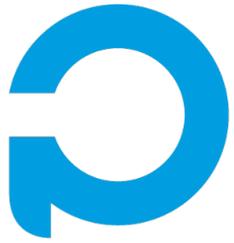
dans (1bis)

$$\longrightarrow -M \bar{\omega}^2 \bar{U} e^{i\bar{\omega}t} + C i \bar{\omega} \bar{U} e^{i\bar{\omega}t} + K \bar{U} e^{i\bar{\omega}t} = P_0 e^{i\bar{\omega}t}$$

$$\Rightarrow \bar{U} = \frac{P_0/K}{(1-\beta^2) + 2i\xi\beta}$$

$$\Rightarrow \bar{u}(t) = \frac{P_0/K}{(1-\beta^2) + 2i\xi\beta} e^{i\bar{\omega}t} = \frac{1/K}{(1-\beta^2) + 2i\xi\beta} \bar{P}(t) = \boxed{\bar{H}(\beta)} \bar{P}(t)$$

Fonction de transfert complexe



Réécriture de la fonction de transfert:

$$\bar{C} = A + iB = |\bar{C}| e^{i\phi} \quad \text{avec} \quad |\bar{C}| = \sqrt{A^2 + B^2}$$
$$\text{et} \quad \phi = \arctan B/A$$

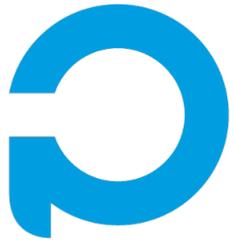
$$\bar{H}(\beta) = \frac{1/K}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{-i\phi} = |\bar{H}(\beta)| e^{-i\phi} \quad \text{avec} \quad \phi = \arctan\left(\frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}\right)$$

$$\bar{u}(t) = \bar{U} e^{i\bar{\omega}t} = P_0 |\bar{H}(\beta)| e^{i(\bar{\omega}t - \phi)}$$

$$\Rightarrow u(t) = \Re[\bar{u}(t)] = P_0 |\bar{H}(\beta)| \cos(\bar{\omega}t - \phi)$$

Amplification dynamique: $D = \frac{|u_{\max}|}{|u_{\max}^{stat}|} = \frac{P_0 |\bar{H}(\beta)|}{\frac{P_0}{K}} = K |\bar{H}(\beta)|$

(en déplacement)



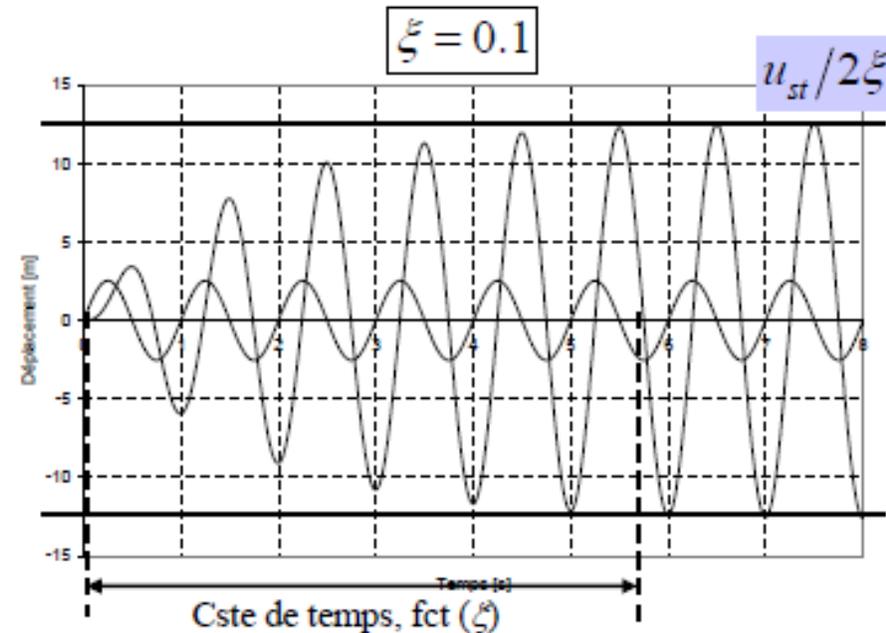
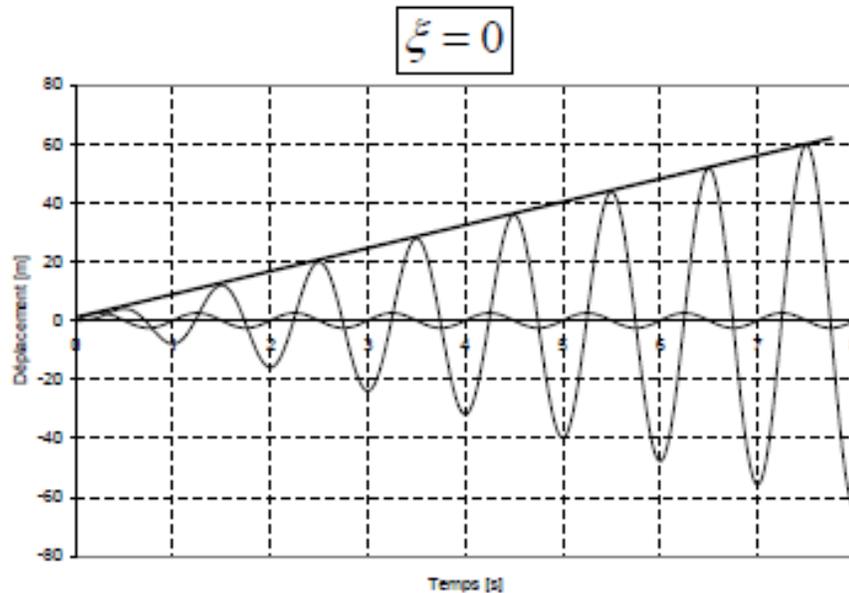
Caractéristiques de la réponse résonante:

