POLYTECH
ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

UE -OSSDE : Ouvrages sous sollicitations dynamiques et environnementales

Module 2 : Parasismique et dynamique des structure

Génie Parasismique

2021 - 2022

Constructions Durables (COD)
Prof. D. Hoxha

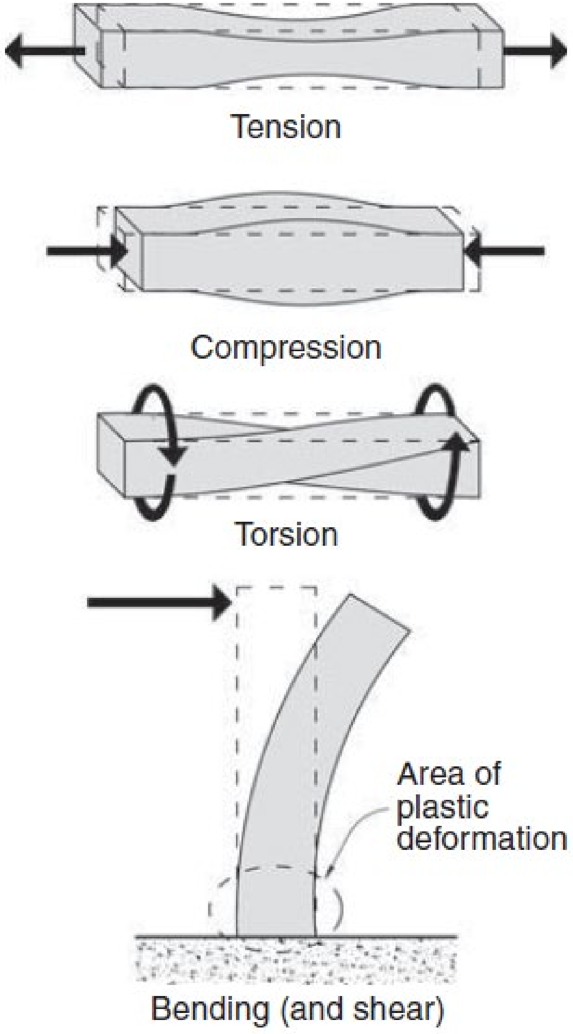
POLYTECH
ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- **Introduction**
- **Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique**
- **Eléments de base de dynamique de structures**
- **Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)**
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique

PARASISMIQUE

- ***Séismes, origines, caractéristiques***



Premières questions à répondre :

- Comment dimensionner des éléments structuraux ?
  - Mêmes principes que ceux appris au cours des différentes UE (EC2, EC3, etc). Mais les charges différentes

1- Comment calculer les charges sismiques ?
2 – Comment combiner les charges sismiques avec les autres charges ?
3 –Quelles particularité de l’approche de dimensionnement?
4 – Quels dispositifs constructifs ?

