Comportement dépendant du temps (différé) des matériaux

- Comportement différé (cours de formulation du béton, béton armé, béton précontraint):
  + Béton: retrait et fluage
  + Acier: relaxation
  + Cause d'une perte de précontrainte entre 10 à 20% à long-terme

- La prise en compte du comportement différé (retrait et fluage du béton, relaxation d'armature) dans EC2: formules (modèles) empiriques
  + Par exemple: coefficient de fluage du béton $\varepsilon_{cc}(\infty,t_0) = \varphi(\infty,t_0) \times \frac{\sigma_c}{E_c}$

$$\phi(t,t_0) = \phi_0 * \beta_c(t,t_0) \text{ où } \phi_0 = \phi_{RH} * \beta(f_{cm}) * \beta(t_0)$$

$$\phi_{RH} = (1 + \frac{1 - RH/100}{0{,}1 * \sqrt[3]{h_0}} \text{ pour } f_{cm} \leq 35 \text{ MPa et } \phi_{RH} = (1 + \frac{1 - RH/100}{0{,}1 * \sqrt[3]{h_0}} * \alpha_1) * \alpha_2 \text{ pour } f_{cm} > 35 \text{ MPa}$$

$$\beta(f_{cm}) = 16{,}8/\sqrt{f_{cm}} \qquad \beta(t_0) = 1/(0{,}1 + t_0^{0,2}) \qquad \beta_c(t,t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{(\beta_H + t - t_0)}\right]^{0,3}$$

Ces modèles de comportement différés des bétons sont bien évidemment calés sur des comportements moyens de bétons standards. Même pour ces bétons, la fourchette d'incertitude sur la précision est estimée à +/- 30 %. Pour des bétons particuliers avec, par exemple, des granulats sortant de l'ordinaire ou une grande quantité de pâte, les variations peuvent être du simple au double voire au-delà.

B.105 Estimation des déformations différées à long terme

(101) Les formules et les déterminations expérimentales du fluage et du retrait sont fondées sur des données collectées sur des périodes limitées. L'extrapolation de tels résultats pour des évaluations à très long terme (par exemple un siècle) conduit à l'introduction d'erreurs supplémentaires associées aux expressions mathématiques utilisées pour l'extrapolation.

(102) Les formules indiquées en B.1, B.2 et B.103 de la présente Annexe fournissent une estimation moyenne satisfaisante des déformations différées extrapolées à long terme. Toutefois, lorsque la surestimation des déformations différées entraîne une augmentation de la sécurité, et lorsque le projet le justifie, il convient de multiplier le fluage et le retrait prévus sur la base des formules ou des déterminations expérimentales par un coefficient partiel.

Annexe KK

(informative)

Effets structurels induits par le comportement différé du béton

La présente Annexe décrit les différentes méthodes d'évaluation des effets structurels induits par le comportement différé du béton.

KK.2 Considérations générales

(101) Il convient, en règle générale, de prendre en compte les effets structurels induits par le comportement différé du béton, tels que l'évolution des déformations et/ou la redistribution des efforts, dans les conditions d'aptitude au service.

NOTE Dans des cas particuliers (par exemple structures ou éléments de structure sensibles aux effets de second ordre ou structures pour lesquelles les sollicitations ne peuvent pas se redistribuer), les effets différés peuvent également avoir une influence aux ELU.

(102) Lorsque les contraintes de compression dans le béton sont inférieures à $0{,}45 f_{ck}(t)$ sous combinaison quasi-permanente, une analyse structurelle linéaire et un modèle viscoélastique linéaire de vieillissement sont appropriés. Il convient de décrire le comportement différé du béton par le coefficient $\varphi(t,t_0)$ ou la fonction de fluage $J(t,t_0)$ ou, alternativement, par la fonction de relaxation $R(t,t_0)$.

Pour des contraintes de compression plus élevées, il convient de tenir compte des effets de la non-linéarité du fluage.

Les conséquences du fluage (comportement des grands ouvrages au fluage, pertes de précontrainte, redistribution des efforts)

le célèbre épisode du sauvetage du pont sur le Veurdre en 1912 par Freyssinet

Le pont du Veurdre fut le premier de trois ponts en béton armé que Freyssinet construisit dans le département de l'Allier entre 1911 et 1912. Le pont du Veurdre était un pont en béton armé à trois travées (67, 72 et 67 mètres de portées) chacune en arc très surbaissé (1/15)

Calculé suivant le règlement de 1906, le module d'élasticité du béton étant constant (la notion de fluage du béton n'existant pas), le concept du pont, articulé en clé, s'accordait mal à des déformations différées. Très rapidement après sa mise en service, Freyssinet s'aperçut que la flèche en clé augmentait de plus en plus vite, ce qui, à terme, condamnait l'ouvrage.