$$D(\beta = 1) = \frac{1}{2\xi} \neq \text{maximum}$$

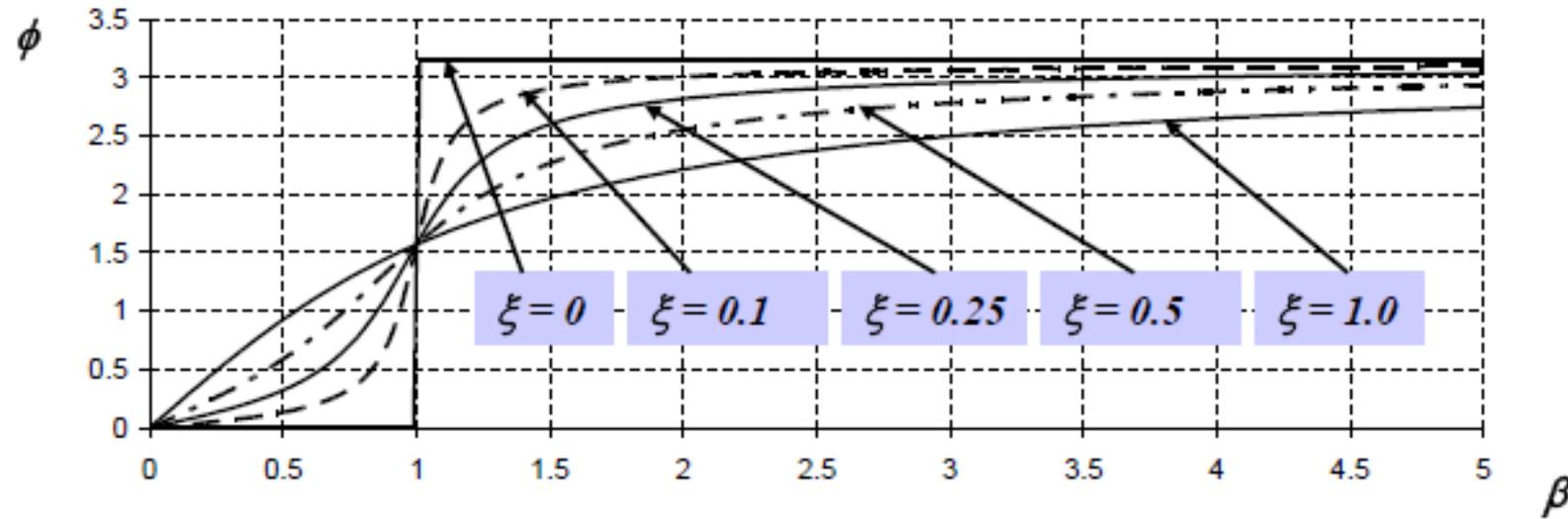
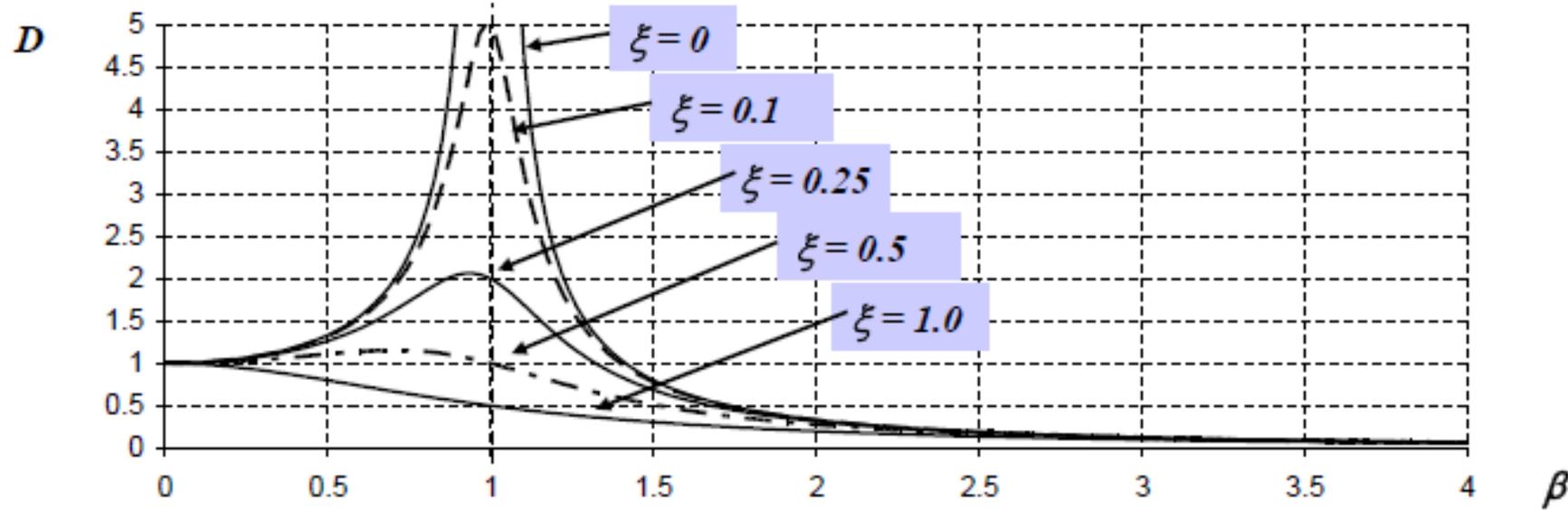
$$\beta_{\max} = \sqrt{1 - 2\xi^2} \quad \text{et} \quad D(\beta = \beta_{\max}) = \frac{1}{2\xi\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{1}{2\xi} \frac{\omega}{\omega_D}$$

$$D = K \left| \overline{H}(\beta) \right| = \frac{|u_{\max}|}{|u_{\max}^{sta}|}$$
$$\overline{H}(\beta) = \frac{1/K}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} e^{-i\phi}$$