Eurocodes 8

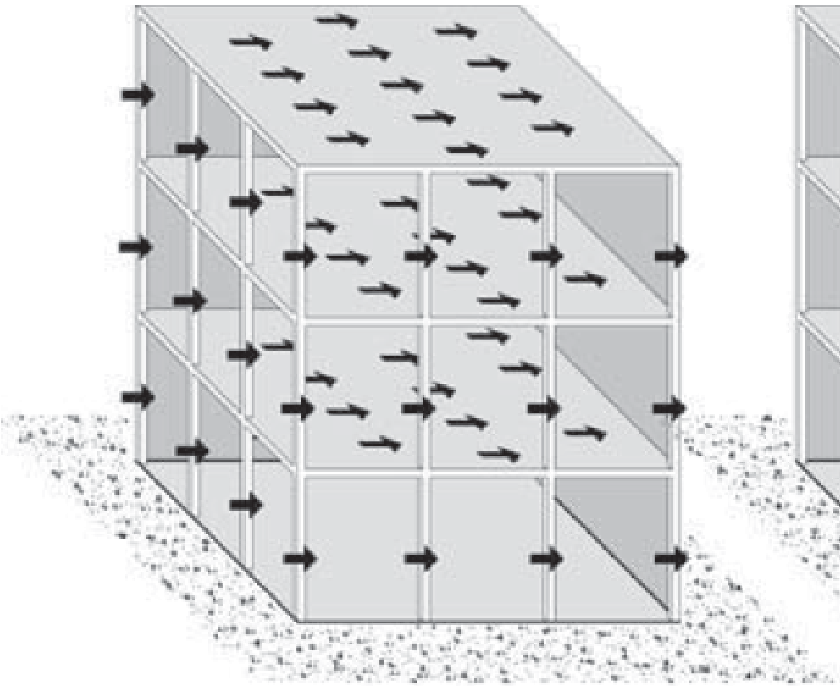
Rappels

POLYTECH
ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

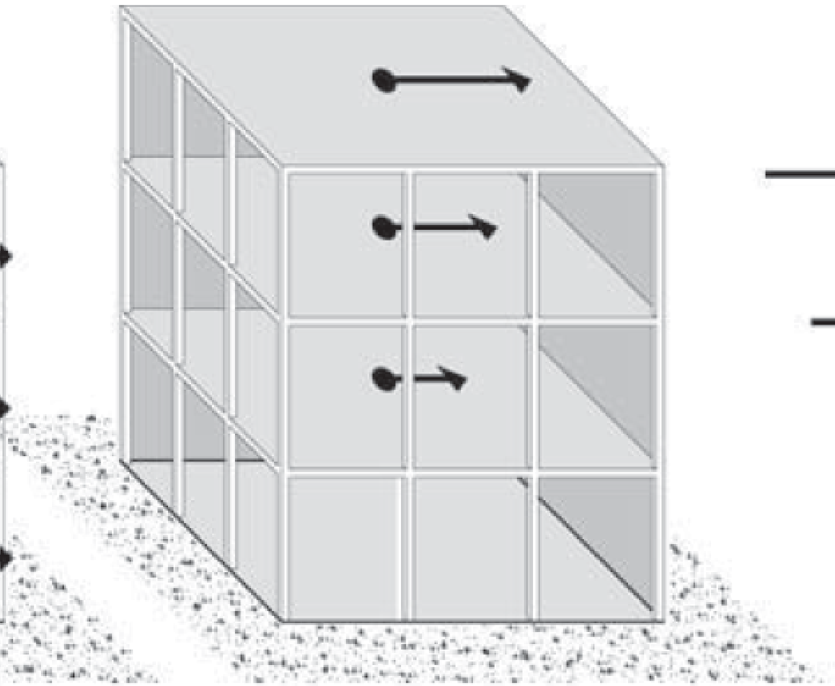
PARASISMIQUE

- ***Séismes, origines, caractéristiques***

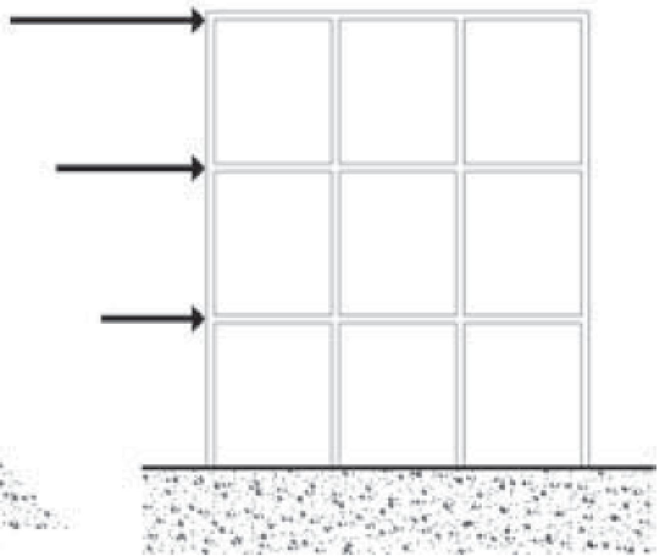
Conventions/simplifications



Forces d'inertie du au séisme



Simplification : les forces sont appliquées aux centres des masses

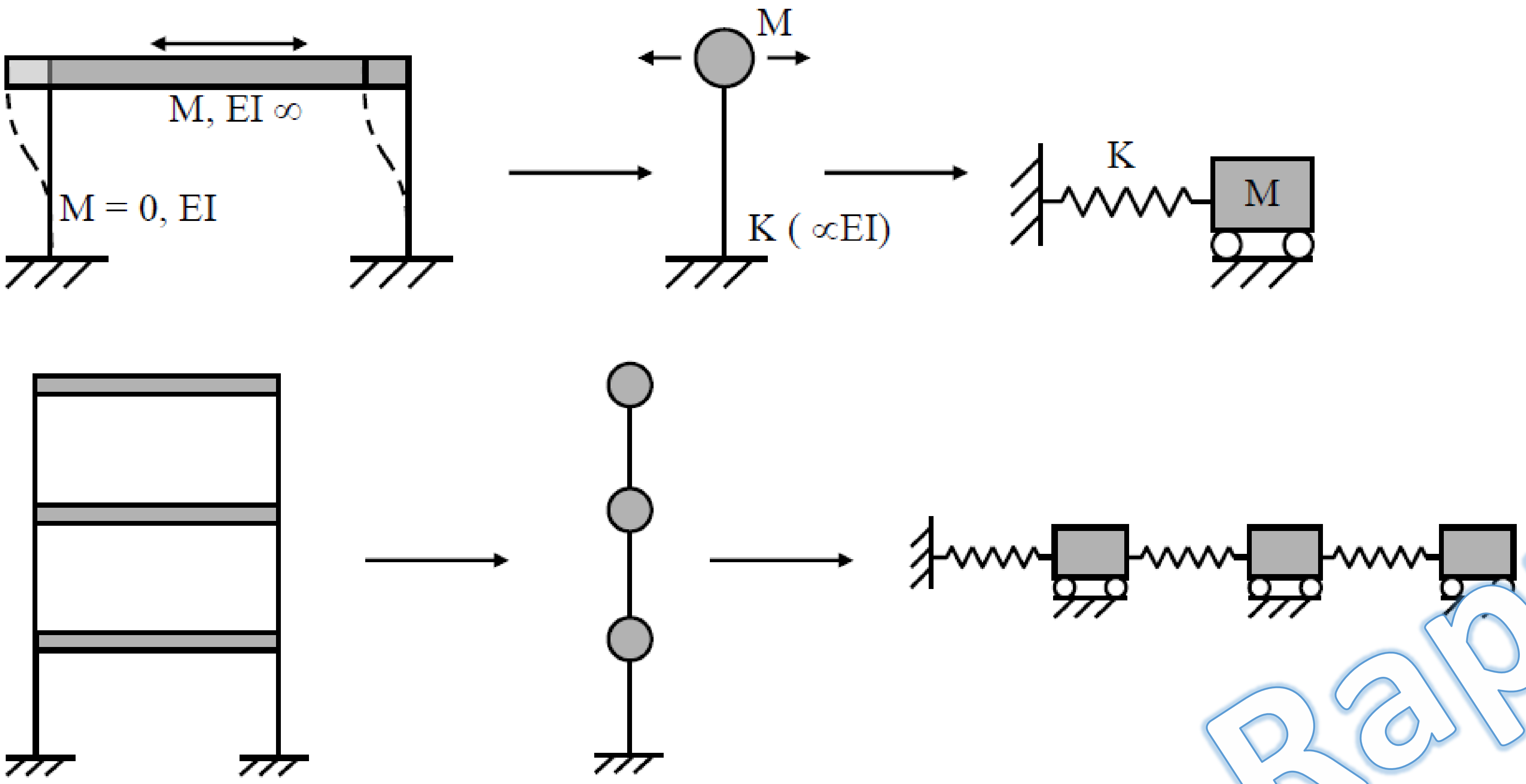


On considérera que les forces sont appliquées à l'extérieure

PARASISMIQUE

- ***Séismes, origines, caractéristiques***

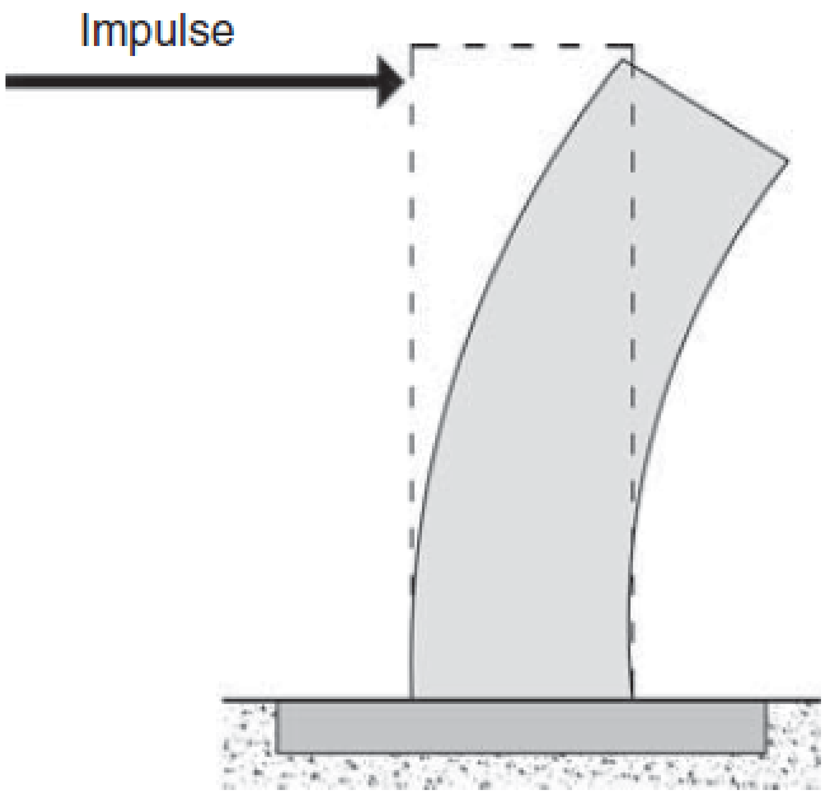
Conventions/simplifications



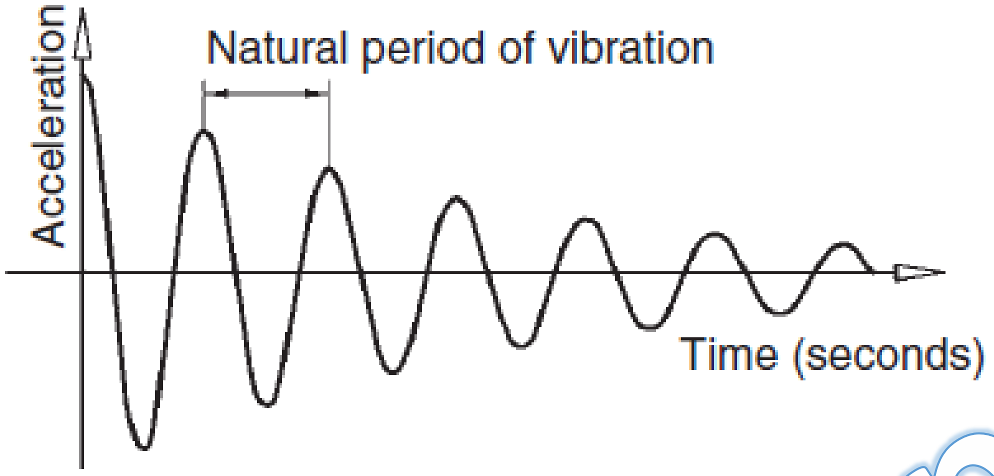
Rappels

PARASISMIQUE

- ***Séismes, origines, caractéristiques***



(a) First mode of vibration



(b) A record of the building accelerati… after the impulse

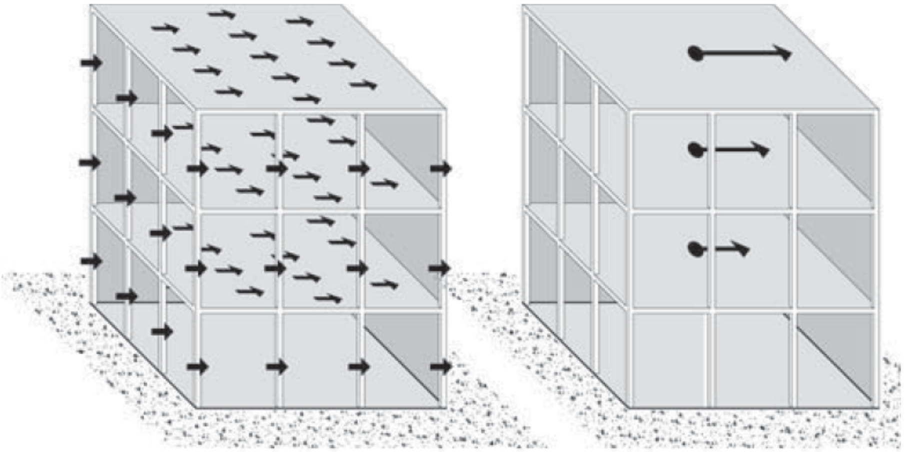
Rappels

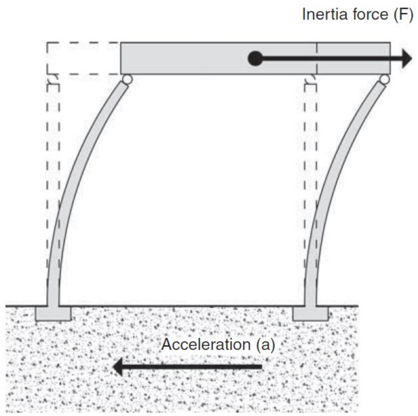
POLYTECH ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

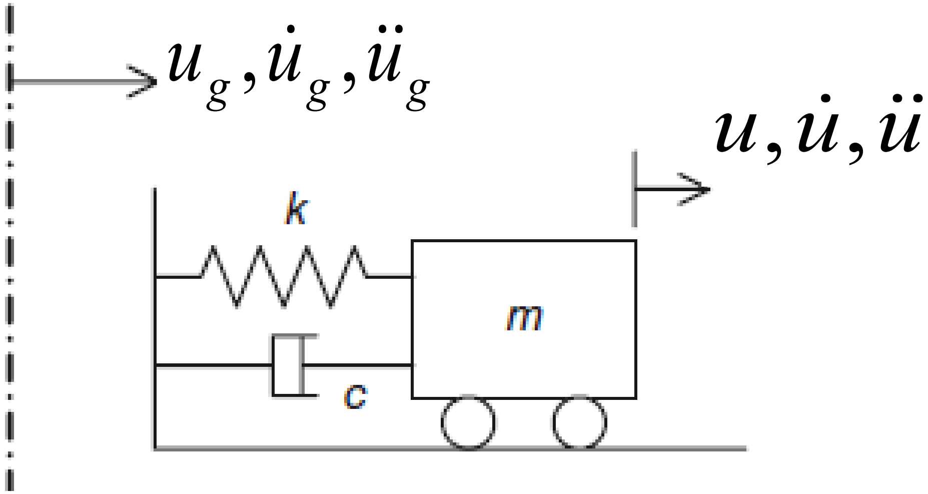
PARASISMIQUE

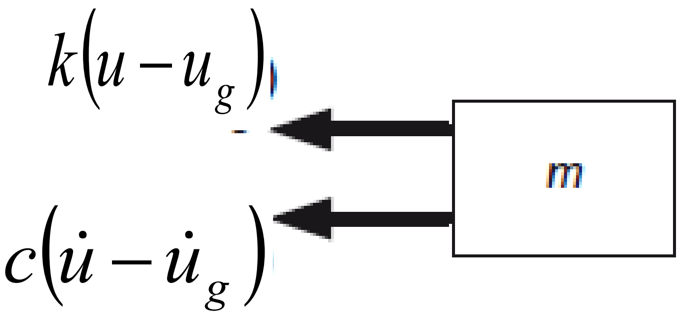
- ***Bases de la dynamique des structures***

