

TD4 : Décidabilité

Exercice 1. Généralités et décisions

- (1) Rappeler pourquoi on peut parler de numérotation des MT. On note pour la suite $(M_i)_i$ une énumération des MT.
- (2) Existe-t-il une MT qui prend en entrée le codage d'un couple d'entiers $\langle\langle n, m \rangle\rangle$ et qui calcule l'image de $\langle m \rangle$ par la n -ième MT ?
- (3) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Un entier $i \in \mathbb{N}$.

Question : Existe-t-il un entier j compris entre 0 et i et tel que la MT numéro i s'arrête sur j en moins de i étapes ?

- (4) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M et un mot $u \in \Sigma^*$.

Question : Lors de son calcul sur l'entrée u , la tête de la machine M sort-elle de l'ensemble de cases $0, 1, \dots, |u| - 1$?

- (5) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M et un mot $u \in \Sigma^*$.

Question : Lors de son calcul sur l'entrée u , la tête de la machine M fait-elle un déplacement vers la gauche ?

- (6) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Un entier $i \in \mathbb{N}$.

Question : La machine M_i accepte-t-elle l'entrée $\langle i \rangle$?

Exercice 2. Réductions

- (1) Rappeler la définition de réduction vue en cours et celle du langage K associé au problème de l'arrêt.
- (2) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M et un entier $n \in \mathbb{N}$.

Question : La machine M calcule-t-elle à l'infini sans atteindre d'état d'arrêt sur l'entrée $\langle n \rangle$?

- (3) Montrer que
$$\begin{cases} A = \emptyset \Leftrightarrow \forall B \neq \Sigma^*, A \leq_m B \\ A = \Sigma^* \Leftrightarrow \forall B \neq \emptyset, A \leq_m B \end{cases}$$

- (4) On note $L = \{i \in \mathbb{N} : \langle 54 \rangle \in L(M_i)\}$. Montrer que le langage du problème de l'arrêt se réduit à L .

- (5) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M , un mot $u \in \Sigma^*$ et un état $q \in Q$.

Question : Lors de son calcul sur l'entrée u , la machine M passe-t-elle par l'état q ?

- (6) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : La MT M accepte-t-elle tous les palindromes ?