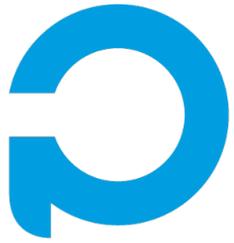
Réponse complète (stationnaire + transitoire), au départ du repos :



Solution du problème SDOF : force harmonique

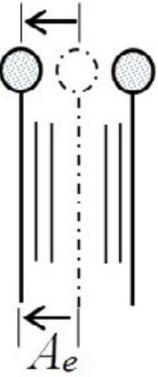


Solution du problème SDOF : force harmonique

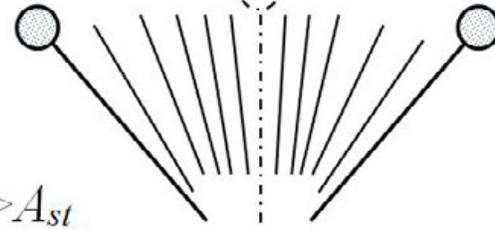


P
OR
Écolt

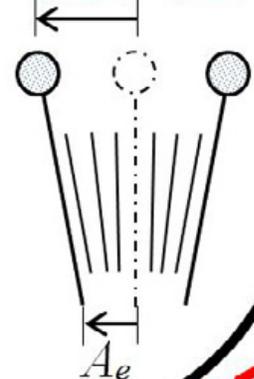
$$A_{dyn} \approx A_{st}$$



$$A_{dyn} \gg A_{st}$$



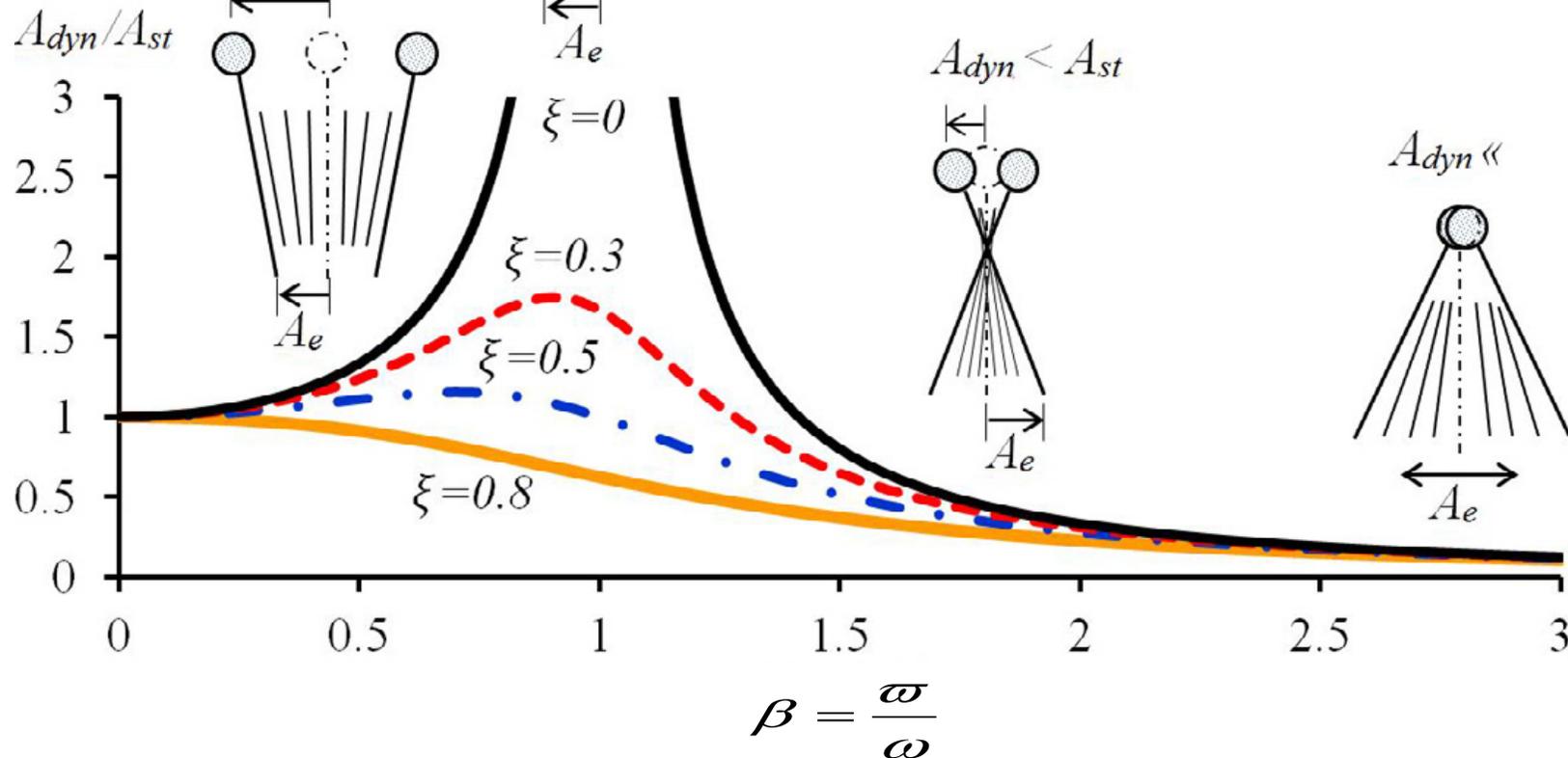
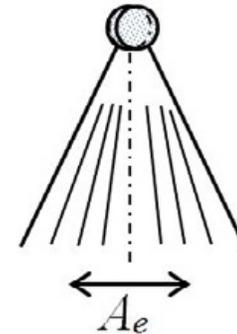
$$A_{dyn} > A_{st}$$