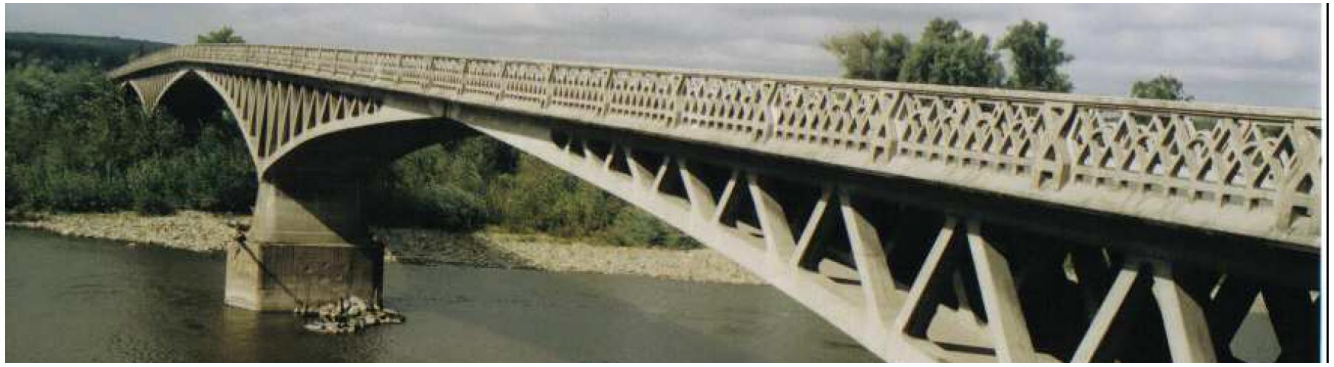


G. Pons, J.M. Torrenti

Il testa alors des éprouvettes du béton qui avait servi à construire le pont et vit que la qualité de celui-ci n'était pas en cause : le module d'Young était bien croissant dans le temps. Il fallait donc que le béton ait des déformations différées de grande ampleur. Or, les expériences réalisées au laboratoire des Ponts et Chaussées par Mesnager n'en montraient aucune. En allant questionner les techniciens du laboratoire, Freyssinet découvrit que ceux-ci démontaient les capteurs de déplacement de peur de les briser quelques instants après que la charge eut été appliquée. Ils ne risquaient donc pas de mesurer une quelconque déformation différée...

La suite est connue : de nuit, sans prévenir les autorités, Freyssinet, en remettant en place les vérins en clé qui avaient permis le décintrement de l'ouvrage, alla compenser les déformations différées. Il supprima ensuite l'articulation en clé du pont du Veurdre (les arcs du pont de Boutiron n'en auront pas).

A partir de cette expérience en vraie grandeur, Freyssinet acquit la certitude que le béton était l'objet de déformations différées et étudia le phénomène pour ses réalisations ultérieures en béton armé (réglage des arcs du pont Albert Louppe en 1926 par exemple) et, bien sûr, en béton précontraint.



Grand pont en France

Flèches de 20 cm au lieu de 3 cm (calcul)

Pourquoi ? Évolution ?

Le pont de Savines

Un an seulement après la mise en service du pont, des flèches importantes ont été relevées à mi-travée. Ces flèches atteignent aujourd'hui 160 à 180 mm.

C'est pourquoi, depuis sa mise en service, le pont a subi de nombreuses maintenances qui consistaient fréquemment en l'ajout d'enrobé à mi-travée afin d'améliorer le profil de la chaussée. Chacune de ces maintenances augmentant alors le poids propre et par conséquent les contraintes ainsi que les déformations de fluage, il a été décidé en 2003 d'accepter un état non plan de la chaussée.





Le pont de Savines *(© J-M. Torrenti)*

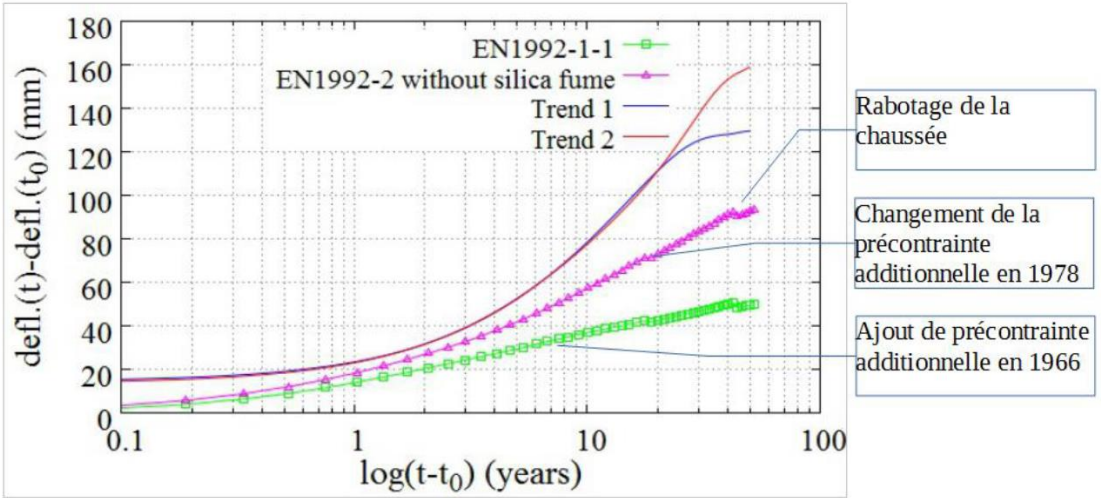
Le pont de Savines

Comparaison entre mesures in-situ et flèches calculées

Le travail de simulation est entrepris en utilisant les relations des Eurocodes *(NF EN1992-1-1 : 2004 et NF EN1992-2 : 2006)*.

Lors de la simulation, les contraintes maximales calculées en fibre supérieure et en fibre inférieure sont respectivement 5,3 MPa et 11,4 MPa. De fait, l'hypothèse du comportement viscoélastique est vérifiée.

Les résultats numériques montrent que les flèches obtenues avec les Eurocodes sous-estiment systématiquement de 2 à 3 fois environ les mesures in-situ.



Comparaisons entre les mesures in-situ et les flèches obtenues par simulations

Sellin et al. (2016)

Comportement différé des ouvrages dans le massif rocheux

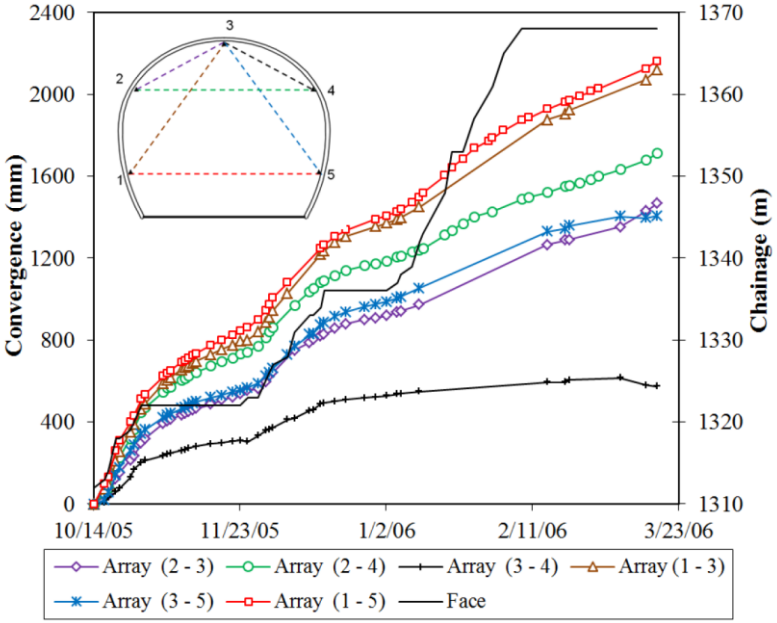
- Convergence des excavations profondes dans les massifs rocheux

  + Exemple: tunnel ferroviaire Lyon-Turin. Le comportement fortement différé de la roche crée une forte convergence dont la magnitude dépasse 2m après 145 jours et à une distance de 60m du front de taille (M.H. Tran 2014).