Séisme simplifié : systèmes 1DDL



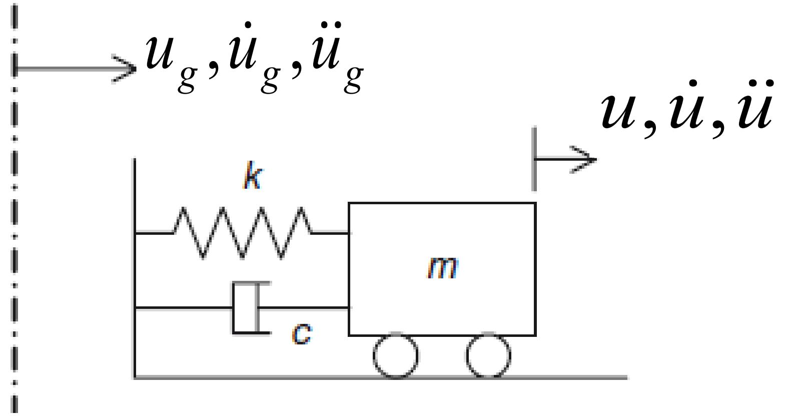


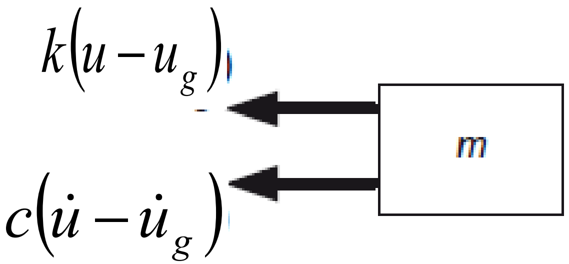




- ***Bases de la dynamique des structures***

Séisme simplifié : systèmes 1DDL





$$-k(u-u_g)-c(\dot{u}-\dot{u}_g)=m\ddot{u}$$

$$v=u-u_g \qquad -kv-c.\dot{v}=m.\ddot{v}+m\ddot{u}_g \qquad m.\ddot{v}+c.\dot{v}+kv=-m\ddot{u}_g$$

Notons $\omega^2=k/m \qquad \xi=c/2m\omega$

$$\boxed{\ddot{v}+2\xi\omega.\dot{v}+\omega^2 v=-\frac{m\omega^2}{k}\ddot{u}_g=\frac{\omega^2}{k}\left(-m\ddot{u}_g\right)}$$

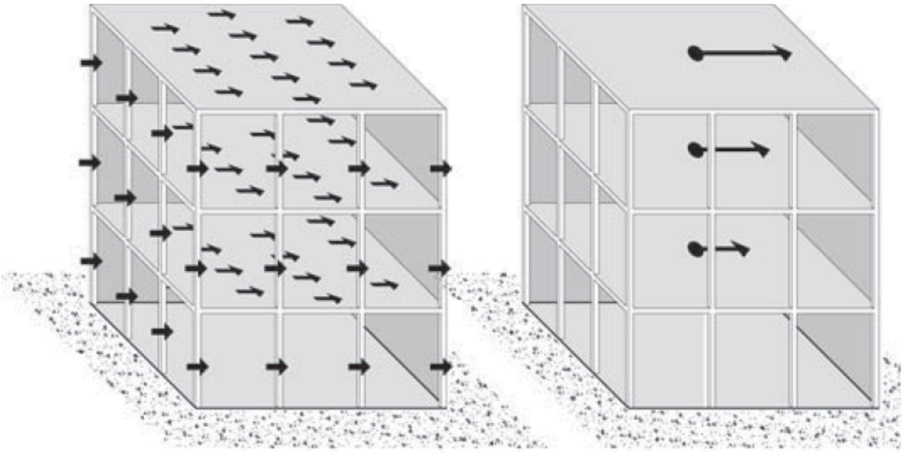
Force d'inertie

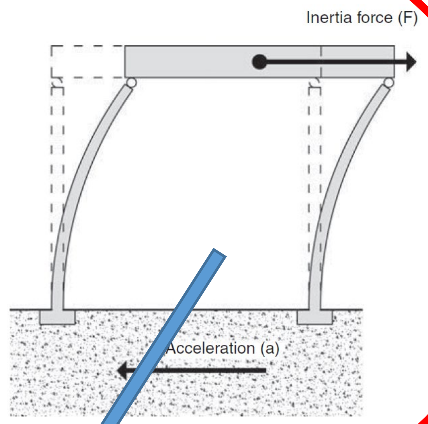
Rappels

POLYTECH
ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

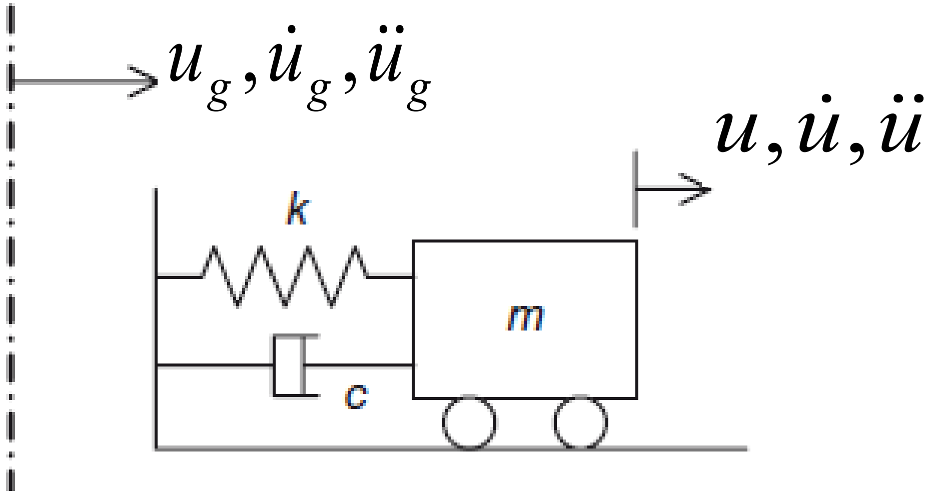
PARASISMIQUE

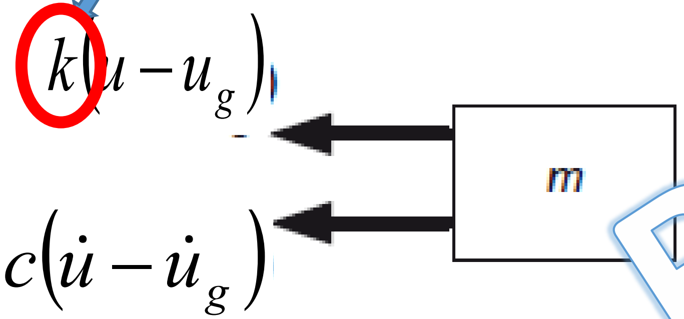
- *Bases de la dynamique des structures*





Comment calculer la rigidité d'une structure ?





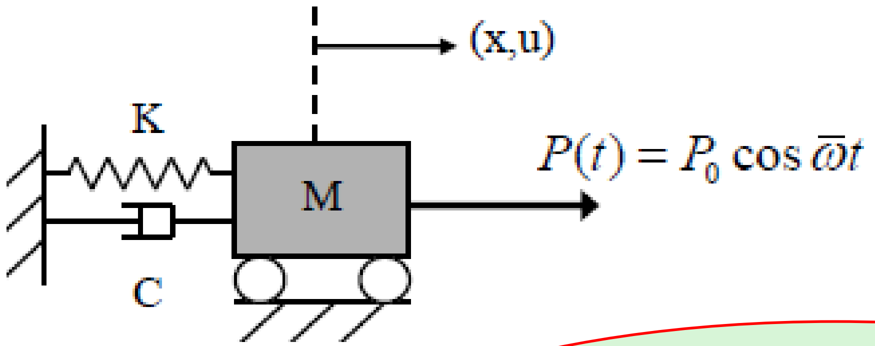
Rappels

Retour au problème de séisme d'un système à 1 DDL

Résolution de l'équation de mouvement

$$\boxed{M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = P(t)}$$

Cas Particulière où la force P(t) est harmonique



Équation du mouvement :

$$M\,\ddot{u} + C\,\dot{u} + K\,u = P_0 \cos \varpi t$$

A

La solution = la solution de l'équation homogène + une solution particulière

$$u_g(t) = \left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)e^{-\xi\omega t}$$

B

POLYTECH ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- ***Bases de la dynamique des structures***

Séisme simplifié : systèmes 1DDL HARMONIQUES

$$M\ddot{u} + C\dot{u} + Ku = P_0 \cos \varpi t$$

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)e^{-\xi\omega t} \\ &+ U\cos(\varpi t - \phi) \end{aligned}}$$

Component transitoire des déplacements

Component permanent des déplacements

$$\boxed{\begin{aligned} u(t) &= \left(A\cos\omega_D t + B\sin\omega_D t\right)e^{-\xi\omega t} \\ &+ U\cos\varpi t\cos\phi - U\sin\varpi t\sin\phi \end{aligned}}$$

$$U = \frac{P_0}{K}\left[\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^2 + \left(2\xi\beta\right)^2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\omega_D = \omega\sqrt{1-\xi^2}$$

$$\xi = \frac{C}{2\omega M}$$

$$\beta = \frac{\varpi}{\omega}$$

$$\tan\phi = \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

Rappels

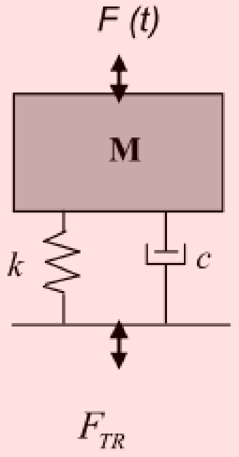
Oscillateur simple, forcé, amorti- Sollicitations harmoniques

(Forced Damped system : harmonic sollicitation

Amplification dynamique (en déplacement)

$$D \; ou \; R_d = \frac{u_{dyn}^{mas}}{u_{stat}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