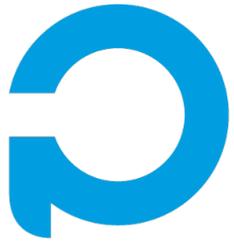


$$A_{dyn} < A_{st}$$



$$A_{dyn} \ll A_{st}$$





POLYTECH
ORLÉANS

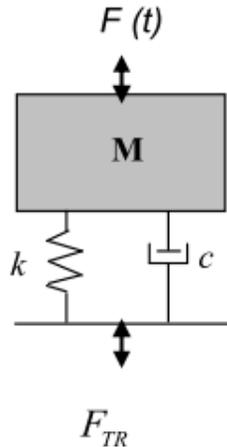
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

**Amplification dynamique
(en déplacement)**

Solution du problème SDOF : **force harmonique**

$$R_d = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Amplification dynamique (en force)



$$F_{TR}(t) = c\dot{x}(t) + kx(t)$$

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + F_{TR}(t)$$

$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{c^2 \dot{x}_{\max}^2 + k^2 x_{\max}^2}$$

$$\dot{x}_{\max} = \omega x_{\max}$$

$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{x_{\max}^2 (k^2 + \omega^2 c^2)} = x_{\max} \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}$$

$$R_f = \frac{F_{dyn}}{F_{st}} = \frac{x_{\max} \sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}}{k \cdot x_{st}} = \frac{x_{\max}}{x_{st}} \frac{\sqrt{k^2 + \omega^2 c^2}}{k} = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 c^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



Troisième méthode d'identification du coefficient d'amortissement

From $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \cos \omega t$

$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t}$$

Composante transitoire

$$+ \frac{P_0}{K} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

Composante permanente

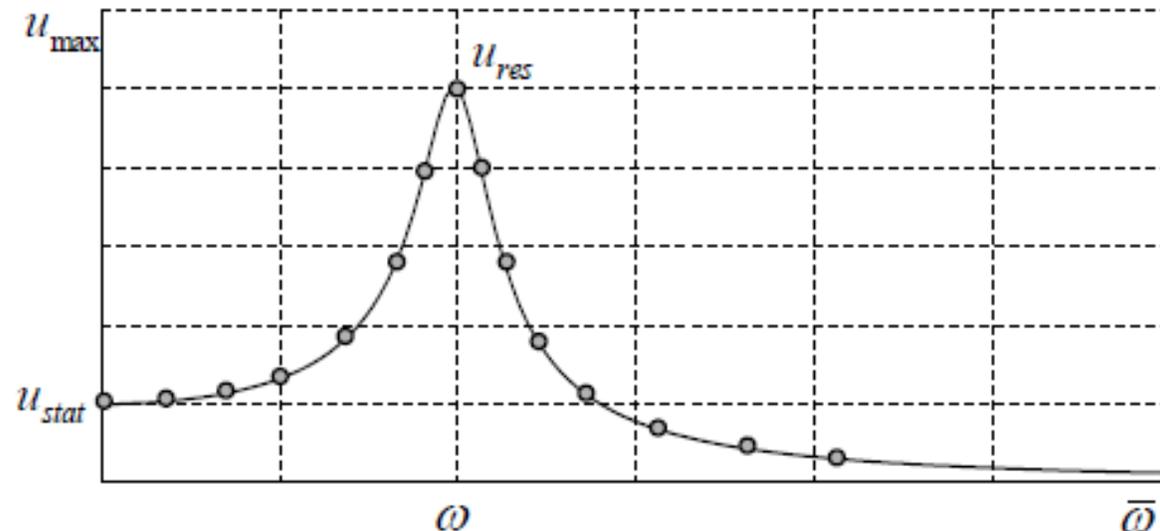
$$\xi = \frac{C}{2\omega M} \quad \beta = \frac{\omega}{\omega} \quad \omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2} \quad \tan \phi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$



Troisième méthode d'identification du coefficient d'amortissement

b/ Amplification à la résonance

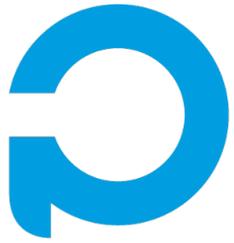
Excitation harmonique pour une série de pulsations discrètes ("sine sweep")
et mesure du déplacement maximum stationnaire



A la résonance,

$$D_{\max} = \frac{u_{res}}{u_{stat}} = \frac{1}{2\xi} \quad (\text{si } \xi \ll 1)$$

$$\rightarrow \xi = \frac{u_{stat}}{2u_{\max}}$$



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénierie des Sciences et des Technologies

Solution du problème SDOF : **force harmonique**

Type de construction	ζ
Béton	0,02 - 0,15
Acier	0,001 - 0,07 (peu d'amortissement)
Bois	0,05 - 0,20

Par défaut pour les bâtiments $\xi=0.05$



POLYTECH[®]
ORLÉANS

École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- **Introduction**
- **Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique**
- **Éléments de base de dynamique de structures**
- Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique



- *Bases de la dynamique des structures*

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \cos \varpi t$$

$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t} \\ + U \cos(\varpi t - \phi)$$