  -> comportement fortement dépendant du temps de la roche

  -> conséquence significative sur la conception des revêtements (en béton, acier,..)

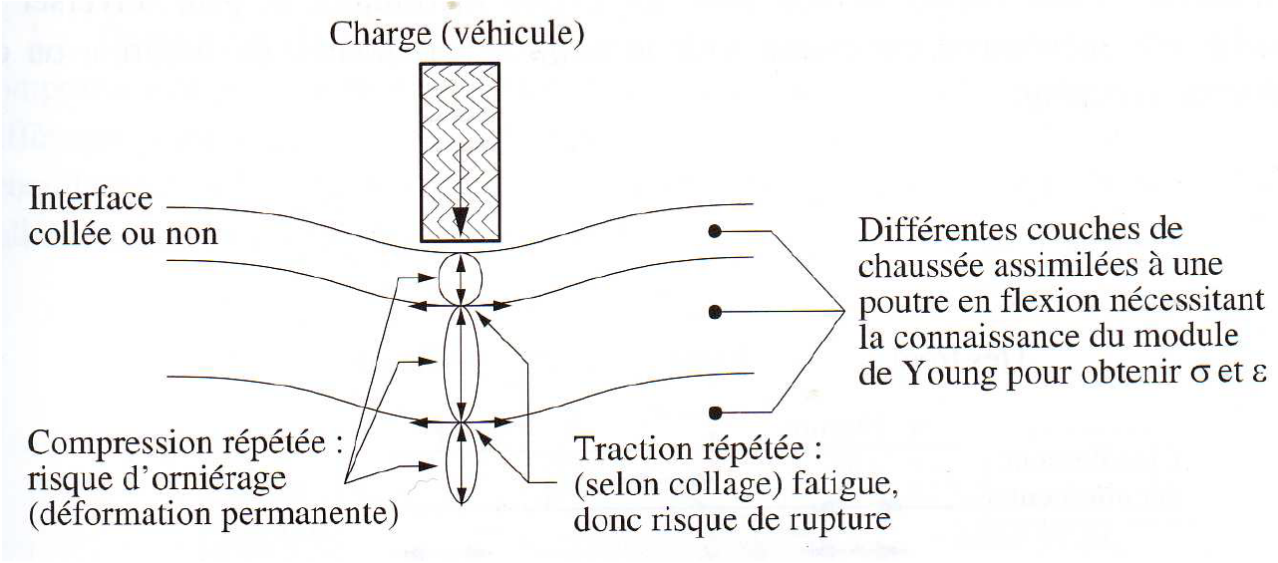




Orniérage des chaussées bitumineuses

L'orniérage désigne de façon générale les phénomènes de déformations permanentes du profil transversal des chaussées, qui apparaissent et croissent sous les sollicitations du trafic.

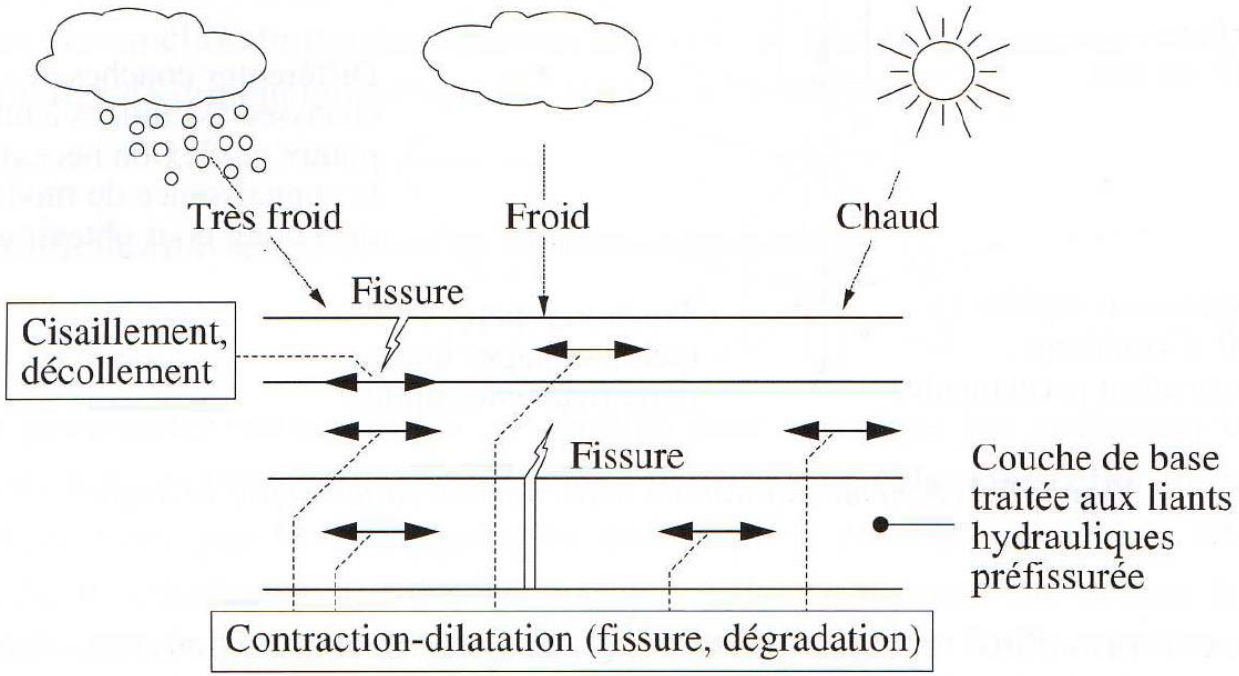
Sous les sollicitations cycliques du trafic, la base des couches structurelles subit une traction répétée qui peut créer des microdégradations et entraîner la ruine des couches. Ce phénomène de fatigue peut entraîner des fissures au travers de la chaussée. Dans le même temps, la partie supérieure de chaque couche est soumise aux efforts de compression répétée qui peuvent entraîner des déformations permanentes induisant un orniérage à la surface de la chaussée.