Amplification dynamique (en force)



$$F_{TR}(t) = c\dot{x}(t) + kx(t)$$

$$F(t) = m\ddot{x}(t) + F_{TR}(t)$$

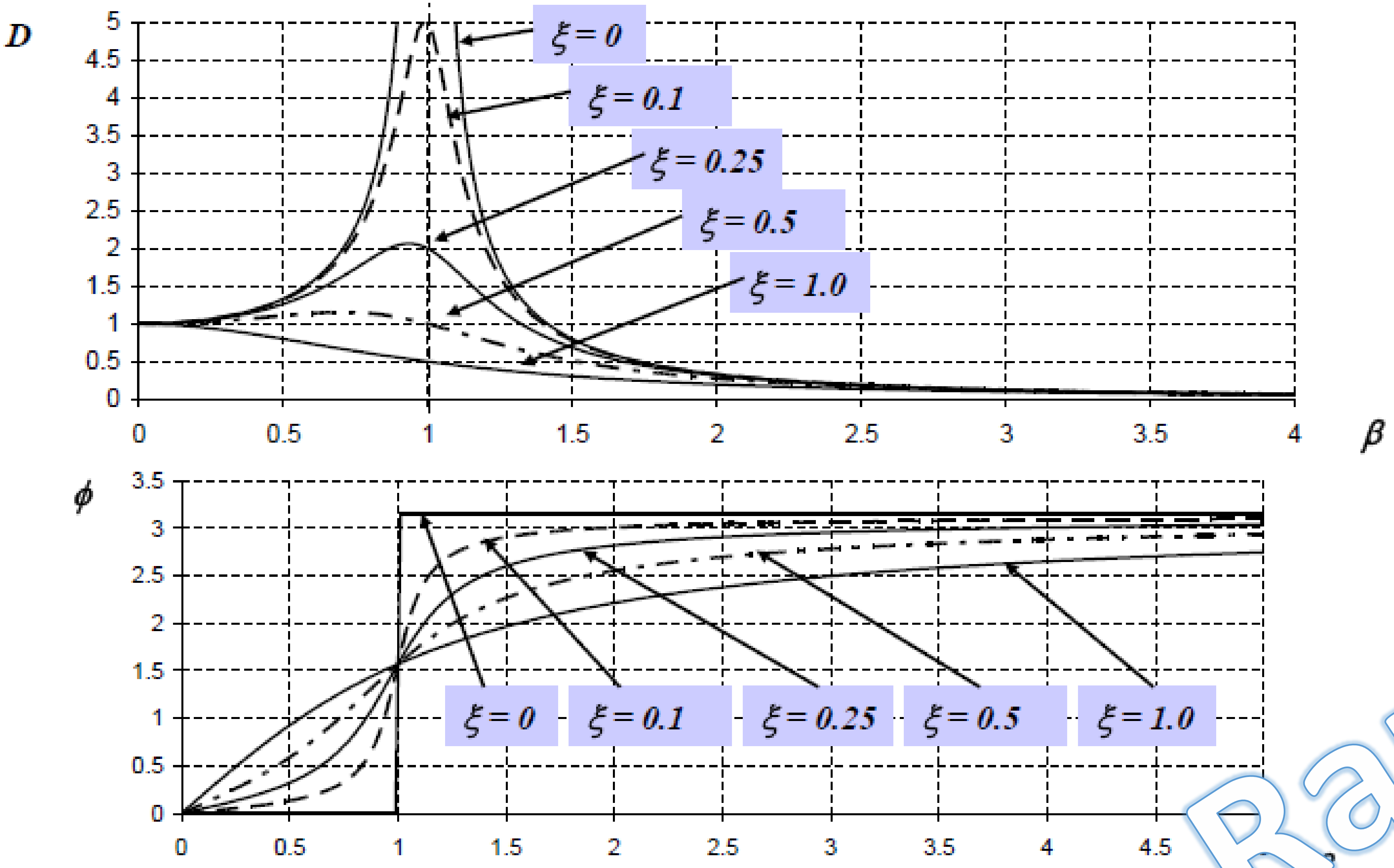
$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{c^2\dot{x}_{\max}^2 + k^2x_{\max}^2}$$

$$\dot{x}_{\max} = \omega x_{\max}$$

$$|F_{TR-\max}| = \sqrt{x_{\max}^2(k^2 + \omega^2c^2)} = x_{\max}\sqrt{k^2 + \omega^2c^2}$$

$$R_f = \frac{F_{dyn}}{F_{st}} = \frac{x_{\max}\sqrt{k^2+\omega^2c^2}}{k.x_{st}} = \frac{x_{\max}}{x_{st}}\frac{\sqrt{k^2+\omega^2\frac{k^2}{\omega_n^2}}}{k} = \frac{\sqrt{1+\omega^2c^2}}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}} = \frac{\sqrt{1+\left(2\xi\beta\right)^2}}{\sqrt{\left(1-\beta^2\right)^2+\left(2\xi\beta\right)^2}}$$

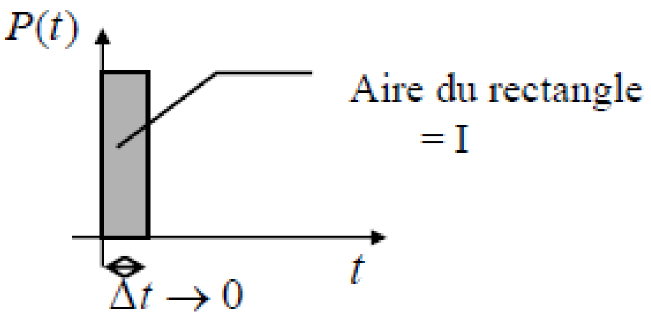
Solution du problème SDOF : force harmonique



Rappels

Solution fondamentale

Cas particulier: impulsion de Dirac



Fonction de Dirac : $\begin{cases} \delta(t) = 0 \quad si \quad t \neq 0 \\ \delta(t) \, non \; définie \; en \; t = 0 \end{cases}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \left(\Rightarrow [\delta] = [T^{-1}] \right)$$

Excitation impulsionnelle : $P(t) = I\,\delta(t) \quad [I] = [FT]$

Newton : $M \dfrac{d}{dt} \dot{u} = P(t) - F_K(t) - F_C(t)$

$$\int_0^{\Delta t} \ldots dt \quad \Rightarrow \quad M\dot{u}\Big]_0^{\Delta t} = \int_0^{\Delta t} I\,\delta(t)\,dt - \int_0^{\Delta t} \left[F_K(t) + F_C(t) \right] dt$$

$$\Delta t \to 0 \quad \Rightarrow \quad M\dot{u}(0^+) = I - 0$$

L'oscillateur se comporte comme un oscillateur libre auquel on donne une vitesse initiale $\dot{u}_0 = I/M$

$$\rightarrow \quad si \; u_0 = 0, \; u(t) = \frac{I}{M\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t)$$

En particulier, si $I = 1$

$$\boxed{u(t) = \frac{1}{M\omega_D} e^{-\xi\omega t} \sin(\omega_D t) = h(t)}$$

h(t) **= fonction de réponse impulsionnelle unitaire**

Rappels

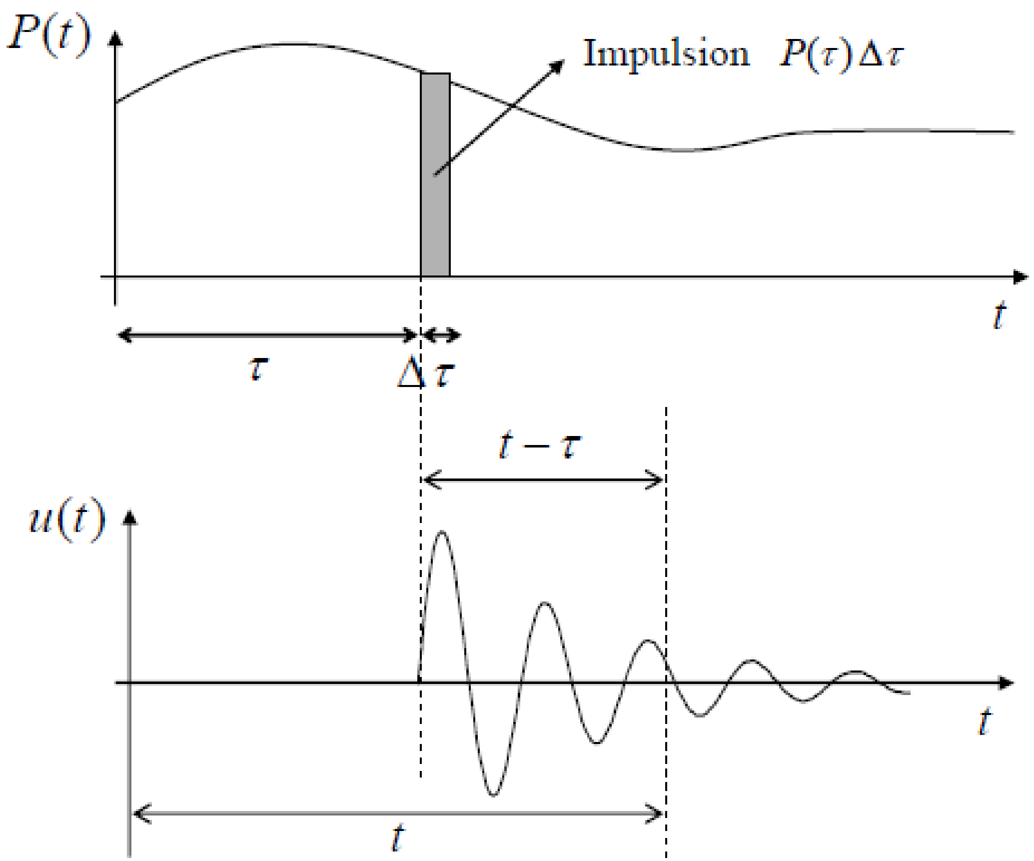
POLYTECH ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

PARASISMIQUE

- ***Bases de la dynamique des structures***

Séisme simplifié : systèmes 1DDL

ARBITRAIRE



<u>Principe</u>: considérer la charge *P(t)* comme une succession d'impulsions de durée $\Delta\tau$

Déplacement en *t* sous l'effet d'une impulsion en τ :

$$\Delta u(t,\tau) = P(\tau)\,\Delta\tau\, h(t-\tau)$$

$$\downarrow$$

Déplacement total en *t* = somme des contributions impulsionnelles appliquées entre 0 et *t* :

$$u(t) = \sum_i \Delta u(t,\tau_i)$$
$$= \sum_i P(\tau_i)\,\Delta\tau_i\, h(t-\tau_i)$$

Rappels

La réponse impulsionnelle n'est rigoureuse que si $\Delta\tau \to 0$

$$\Rightarrow \quad u(t) = \int_0^t P(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \qquad = \textit{convolution de P par h}$$

$$= \frac{1}{M\,\omega_D} \underbrace{\int_0^t P(\tau)\, e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin\left[\omega_D (t-\tau)\right] d\tau}_{\textit{Intégrale de Duhamel}}$$

- Pour certaines formes simples de *P(t)*, valeurs tabulées dans des ouvrages spécialisés
- Sinon, intégration numérique (avec algorithmes adaptés)