Component transitoire
des déplacements



Component permanent
des déplacements

**Séisme simplifié : systèmes 1DDL
HARMONIQUES**

$$u(t) = (A \cos \omega_D t + B \sin \omega_D t) e^{-\xi \omega t} \\ + U \cos \varpi t \cos \phi - U \sin \varpi t \sin \phi$$

$$\omega_D = \omega \sqrt{1 - \xi^2}$$

$$\xi = \frac{C}{2\omega M}$$

$$\beta = \frac{\varpi}{\omega}$$

$$\tan \phi = \frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}$$

$$U = \frac{P_0}{K} \left[\frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$



- **Bases de la dynamique des structures**

Préalable: principe de superposition

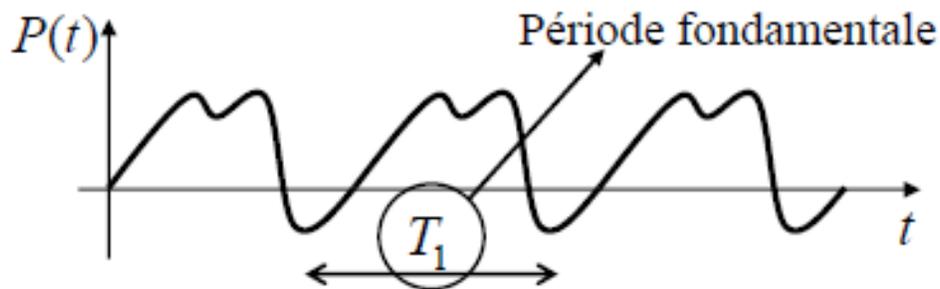
L'opérateur de dérivation $L(u) = M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku$ est linéaire à coefficients constants

→ Si u_1 est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_1(t)$ et u_2 est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_2(t)$

Alors, $C_1 u_1 + C_2 u_2$ est solution de $M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = C_1 P_1(t) + C_2 P_2(t)$

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

PERIODIQUES



Toute fonction périodique peut se décomposer en série de Fourier

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_1^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

$$a_0 = \frac{1}{T_1} \int_0^{T_1} P(t) dt \longrightarrow \text{Moyenne}$$

$$\begin{cases} a_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} P(t) \cos(\bar{\omega}_n t) dt \\ b_n = \frac{2}{T_1} \int_0^{T_1} P(t) \sin(\bar{\omega}_n t) dt \end{cases} \quad \bar{\omega}_n = n \bar{\omega}_1 = n \frac{2\pi}{T_1}$$

└──────────┬──────────┘ Taux de participation de l'harmonique n



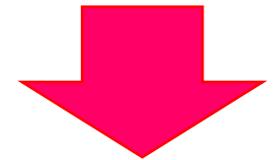
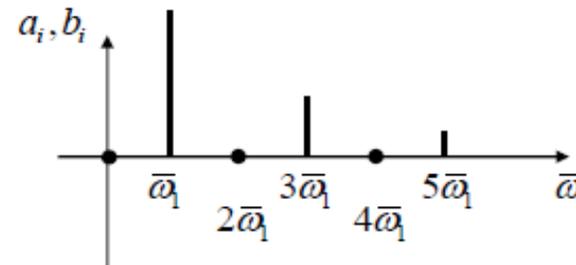
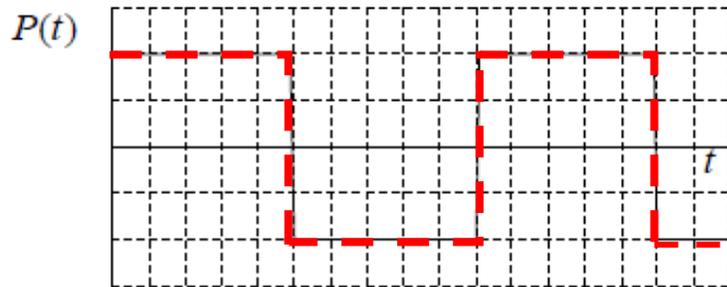
PARASISMIQUE

- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

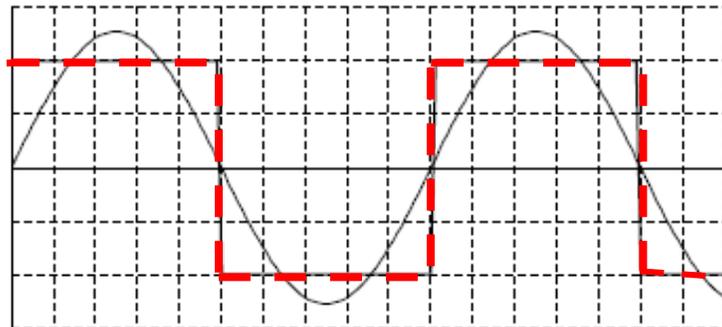
PERIODIQUES

Exemple

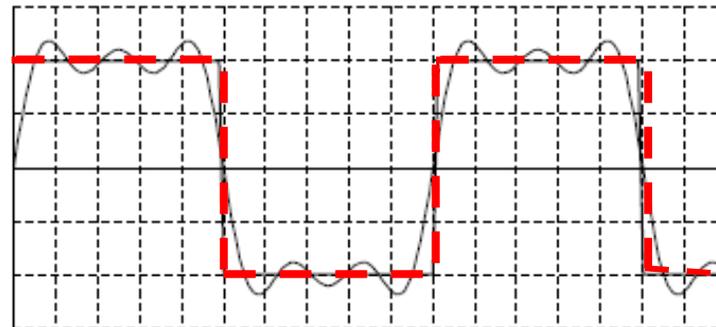


Transformation en
somme de
solicitations
harmoniques

Harmonique 0 (fondamentale)