Orniérage des chaussées bitumineuses

Outre les chargements mécaniques, les chaussées subissent des chargements consécutifs aux variations de la température. Ces variations thermiques entraînent des changements de la rigidité du mélange : à température basse le mélange bitumineux est rigide et fragile tandis qu'à haute température la rigidité du mélange chute et que sa ductilité augmente.

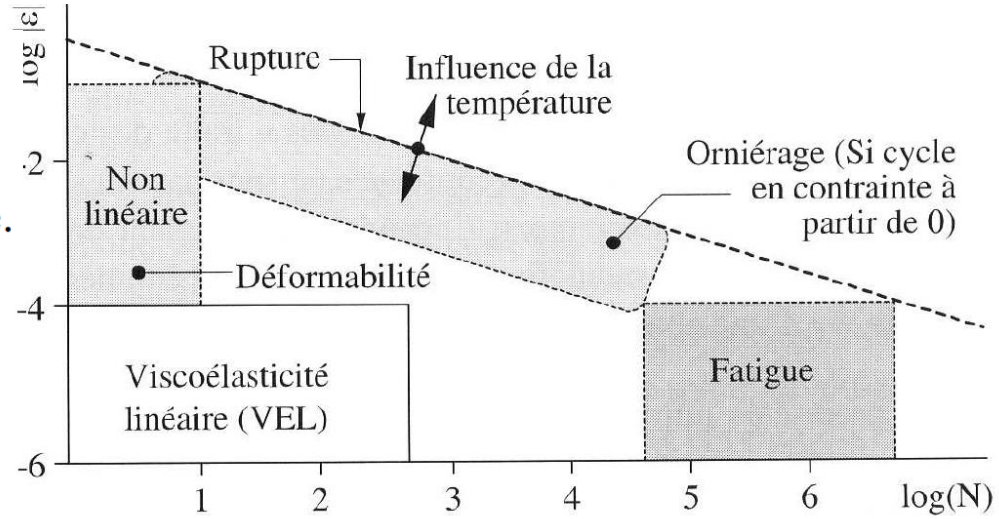




Classement des types de comportement des matériaux bitumineux

Le comportement des matériaux bitumineux dans les structures routières varie largement suivant les conditions de chargements et le climat.

- Pour des chargements comprenant quelques centaines de cycles et des déformations faibles ($< 10^{-4}$), le comportement est considéré, en première approximation, viscoélastique linéaire.
- Pour un faible nombre de cycles de chargement et des déformations élevées (quelques pour-cents), le comportement est fortement non linéaire.

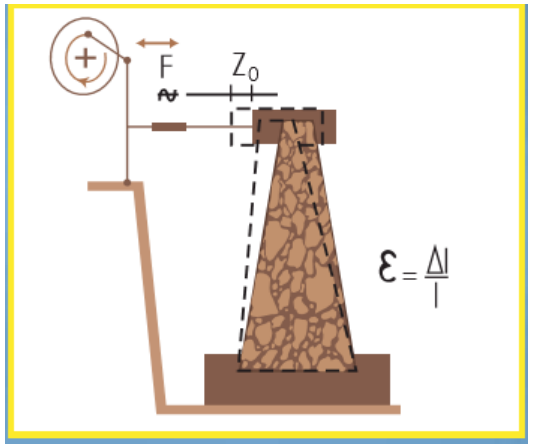


- Le phénomène de fatigue se produit lors de chargements de plusieurs dizaines de milliers de cycles et des déformations "faibles" qui favorisent le développement de l'endommagement.
- La production et l'accumulation des déformations irréversibles sous un grand nombre de cycles de chargements favorisé par une température élevée est le quatrième type de comportement.

Comportement sous sollicitation harmonique.

Essai de fatigue (enrobés)

- L'essai consiste à solliciter le sommet d'une éprouvette trapézoïdale encastré sur sa grande base une sollicitation cyclique sinusoïdale de fréquence constante. Dans un essai de fatigue, un grand nombre de cycles de sollicitation est appliqué jusqu'à la « rupture » de l'éprouvette, soit par définition, lorsque la valeur du module complexe de rigidité (c'est-à-dire la norme du module complexe) ne représente plus que la moitié de sa valeur initiale.





https://www.youtube.com/watch?v=Qd2zsRQdO88

Comportement différé observé au laboratoire

- Essai de fluage (béton, roche, acier, bois…)

+ essai de fluage (ou l'expérience de retard): le principe de cet essai est d'imposer à l'éprouvette d'un matériau homogène une contrainte en compression constante et on observe les déplacements (vertical, horizontal) dans le temps.