Rappels

POLYTECH ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

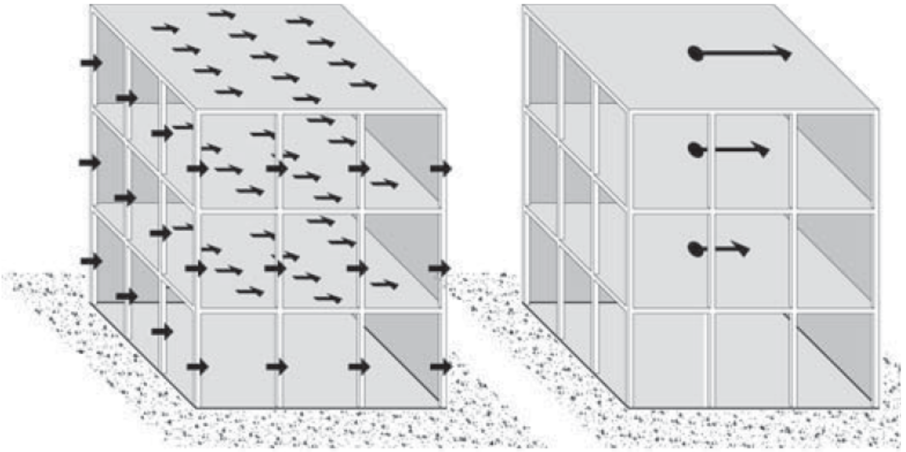
PARASISMIQUE

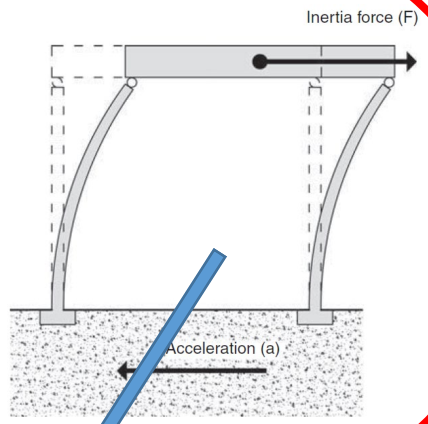
- Introduction
- Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique
- Eléments de base de dynamique de structures
  - Oscillateur à 1 D.D.L (SDOF)
  - **Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)**
- Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique

POLYTECH®
ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

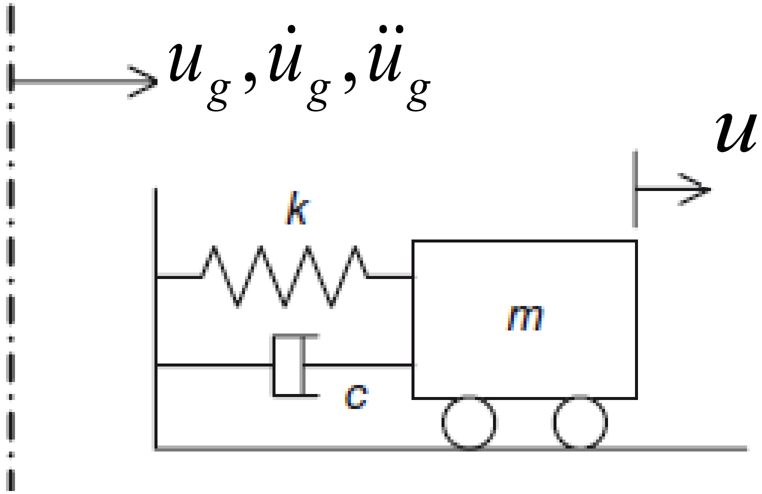
PARASISMIQUE

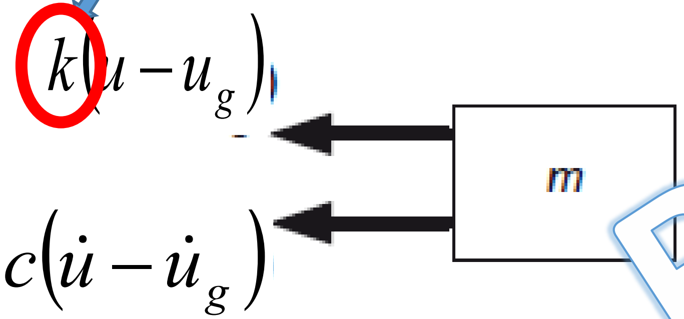
- *Bases de la dynamique des structures*





Comment calculer la rigidité d'une structure ?