Harmonique 0 + 1 + 2





- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL **PERIODIQUES**

Superposition

$$P(t) = a_0 + \sum_1^{\infty} a_n \cos \bar{\omega}_n t + \sum_1^{\infty} b_n \sin \bar{\omega}_n t$$

$$u_0 = \frac{a_0}{K} \quad \text{et } u_n(t) = \text{réponse sous } \begin{cases} a_n \cos(n\bar{\omega}_1 t) \\ b_n \sin(n\bar{\omega}_1 t) \end{cases} \equiv \text{Réponse sous charge harmonique}$$

$$\rightarrow u(t) = u_0 + \sum_1^{\infty} u_n(t)$$

De façon similaire les series Fourier complexes :

$$P(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \bar{P}_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad \text{avec} \quad \bar{P}_n = \frac{1}{T_1} \int_{-T_1/2}^{T_1/2} P(t) e^{-in\bar{\omega}_1 t} dt$$

$$\bar{u}_n(t) = \bar{H}(\beta_n) \bar{P}_n e^{in\bar{\omega}_1 t} \quad \text{avec} \quad \beta_n = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$$

$$\bar{u}(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} \bar{u}_n(t) \quad \Rightarrow \quad u(t) = \Re[\bar{u}(t)]$$

$$\bar{H}(\beta_n) = \frac{1}{K} \frac{1}{(1 - \beta^2) + 2i\xi\beta} e^{-i\phi}$$

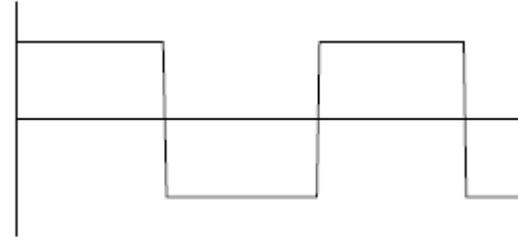


- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

PERIODIQUES

Exemple: réponse stationnaire sous $P(t) =$

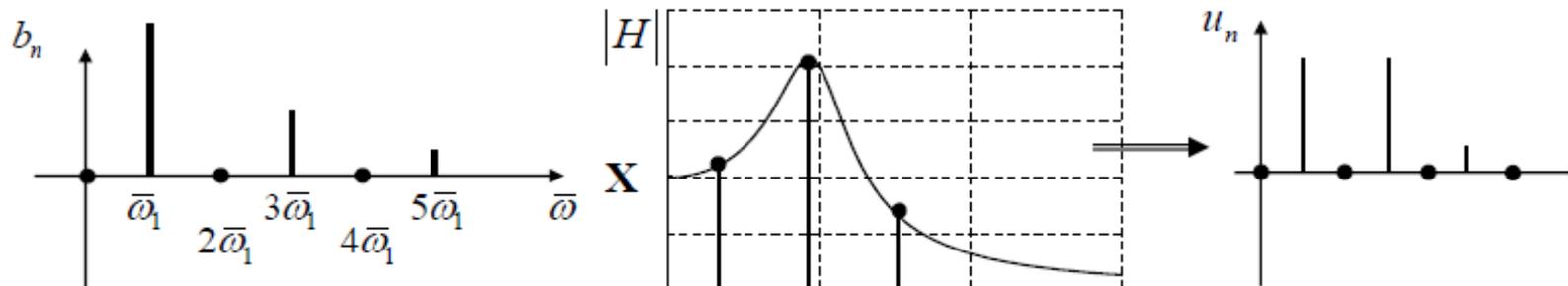


Seul les harmoniques sinus impairs (b_n avec n impair) sont non-nuls

$$\rightarrow P_n(t) = b_n \sin(n\bar{\omega}_1 t)$$

$$\rightarrow u_n(t) = \frac{b_n}{K} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta_n)^2}} \sin(n\bar{\omega}_1 t - \phi_n) = b_n |H(\beta_n)| \sin(n\bar{\omega}_1 t - \phi_n)$$

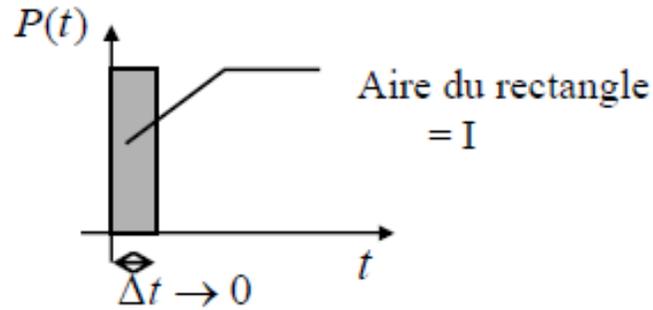
avec $\beta_n = \frac{n\bar{\omega}_1}{\omega}$ et $\phi_n = \phi(\beta_n)$





Cas particulier: impulsion de Dirac

Solution fondamentale



Fonction de Dirac :
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 & \text{si } t \neq 0 \\ \delta(t) \text{ non définie en } t = 0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad (\Rightarrow [\delta] = [T^{-1}])$$

Excitation impulsionnelle : $P(t) = I \delta(t)$ $[I] = [FT]$

Newton : $M \frac{d}{dt} \dot{u} = P(t) - F_K(t) - F_C(t)$

$$\int_0^{\Delta t} \dots dt \Rightarrow M \dot{u} \Big|_0^{\Delta t} = \int_0^{\Delta t} I \delta(t) dt - \int_0^{\Delta t} [F_K(t) + F_C(t)] dt$$

$$\Delta t \rightarrow 0 \Rightarrow M \dot{u}(0^+) = I - 0$$

L'oscillateur se comporte comme un oscillateur libre auquel on donne une vitesse initiale $\dot{u}_0 = I/M$

$$\rightarrow \text{si } u_0 = 0, u(t) = \frac{I}{M \omega_D} e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t)$$