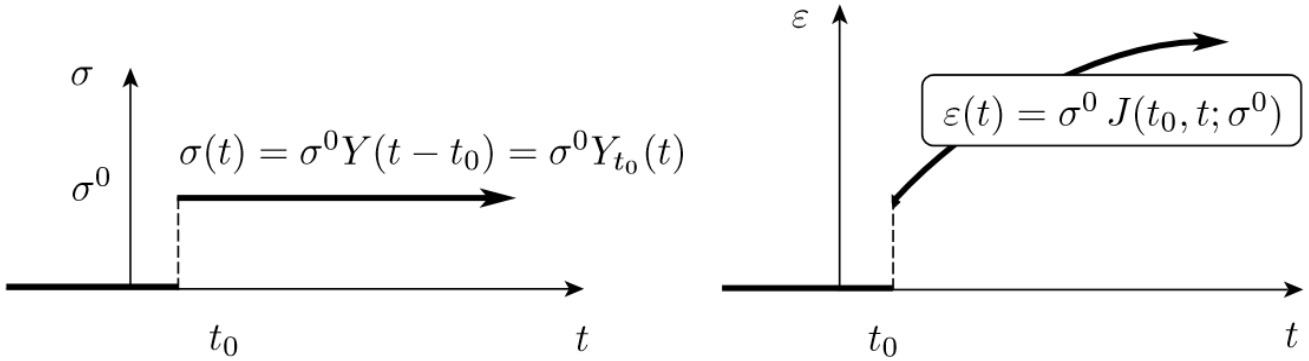
$$\sigma(t) = \sigma^0 Y_{t_0}(t)$$

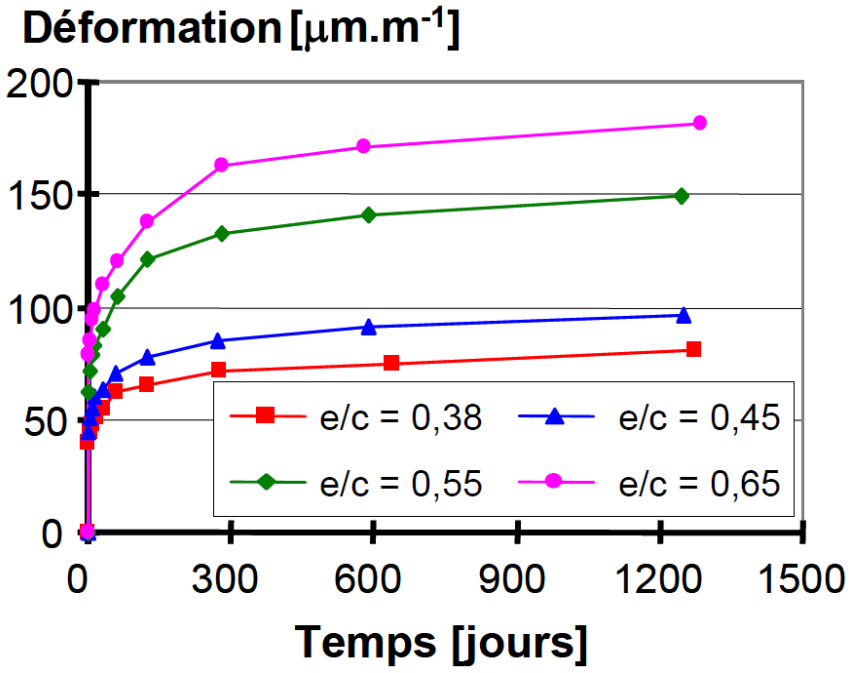
fonction de Heaviside $Y_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & t < t_0 \\ 1 & t \geq t_0 \end{cases}$

$$\varepsilon(t) = \sigma^0 J(t_0, t, \sigma^0)$$

fonction de retard:

$$\begin{cases} J(t_0, t, \sigma^0) = 0 & \text{si} \quad t < t_0 \\ J(t_0, t_0, \sigma^0) > 0 & \text{pour} \quad t = t_0 \\ J(t_0, t, \sigma^0) \text{ croissant} & \text{pour} \quad t \geq t_0 \end{cases}$$





- Essai de relaxation (acier, béton, roche…)

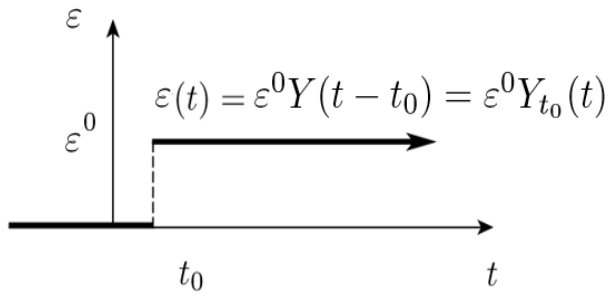
+ Le principe de l'essai de relaxation: on impose et maintient une déformation constante et on observe l'évolution en fonction du temps de la contrainte dans l'éprouvette du matériau

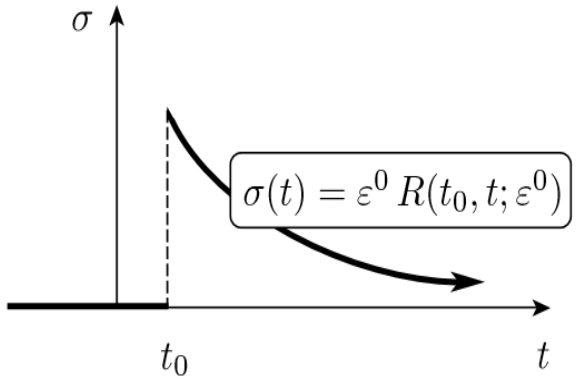
$$\varepsilon(t) = \varepsilon^0 Y_{t_0}(t)$$

$$\sigma(t) = \varepsilon^0 R\left(t_0, t, \sigma^0\right)$$

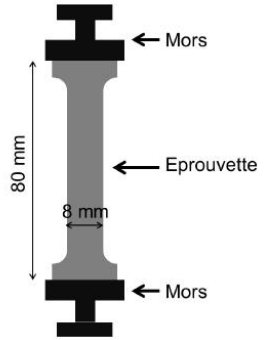
fonction de relaxation:

