TD4 : **Décidabilité**

Exercice 1. Généralités et décisions

(1) Rappeler pourquoi on peut parler de numérotation des MT. On note pour la suite $(M_i)_i$ une énumération des MT.

(2) Existe-t-il une MT qui prend en entrée un couple d'entiers (n, m) et qui calcule l'image de m par la n-ième MT ?

(3) Le problème suivant est-il décidable ?

> **Entrée :** Un entier $i \in \mathbb{N}$.
> **Question :** Y a-t-il un entier j entre 0 et i tel que la MT numéro i s'arrête sur j en moins de i étapes ?

(4) Le problème suivant est-il décidable ?

> **Entrée :** Une MT M et un entier $n \in \mathbb{N}$.
> **Question :** La machine M calcule-t-elle à l'infini sans atteindre d'état d'arrêt sur l'entrée n ?

(5) Le problème suivant est-il décidable ?

> **Entrée :** Une MT M, un mot $u \in \Sigma^*$ et un état $q \in Q$.
> **Question :** Lors de son calcul sur l'entrée u, la machine M passe-t-elle par l'état q ?

Exercice 2. On se donne la fonction

$$f : \begin{cases} 2k & \mapsto & k \\ 2k+1 & \mapsto & 4k+1 \end{cases}$$

La MT M prend en entrée un entier n et calcule les images successives $f(n)$, $f^2(n)$, $f^3(n)$... M s'arrête lorsque qu'elle trouve k tel que $f^k(n) = f^{k+1}(n)$, elle retourne alors k.

On note U la MT universelle vue en cours. Pour chacun des problèmes suivants, dire s'il est décidable.

> **Entrée :** Un entier $n \in \mathbb{N}$.
> **Question :** M s'arrête-t-elle sur n ?

> **Entrée :** Une MT M.
> **Question :** U s'arrête-t-elle sur l'entrée $< M, 54000 >$?

> **Entrée :** Un entier $n \in \mathbb{N}$.
> **Question :** La MT U s'arrête-t-elle sur l'entrée $< M, n >$?

> **Entrée :** Un couple d'entiers $(i, n) \in \mathbb{N}^2$.
> **Question :** La MT U s'arrête-t-elle sur l'entrée $< M_i, n >$?

Exercice 3. Retour sur les machines RAM et codage
Les registres et les cases de la mémoire des machines RAM (cf TD3) contiennent chacun un entier.

(1) Montrer qu'il existe un codage acceptable permettant de représenter un couple d'entier dans un registre.

(2) Montrer qu'il existe un codage acceptable permettant de représenter un mot fini sur l'alphabet $\{a, b\}$ dans un registre.