En particulier, si $I = 1$

$$u(t) = \frac{1}{M \omega_D} e^{-\xi \omega t} \sin(\omega_D t) = h(t)$$

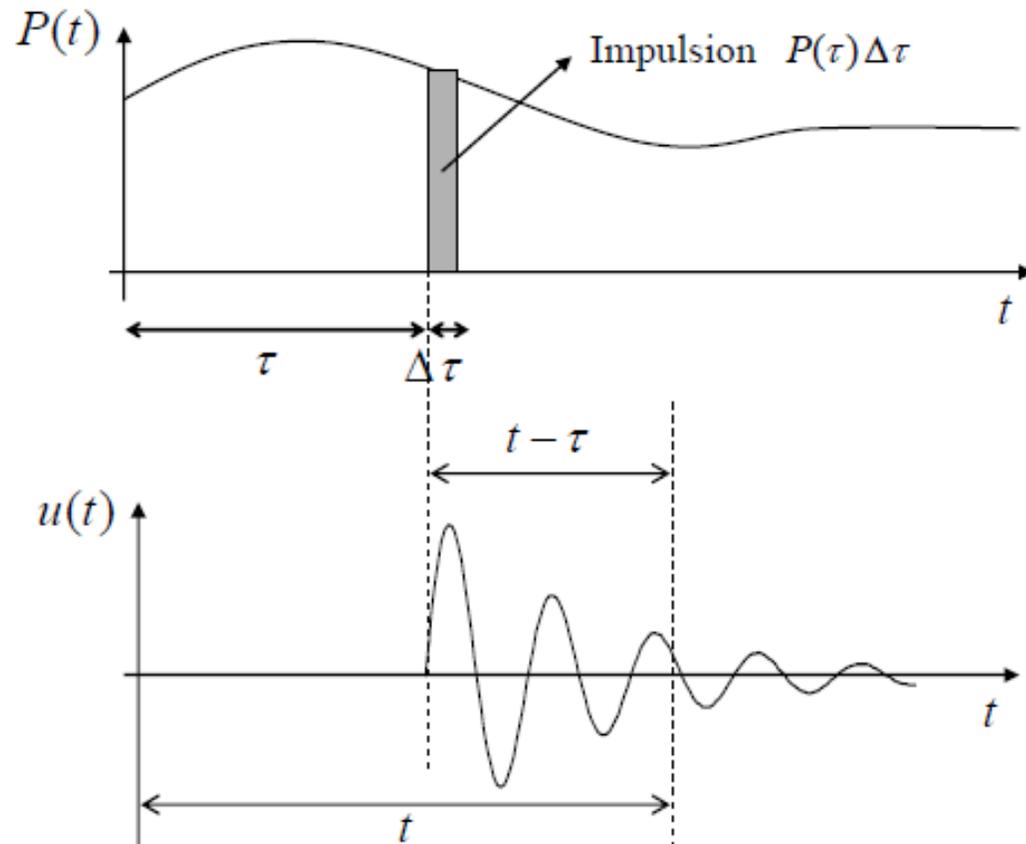
$h(t)$ = fonction de réponse impulsionnelle unitaire



- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

ARBITRAIRE



Principe: considérer la charge $P(t)$
comme une succession
d'impulsions de durée $\Delta\tau$

Déplacement en t sous l'effet d'une
impulsion en τ :

$$\Delta u(t, \tau) = P(\tau) \Delta\tau h(t - \tau)$$



Déplacement total en t = somme des
contributions impulsionnelles
appliquées entre 0 et t :

$$\begin{aligned} u(t) &= \sum_i \Delta u(t, \tau_i) \\ &= \sum_i P(\tau_i) \Delta\tau_i h(t - \tau_i) \end{aligned}$$



- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

ARBITRAIRE

La réponse impulsionnelle n'est rigoureuse que si $\Delta\tau \rightarrow 0$

$$\Rightarrow u(t) = \int_0^t P(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad = \textit{convolution de } P \textit{ par } h$$

$$= \frac{1}{M \omega_D} \int_0^t P(\tau) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin[\omega_D(t-\tau)] d\tau$$

Intégrale de Duhamel

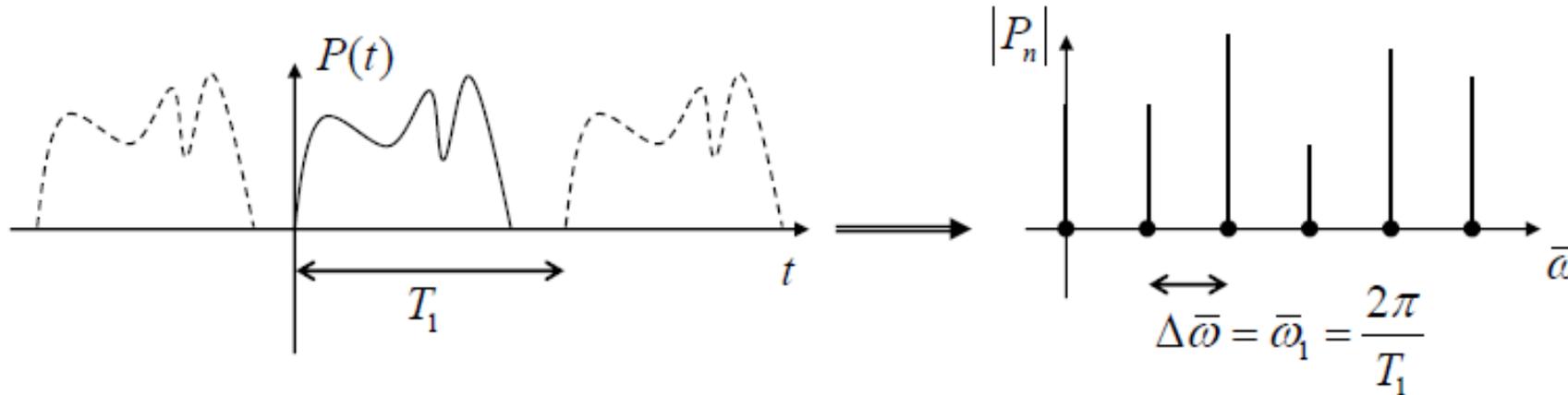
- Pour certaines formes simples de $P(t)$, valeurs tabulées dans des ouvrages spécialisés
- Sinon, intégration numérique (avec algorithmes adaptés)