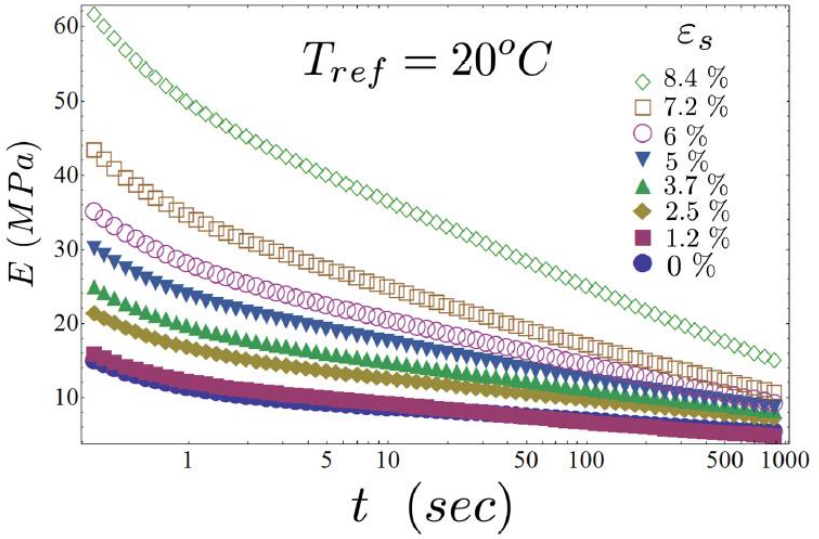
$$\begin{cases} R\left(t_0,t,\sigma^0\right)=0 & \text{si} \quad t<t_0 \\ R\left(t_0,t_0,\sigma^0\right)=0 & \text{pour} \quad t=t_0 \\ R\left(t_0,t,\sigma^0\right)\geq 0 & \text{pour} \quad t>t_0 \\ R\left(t_0,t,\sigma^0\right) \text{ décroissant} & \text{pour} \quad t>t_0 \end{cases}$$





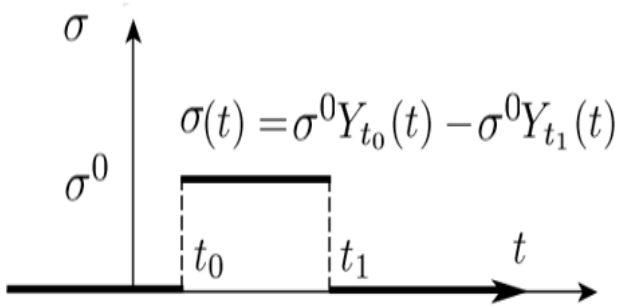


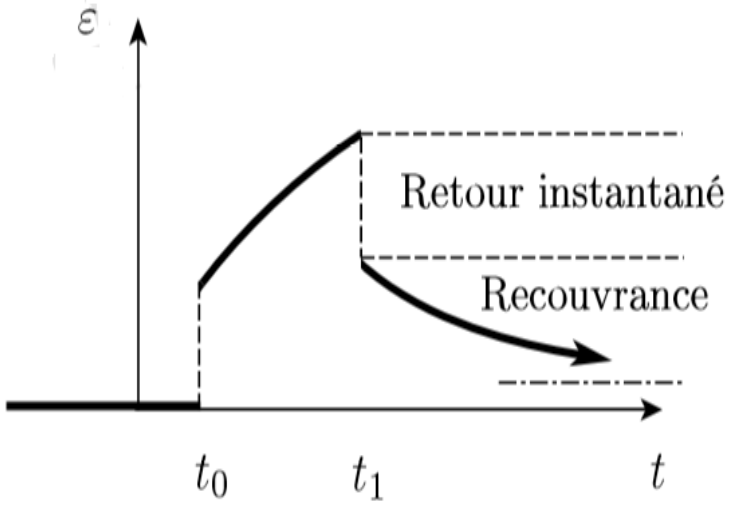


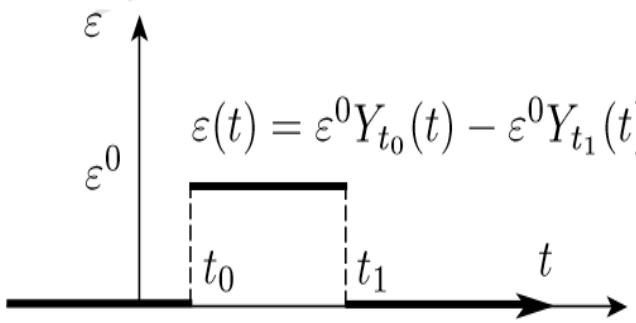


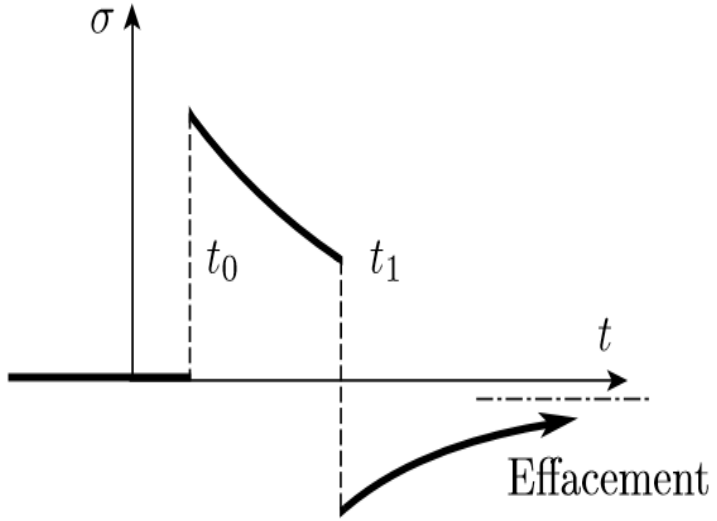
- Essai de recouvrance et d'effacement

+ L'essai de fluage (ou de relaxation) pourrait également être réalisé sous la forme de charge-décharge qui est connu sous le nom d'essai de recouvrance (ou d'effacement). Le principe de ce type d'essai est d'imposer en créneau une charge d'amplitude σ^0 (ou ϵ^0) à partir de l'instant t_0 qui est suivi par la phase de décharge instantanée de même amplitude à l'instant t_1.