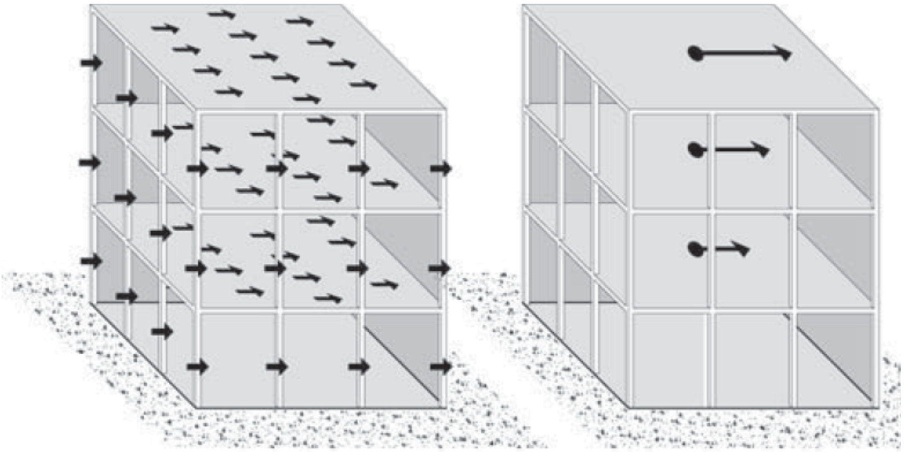


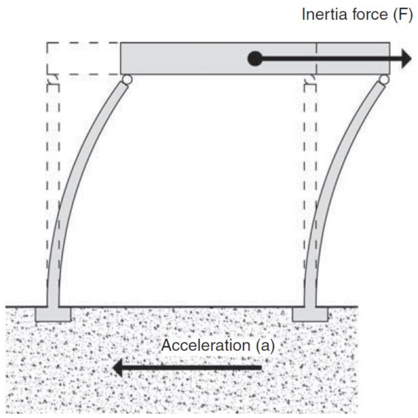


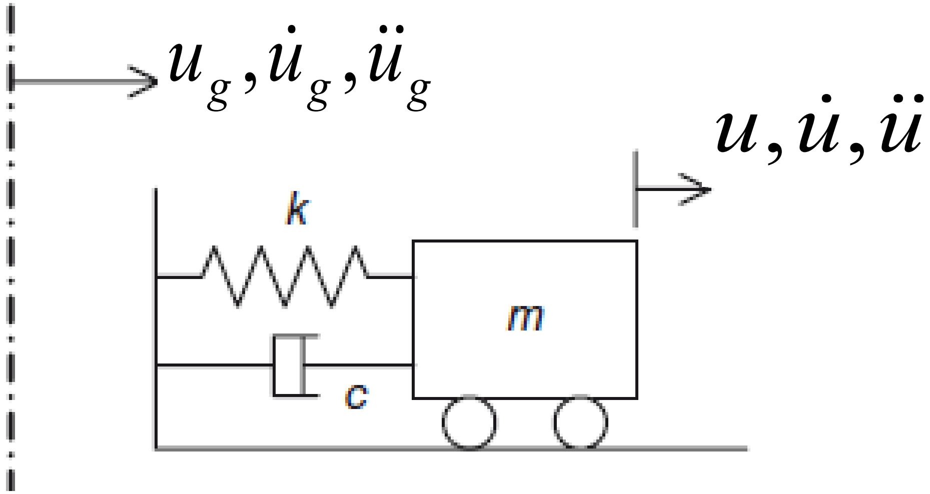
Rappels

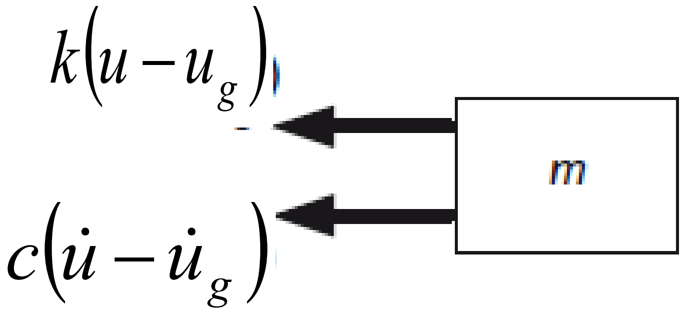
PARASISMIQUE

- *Oscillateur à 1 D.D.L (SDOF)*

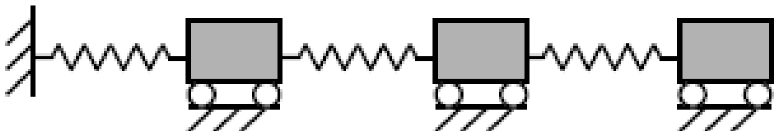






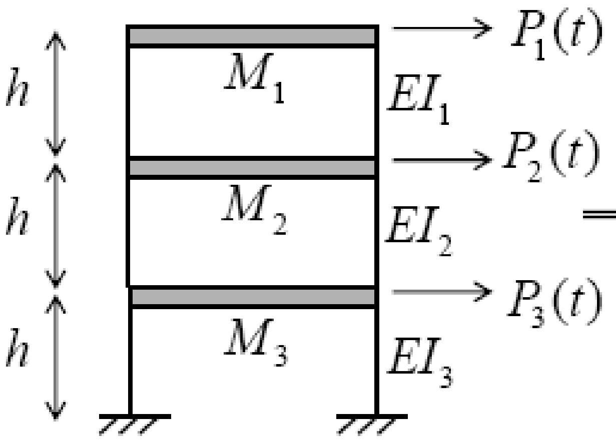


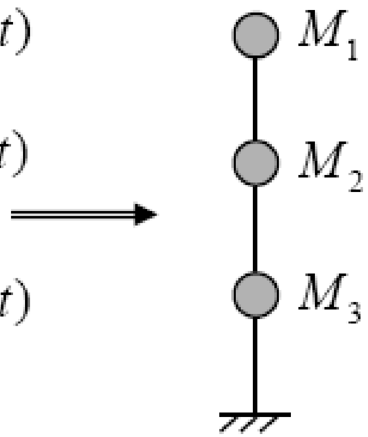
1. Des vrais systèmes à plusieurs D.D.L



A 3 D.O.Fs system

2. De systèmes que par simplification peuvent être considérés comme M.D.D.L

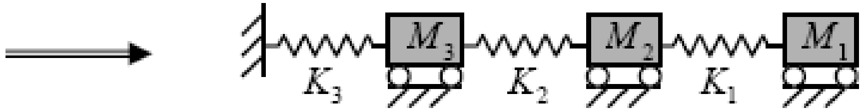




$$K_1 = 2 \times \frac{12EI_1}{h^3}$$

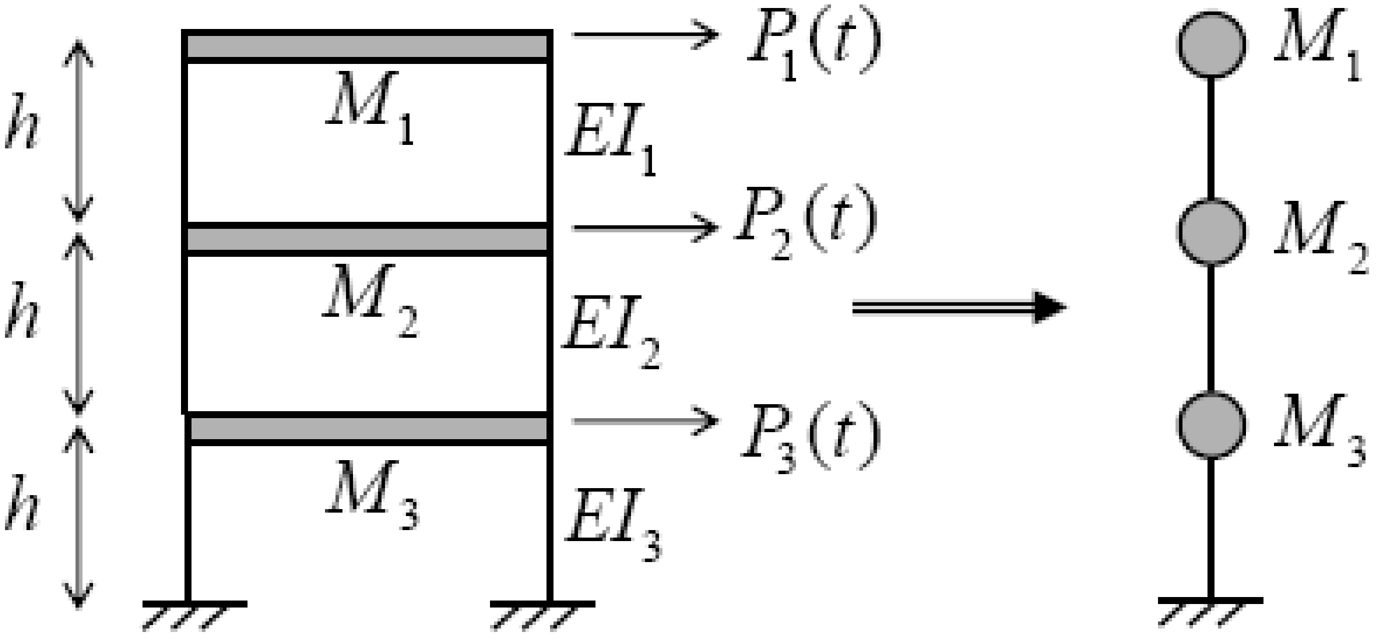
$$K_2 = 2 \times \frac{12EI_2}{h^3}$$

$$K_3 = 2 \times \frac{12EI_3}{h^3}$$



Exemple

Soit un bâtiment à trois niveaux dont on prend la modélisation sous la forme d'un oscillateur avec 3 D.D.L comme sur la figure. Trois forces P1, P2,P3 sont appliquées. Trouver les déplacements horizontaux en function du temps des étages de ce bâtiment



$$K_1 = 2 \times \frac{12EI_1}{h^3}$$

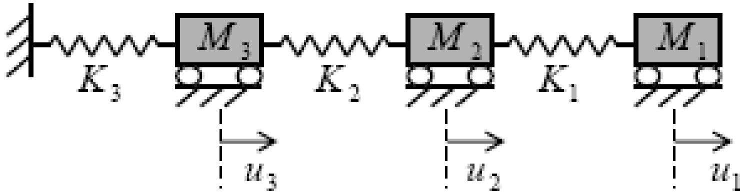
$$K_2 = 2 \times \frac{12EI_2}{h^3}$$

$$K_3 = 2 \times \frac{12EI_3}{h^3}$$

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Exemple (cont)

Équilibre des trois masses



$$\begin{cases} M_3\ddot{u}_3 = -K_3u_3 + K_2(u_2 - u_3) + P_3 \\ M_2\ddot{u}_2 = K_2(u_3 - u_2) + K_1(u_1 - u_2) + P_2 \\ M_1\ddot{u}_1 = K_1(u_2 - u_1) + P_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M_1\ddot{u}_1 + K_1u_1 - K_1u_2 = P_1 \\ M_2\ddot{u}_2 + (K_1 + K_2)u_2 - K_2u_3 - K_1u_1 = P_2 \\ M_3\ddot{u}_3 + (K_2 + K_3)u_3 - K_2u_2 = P_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} M_1 & 0 & 0 \\ 0 & M_2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u}_1 \\ \ddot{u}_2 \\ \ddot{u}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 & -K_1 & 0 \\ -K_1 & (K_1 + K_2) & -K_2 \\ 0 & -K_2 & (K_2 + K_3) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow [M]\{\ddot{u}\}(+[C]\{\dot{u}\}) + [K]\{u\} = \{P\}$$

$\longrightarrow$ **Forme matricielle de l'équation du mouvement (Système de N équations différentielles du second ordre à N inconnues)**

1. Système libre, non amortie

Système d'équations différentielles à résoudre : $[M]\{\ddot{q}\}+[K]\{q\}=\{0\}$

Hypothèse: tous les DDL vibrent en phase de manière harmonique

$$\rightarrow \quad \{q(t)\}=\{u\}\varphi(t)=\{u\}\sin\omega t$$

$$[M]\{u\}\ddot{\varphi}(t)+[K]\{u\}\varphi(t)=\{0\} \quad \Rightarrow \boxed{\left([K]-\omega^2[M]\right)\{u\}=\{0\}}$$

Analyse modale

Problème généralisé aux valeurs propres

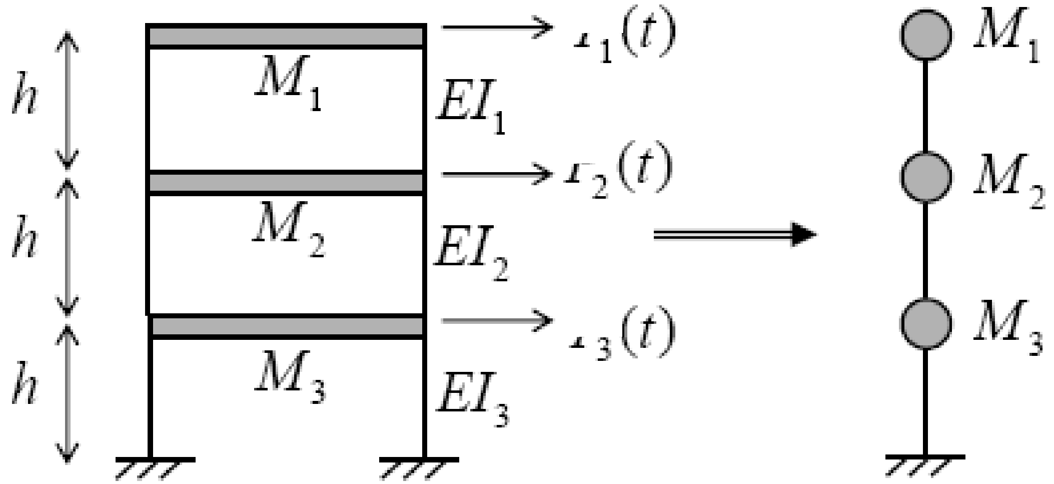
→ Trouver les valeurs particulières de ω pour que le système possède une solution non trivialement nulle

PARASISMIQUE

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Système libre, non amortie

$P_i = 0$ pour $t > 0$ et $C_i = 0$



$$K_1 = 2 \times \frac{12 EI_1}{h^3}$$

$$K_2 = 2 \times \frac{12 EI_2}{h^3}$$

$$K_3 = 2 \times \frac{12 EI_3}{h^3}$$

$$[M]\{\ddot{u}\}\left(+[C]\{\dot{u}\}\right)+[K]\{u\}=\{P\}$$

$$[M]\{\ddot{u}\}\left(+\cancel{[C]}\{\dot{u}\}\right)+[K]\{u\}=\{\,0\,\}$$

Pour une vibration harmonique

$$\{u(t)\} = \{u\}\,\varphi(t) = \{u\}\sin \omega t$$

PARASISMIQUE

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Système libre, non amortie $P_i=0$ *pour* $t>0$ *et* $C_i = 0$

$$[M]\{\ddot{u}\}\left(+[C]\{\dot{u}\}\right)+[K]\{u\}=\{P\} \qquad [M]\{\ddot{u}\}\left(+\cancel{[C]}\{\dot{u}\}\right)+[K]\{u\}=\{\mathbf{0}\}$$

Sous l'hypothèse d'une de vibration harmonique $\{u(t)\}=\{u\}\varphi(t)=\{u\}\sin\omega t$

$$[M]\{u\}\ddot{\varphi}(t)+[K]\{u\}\varphi(t)=\{0\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\left([K]-\omega^2[M]\right)\{u\}=\{0\}}$$

