

TD3 : Modèles de calcul

MT à k rubans

Une machine de Turing à k rubans \mathcal{M} est un tuple $(Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_F)$ similaire à celui d'une MT classique mais tel que :

- Chaque ruban possède une tête, donc la machine lit k -symboles de Γ à chaque étape.
- La fonction de transition partielle est $\delta : Q \times \Gamma^k \rightarrow Q \times \Gamma^k \times \{\leftarrow, \downarrow, \rightarrow\}^k$.
- Une configuration est un élément (q, u, z) de $Q \times (\Gamma^k)^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^k$.
- La configuration initiale associée à l'entrée $w \in \Sigma^*$ est $(q_0, (\omega B.wB^\omega, \omega B^\omega, \dots, \omega B^\omega), (0, 0, \dots, 0))$.
- Pour le calcul d'une fonction, la sortie est lue sur le premier ruban entre la position de la tête et le premier symbole B sur la droite.

Exercice 1. Montrer que les MT à 1 ruban calculent exactement les mêmes fonctions que les MT à k rubans.

Machine RAM

Une machine RAM est constituée :

- d'un programme, c'est à dire une liste finie d'instructions numérotées ;
- d'un registre appelé *co* contenant le compteur ordinal, c'est à dire le numéro de la prochaine instruction à exécuter, ce registre est incrémenté après chaque instruction (sauf en cas de saut) ;
- de k registres non bornés R_0, \dots, R_{k-1} , chacun contenant un entier positif ou nul ;
- d'une mémoire constituée d'une infinité de cases adressées à partir de 0, chacune pouvant contenir un entier.

L'entrée du calcul est placée dans le registre R_0 et la sortie est ce qui s'y trouve à la fin du calcul.

Les instructions du modèle sont regroupées de la manière suivante :

1. Pour déplacer des valeurs

- CONST n charge l'entier n dans R_0 ;
- LOAD n charge le contenu de la case d'adresse R_n de la mémoire dans R_0 ;
- STORE n charge le contenu de R_0 dans la case d'adresse R_n de la mémoire ;
- MOVE n charge le contenu de R_n dans R_0 ;
- COPY n charge le contenu de R_0 dans R_n ;

2. Opérations arithmétiques

- ADD n ajoute le contenu du registre R_n à R_0 ;
- SUB n soustrait le contenu du registre R_n à R_0 (en laissant 0 si le résultat est négatif).

3. Déplacements

- JUMP n charge l'entier n dans le registre *co* (saute à l'instruction n) ;
- JUMPZ n charge l'entier n dans le registre *co* si R_0 contient 0, rien sinon ;

- HALT fin du programme, la sortie est lue dans R_0 .

Exercice 2. Donner le programme d'une machine RAM qui, sur l'entrée n , calcule la valeur u_n de la suite définie par $u_{n+1} = u_n + u_{n/2}$ avec $u_0 = u_1 = 1$.

Exercice 3. Montrer que toute fonction calculée par une machine RAM est calculable par une MT (sans contrainte sur le nombre de rubans).