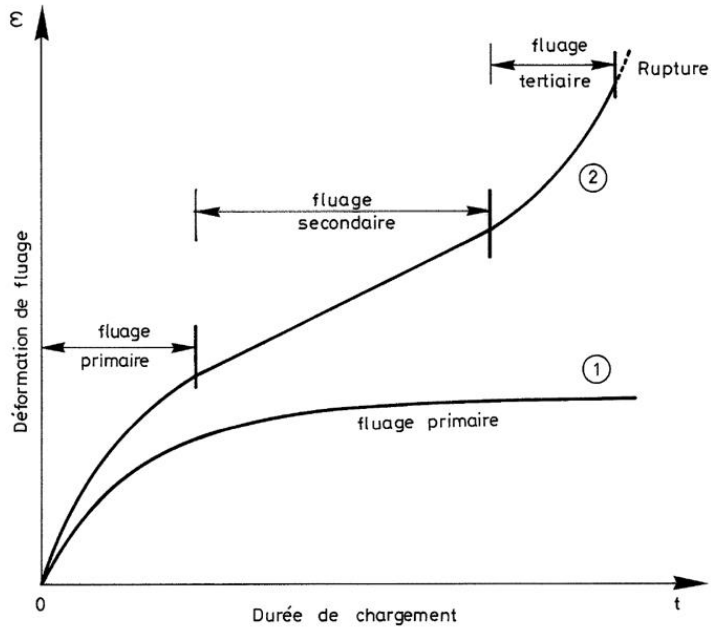








Résultats d'essai de fluage

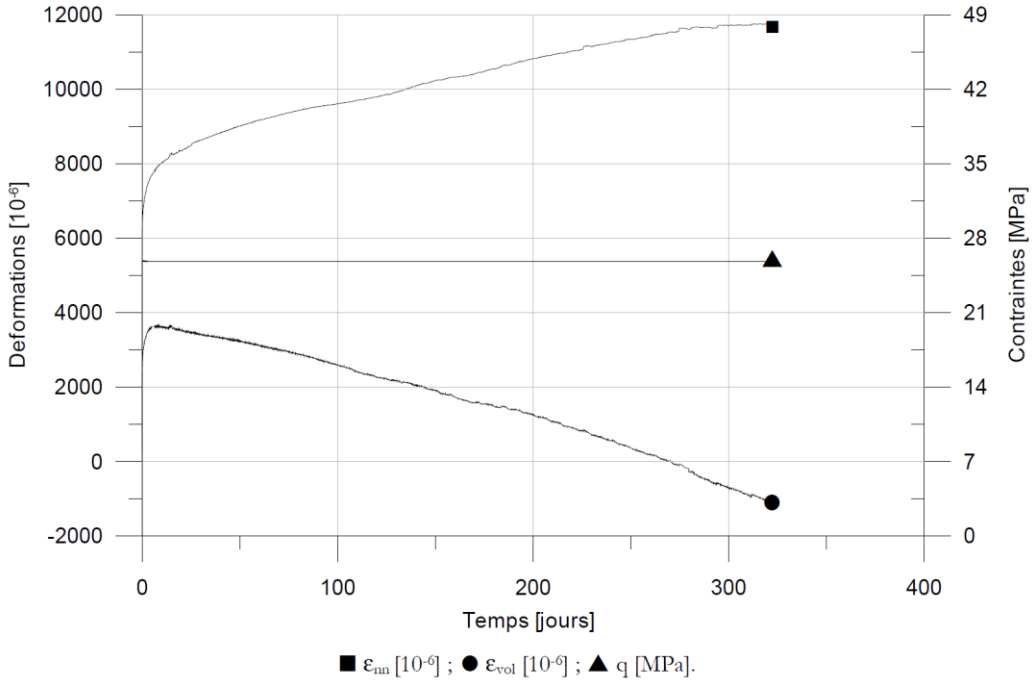


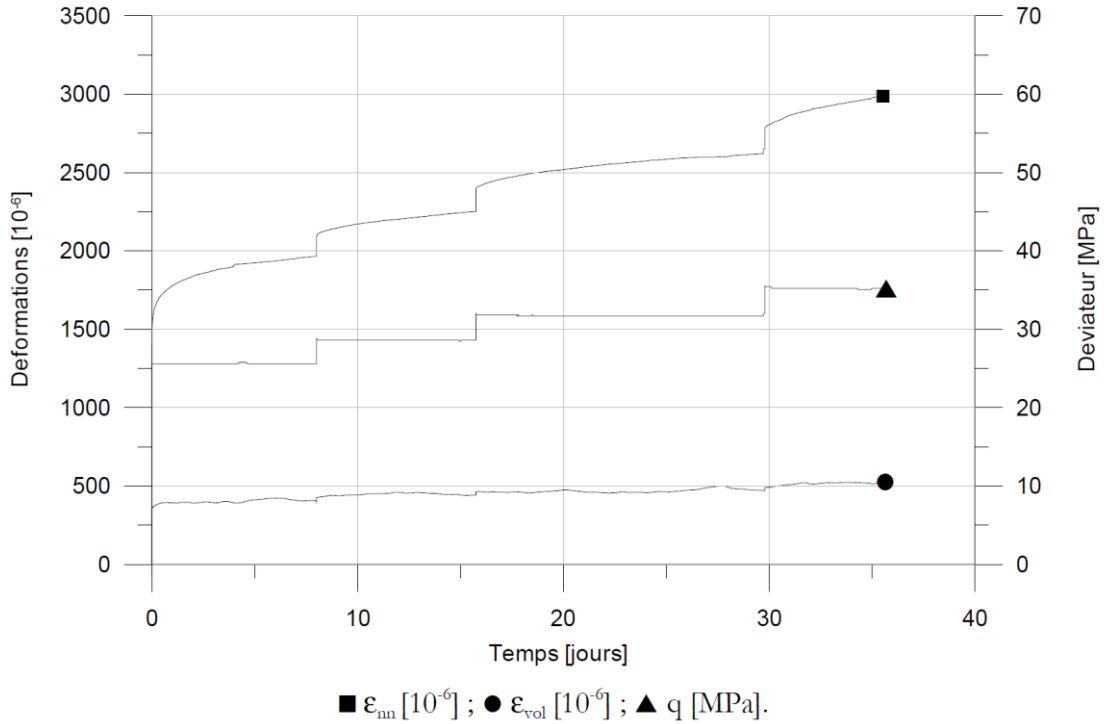
fluage primaire : la vitesse de fluage qui était décroissante

fluage secondaire : la vitesse de fluage peut devenir constante

fluage tertiaire : la vitesse de fluage pourra amener à terme à la rupture après accélération de la vitesse de fluage

Le passage du fluage primaire au fluage secondaire dépend, d'une part, de l'intensité de la charge appliquée et, d'autre part, de la durée du chargement ou de la période d'observation