- *Bases de la dynamique des structures*

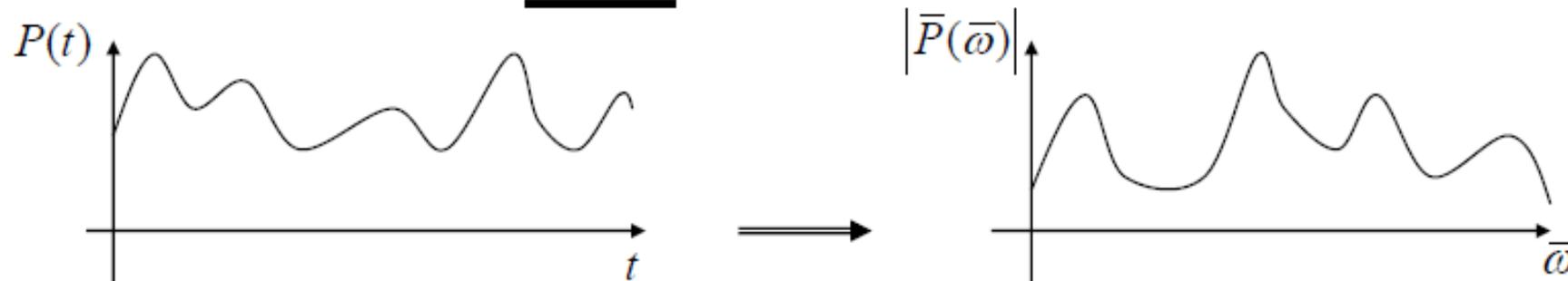
Séisme simplifié : systèmes 1DDL

ARBITRAIRE



Principe: considérer la sollicitation quelconque comme une sollicitation périodique de période T_1 puis passer à la limite ($T_1 \rightarrow \infty$)

Si $T_1 \rightarrow \infty$, $\Delta\bar{\omega} \rightarrow 0$ le *spectre* des harmoniques discrets devient un spectre continu

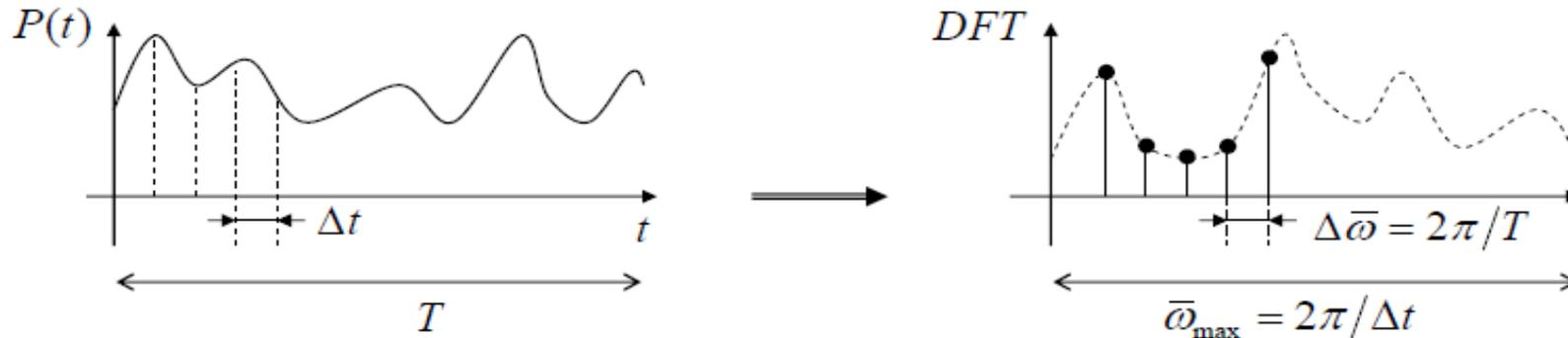




- *Bases de la dynamique des structures*

Séisme simplifié : systèmes 1DDL **ARBITRAIRE**

En pratique, les transformées de Fourier sont généralement effectuées à l'aide d'algorithmes de DFT (Discrete Fourier Transform) ou de FFT (Fast Fourier Transform), qui travaillent sur des signaux discrets



→ Attention au choix des pas et des périodes

Fonctions caractérisant l'oscillateur:

Domaine temporel: $h(t)$
 Domaine fréquentiel: $\bar{H}(\bar{\omega})$

} = Paire de Fourier

Opérations:

Domaine temporel: $P(t) \xrightarrow{\text{convolution}} u(t) = \int_0^t h(t - \tau) P(\tau) d\tau$

Domaine fréquentiel: $\bar{P}(\bar{\omega}) \xrightarrow{\text{multiplication}} \bar{u}(\bar{\omega}) = \bar{H}(\bar{\omega}) \bar{P}(\bar{\omega})$