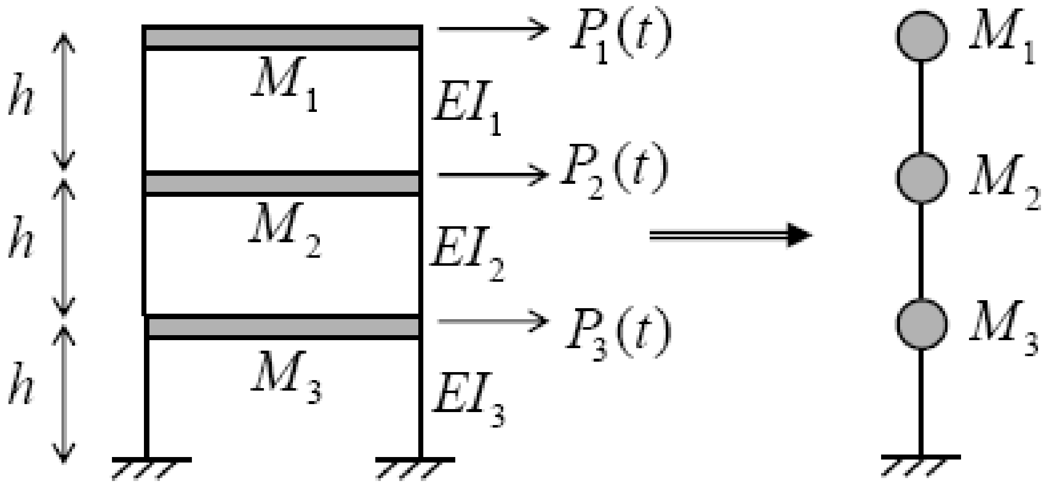
Problème généralisé aux valeurs propres

→ Trouver les valeurs particulières de ω pour que le système possède une solution non trivialement nulle

Analyse modale

Retour à l'exemple

Soit un bâtimet à trois niveaux dont on prend la modélisation sous la forme d'un oscillateur avec 3 D.D.L comme sur la figure. Trois forces P1, P2,P3 sont appliquées. Trouver les déplacements horizontaux en function du temps des étages de ce bâtiment ---→ Réaliser l'analyse modale



$$K_1 = 2 \times \frac{12EI_1}{h^3}$$

$$K_2 = 2 \times \frac{12EI_2}{h^3}$$

$$K_3 = 2 \times \frac{12EI_3}{h^3}$$

$$\begin{cases} M_1 = 1000\,kg \\ M_2 = 1500\,kg \\ M_3 = 2000\,kg \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} K_1 = 1,5.10^6\ N/m \\ K_2 = 3,0.10^6\ N/m \\ K_3 = 4,5.10^6\ N/m \end{cases}$$

Analyse modale

Exemple (cont)

$$[K]=10^6\begin{bmatrix}1,5 & -1,5 & 0\\ -1,5 & 4,5 & -3\\ 0 & -3 & 7,5\end{bmatrix}\quad [M]=10^3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1,5 & 0\\ 0 & 0 & 2,0\end{bmatrix}$$

$$[K]-\omega^2[M]=10^6\begin{bmatrix}1,5-A & -1,5 & 0\\ -1,5 & 4,5-1,5A & -3\\ 0 & -3 & 7,5-2A\end{bmatrix}\quad avec\ A=\frac{\omega^2}{1000}$$

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0\quad\Rightarrow\quad 3A^3-24,75A^2+50,625A-20,25=0$$

$$\rightarrow A=\begin{Bmatrix}0,527\\ 2,410\\ 5,313\end{Bmatrix}\quad\rightarrow\omega=\begin{Bmatrix}22,961\\ 49,091\\ 72,890\end{Bmatrix}\quad\rightarrow f=\begin{Bmatrix}3,654\\ 7,813\\ 11,601\end{Bmatrix}Hz\quad\rightarrow T=\begin{Bmatrix}0,274\\ 0,128\\ 0,086\end{Bmatrix}s$$

Analyse modale

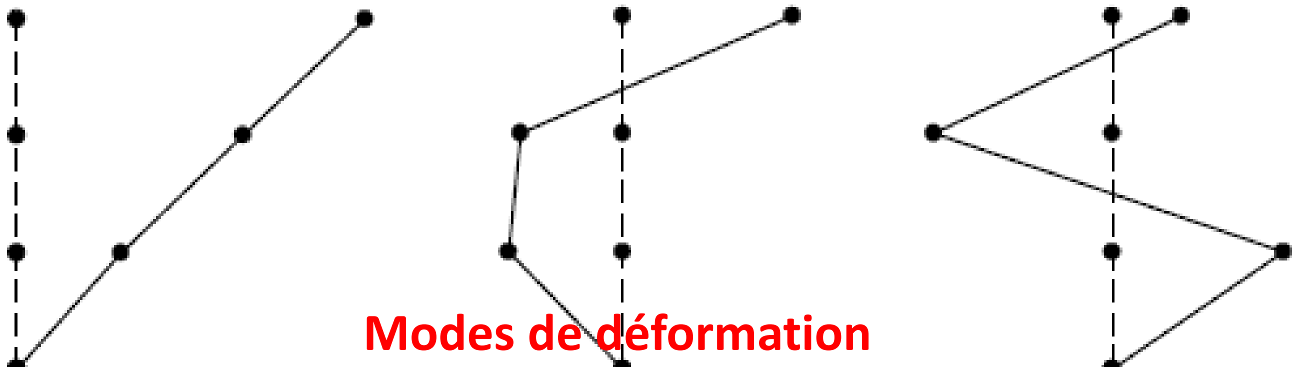
Exemple (cont)

$$\left|[K]-\omega^2[M]\right|=0 \quad \Rightarrow \quad 3A^3-24,75A^2+50,625A-20,25=0$$

Fréquence fondamentale

$$\rightarrow A=\begin{Bmatrix}0,527\\2,410\\5,313\end{Bmatrix} \quad \rightarrow \omega=\begin{Bmatrix}22,961\\49,091\\72,890\end{Bmatrix} \quad \rightarrow f=\begin{Bmatrix}3,654\\7,813\\11,601\end{Bmatrix}Hz \quad \rightarrow T=\begin{Bmatrix}0,274\\0,128\\0,086\end{Bmatrix}s$$

$$\{\tilde{u}_1(x)\}=\begin{Bmatrix}1\\0,65\\0,30\end{Bmatrix} \quad \{\tilde{u}_2(x)\}=\begin{Bmatrix}1\\-0,61\\-0,68\end{Bmatrix} \quad \{\tilde{u}_3(x)\}=\begin{Bmatrix}1\\-2,54\\2,44\end{Bmatrix}$$



Modes de déformation

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Analyse modale

$$\boxed{\left([K]-\omega^2[M]\right)\{u\}=\{0\}}$$

Propriétés des modes propres

$$[K]\{u_i\}=\omega_i^2[M]\{u_i\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \langle u_j\rangle[K]\{u_i\}=\omega_i^2\langle u_j\rangle[M]\{u_i\} & (1) \\ \langle u_i\rangle[K]\{u_j\}=\omega_j^2\langle u_i\rangle[M]\{u_j\} & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \quad \Rightarrow \quad 0=\left(\omega_i^2-\omega_j^2\right)\langle u_i\rangle[M]\{u_j\}$$ vu que $[K]$ et $[M]$ sont symétriques

$$\Rightarrow \quad si\ i\neq j : \langle u_i\rangle[M]\{u_j\}=0 \quad et \quad \langle u_i\rangle[K]\{u_j\}=0$$

Les vecteurs propres sont **orthogonaux** par rapport à $[K]$ et $[M]$ (même si $\omega_i = \omega_j$)

$$et \quad \omega_i^2=\frac{\langle u_i\rangle[K]\{u_i\}}{\langle u_i\rangle[M]\{u_i\}}=\frac{K_i^*}{M_i^*}$$

Masse et raideur généralisées associées au mode i

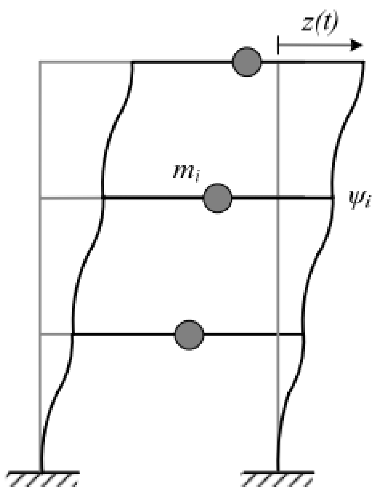
Calcul des modes propres

Si N >>1, algorithmes de résolution du problème généralisé aux valeurs propres $\left([A]-\lambda[B]\right)\{x\}=\{0\}$ (puissance, sécante, rotation)

PARASISMIQUE

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

<u>Analyse modale</u>



$$x(t)=\psi z(t)=\psi z_0 \sin(\omega_n t)\ ;\ \dot{x}(t)=\omega_n \psi z(t)=\omega_n \psi z_0 \cos(\omega_n t)$$

$$E_{pe}=\tfrac{1}{2}\mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\,\mathbf{x}\ ;\ E_c=\tfrac{1}{2}\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}\mathbf{M}\,\dot{\mathbf{x}}$$

Energie élastique potentielle

$$E_{pe}=\sum_{i=1}^{N}\tfrac{1}{2}k_i(x_i-x_{i-1})^2$$

Maximum de l'énergie potentielle

$$E_{pe,\max}=\tfrac{1}{2}z_0^2\sum_{i=1}^{N}k_j(\psi_i-\psi_{i-1})^2$$

Idem Energie cinétique (max)

$$E_{c,\max}=\tfrac{1}{2}\omega_n^2 z_0^2\sum_{i=1}^{N}m_i\psi_i^2$$

$$\omega_n^2=\frac{\sum_{i=1}^{N}k_i(\psi_i-\psi_{i-1})^2}{\sum_{i=1}^{N}m_i\psi_i^2}$$

$$\Re(\mathbf{v})=\frac{\omega_1^2\beta_1^2+\omega_2^2\beta_2^2+\cdots+\omega_N^2\beta_N^2}{\beta_1^2+\beta_2^2+\cdots+\beta_N^2}$$

Rayleigh quotient

Système forcé, non amorti

Réponse dans la base modale

→ Tout vecteur peut s'exprimer comme une combinaison linéaire des modes propres. En particulier:

$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(t)\{u_i\} = [U]\{\eta(t)\}$$

→ Matrices de modes propres

Système non amorti

$$[M]\{\ddot{q}\} + [K]\{q\} = \{P\}$$

$$[U]^T [M][U]\{\ddot{\eta}\} + [U]^T [K][U]\{\eta\} = [U]^T \{P\}$$

$$avec\ \langle u_i \rangle [M]\{u_j\} = \begin{cases} M_i^* & si\ i = j \\ 0 & si\ i \neq j \end{cases} \quad id.\ pour\ [K]$$

$$\Rightarrow \quad [M^*]\{\ddot{\eta}\} + [K^*]\{\eta\} = [U]^T \{P\}$$ $[K^*]$ et $[M^*]$ = matrices diagonales

$$\Rightarrow \quad M_i^*\ \ddot{\eta}_i(t) + K_i^*\ \eta_i(t) = P_i^*(t) \quad avec\ P_i^*(t) = \langle u_i \rangle \{P\} \quad pour\ i = 1, N$$

→ N équations découplées: résolution de N équations du mouvement à 1DDL

Système forcé, amorti

Réponse dans la base modale

$$[M]\{\ddot{q}\}+[C]\{\dot{q}\}+[K]\{q\}=\{P\}$$

$$\Rightarrow \quad \left[M^*\right]\{\ddot{\eta}\}+\left[C^*\right]\{\dot{\eta}\}+\left[K^*\right]\{\eta\}=[U]^T\{P\}$$

$$\left[C^*\right]=[U]^T[C][U]$$

Pas toujours diagonal

[*C*] inconnu (par exemple dans le cas des forces concentrées

Comment prendre en compte l'amortissement ?

- Solving the full problem on the bases of nodal displacements
- Solving the coupled problem on the base of nodal amplitudes
- Neglecting « off-diagonal« terms in an nodal approach

$$M_i^*\ \ddot{\eta}_i(t)+C_i^*\ \dot{\eta}_i(t)+K_i^*\ \eta_i(t)=P_i^*(t)$$

Réponse dans la base modale

Rayleigh damping :

$$[C]=\alpha[M]+\beta[K]$$

α And β: 2 coefficients to be tuned

Damping proportional to the mass: usually "external" (friction…) damping

Damping proportional to the stiffness: usually internal damping

$$\Rightarrow \quad [U]^T[C][U]=\alpha\left[M^*\right]+\beta\left[K^*\right] \quad \Rightarrow \quad \left[M^*\right]\{\ddot{\eta}\}+\left[C^*\right]\{\dot{\eta}\}+\left[K^*\right]\{\eta\}=[U]^T\{P\}$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i+2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{\eta}_i+\omega_i^2\,\eta_i=\frac{1}{M_i^*}P_i^*$$

$$avec\ \xi_i=\frac{C_i^*}{2\,\omega_i M_i^*}=\frac{\alpha}{2\,\omega_i}+\frac{\beta\,\omega_i}{2}$$

POLYTECH ORLÉANS
École d'Ingénieurs de l'Université d'Orléans

M.D.O.F system

Réponse dans la base modale

Noncouplé … alors…..

Utilisons les mêmes approches que pour SDOF!

Solution des problèmes non couplés dans la base modale

Impulsional, frequencial, step by step (harmonic, periodic)

Duhamel $$h_i(t) = \frac{1}{M_i^* \omega_{D,i}} e^{-\xi_i \omega_i t} \sin \omega_{D,i} t \quad avec \quad \omega_{D,i} = \omega_i \sqrt{1-\xi_i^2}$$

$$[K],[M] \rightarrow \{u_i\}, \omega_i \rightarrow M_i^*, K_i^*, C_i^* (\rightarrow \xi_i), P_i^* \rightarrow h_i(t)$$

$$\eta_i(t) = \int_0^t P_i^*(t) h_i(t-\tau) d\tau \quad \Rightarrow \quad \{q(t)\} = \sum_{i=1}^{N} \eta_i(t) \{u_i\}$$

PARASISMIQUE

- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Troncature de la base des modes:

Sous certaines conditions, possibilité de réduire la taille du problème à résoudre

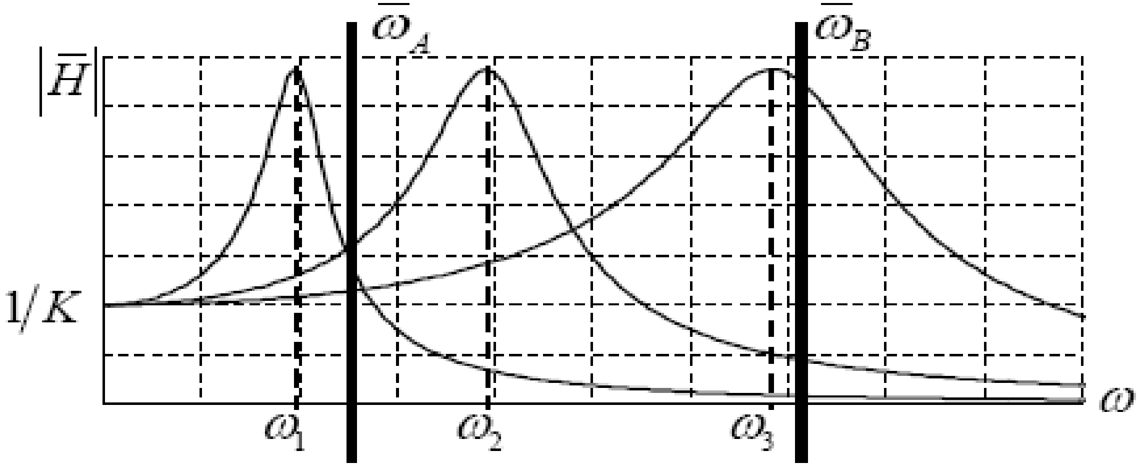
$$\{q(t)\} = \sum_{i=1}^{r} \eta_i(t)\{u_i\} = \left[U^{red}\right]\{\eta(t)\} \quad r < N$$

$$\Rightarrow \quad \ddot{\eta}_i + 2\,\xi_i\,\omega_i\,\dot{\eta}_i + \omega_i^2\,\eta_i = \frac{1}{M_i^*} P_i^* \qquad avec\ i = 1, r$$

En augmentant r, on converge vers la solution exacte

Critères pour justifier la réduction:

Amplification dynamique – hypothèse: $\{P(t)\} = \{R\}\sin\bar{\omega}t$ ⟶ Spectre = une raie dans le domaine fréquentiel



Amplification maximale pour les modes de pulsation proche de la pulsation excitatrice

Réponse quasi-statique pour les modes à haute pulsation propre

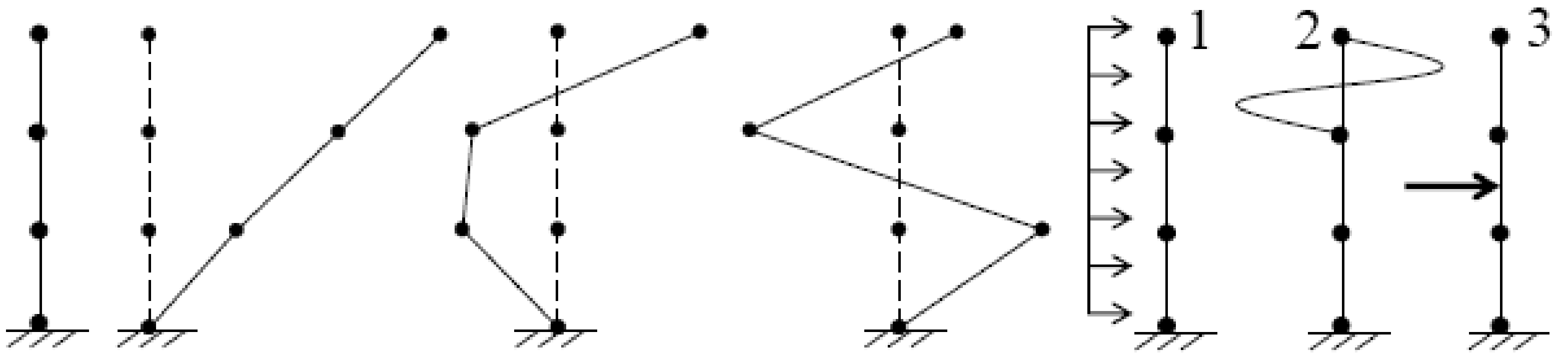
- ***Oscillateur à plusieurs D.D.L (MDOF)***

Critères pour justifier la réduction:

Facteur de participation modale – hypothèse: $\{P(t)\} = \{R\}\varphi(t)$

$$\frac{P_i^*}{M_i^*} = \frac{\langle u_i \rangle \{P\}}{\langle u_i \rangle [M] \{u_i\}} = \boxed{\frac{\langle u_i \rangle \{R\}}{\langle u_i \rangle [M] \{u_i\}}} \varphi(t)$$

= F.P.M: charge modale normée par la masse, proportionnelle au produit scalaire de la charge par le mode



Charge 1: Excite principalement le monde 1; plus on monte dans les modes, plus FPM diminue

Charge 2: Excite surtout le mode 2

Charge 3: Excite modes 1 et 2, mais pas mode 3

Vecteurs propres: indépendants du chargement

• FPM maximum si la déformée est homothétique au chargement $\{R\}$

- Remplacer la base des modes propres par une base liée en correspondance avec le chargement (= vecteurs de Ritz).

Méthode

- Déformée statique sous $\{R\}$ $\Rightarrow$ $\{q_1\} = [K]^{-1}\{R\}$
- Normalisation par rapport à $[M]$ $\Rightarrow$ $\langle q_1\rangle[M]\{q_1\} = \beta_1^2$

$$\Rightarrow \{\psi_1\} = \frac{1}{\beta_1}\{q_1\} \quad \left(\rightarrow \langle\psi_1\rangle[M]\{\psi_1\} = 1\right)$$

- Si la structure se déforme selon $\{\psi_1\}$, les forces d'inertie se distribuent selon $[M]\ \{\psi_1\}$

→ solution statique sous les forces d'inertie: $\{q_2\} = [K]^{-1}[M]\{\psi_1\}$

$\{q_2\}$ et $\{\psi_1\}$ à priori pas orthogonaux

PARASISMIQUE

- **Introduction**
- **Séismes , origines, caractéristiques, aléa sismique**
- **Eléments de base de dynamique de structures**
- ***Principes de construction de spectres en accélération et déplacement, Spectres réglementaires (EC8)***
- Méthode de dimensionnement de structures selon EC8,
- Exemples de dimensionnement (4TP, 2TD)
- Protection parasismique, dispositifs constructifs
- Rénovation sismique