- Résultats d’essai de recouvrance: cas général d’un matériau élasto-viscoplastique

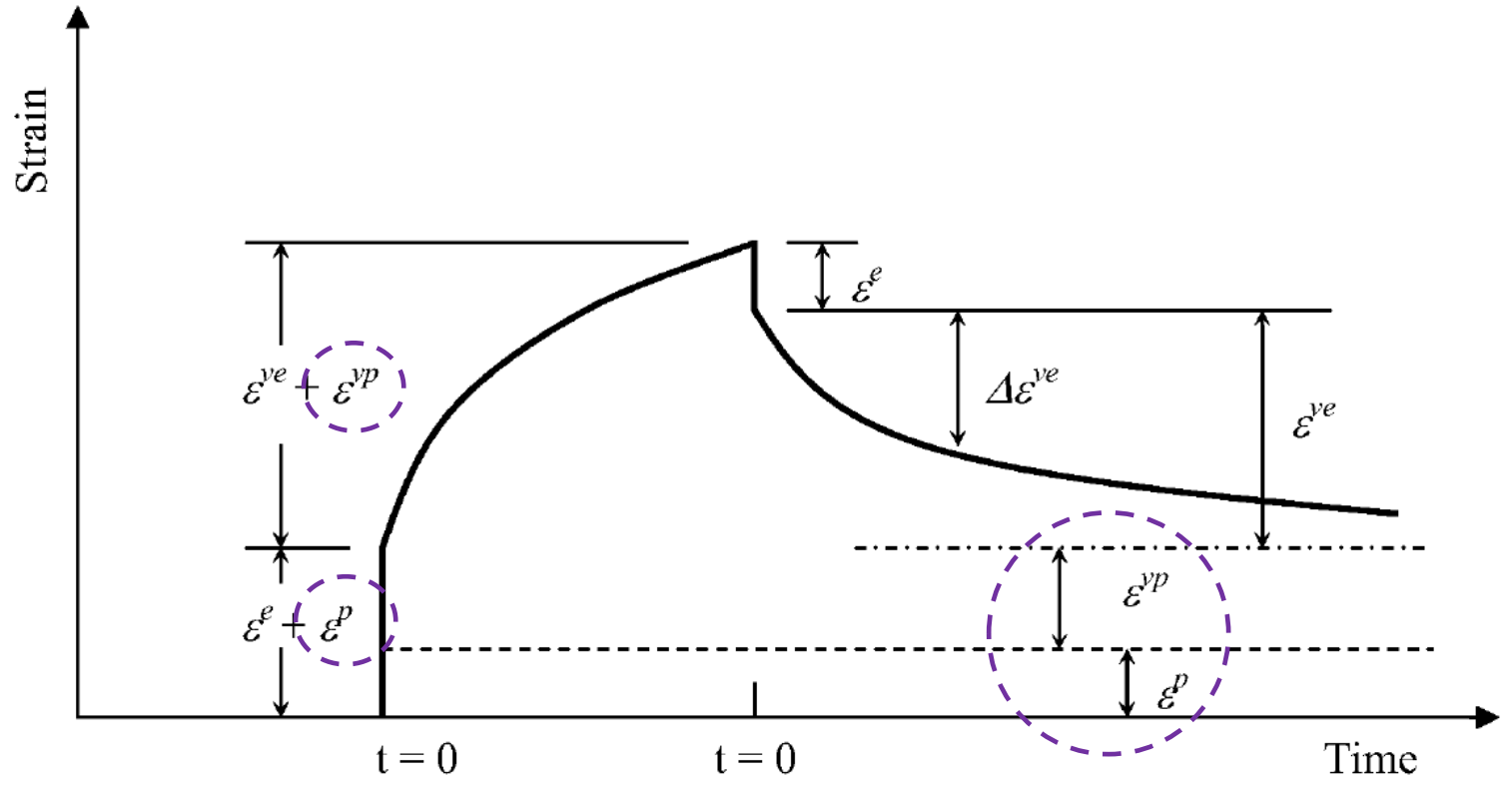
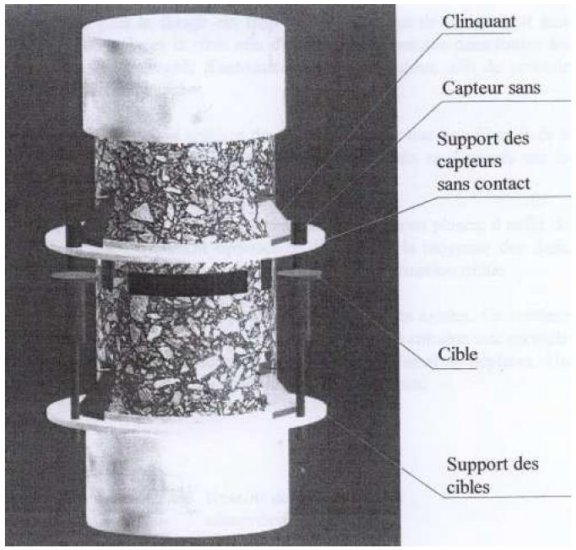
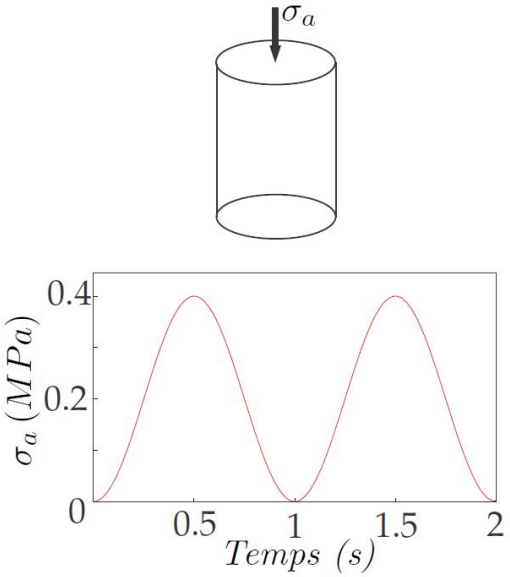
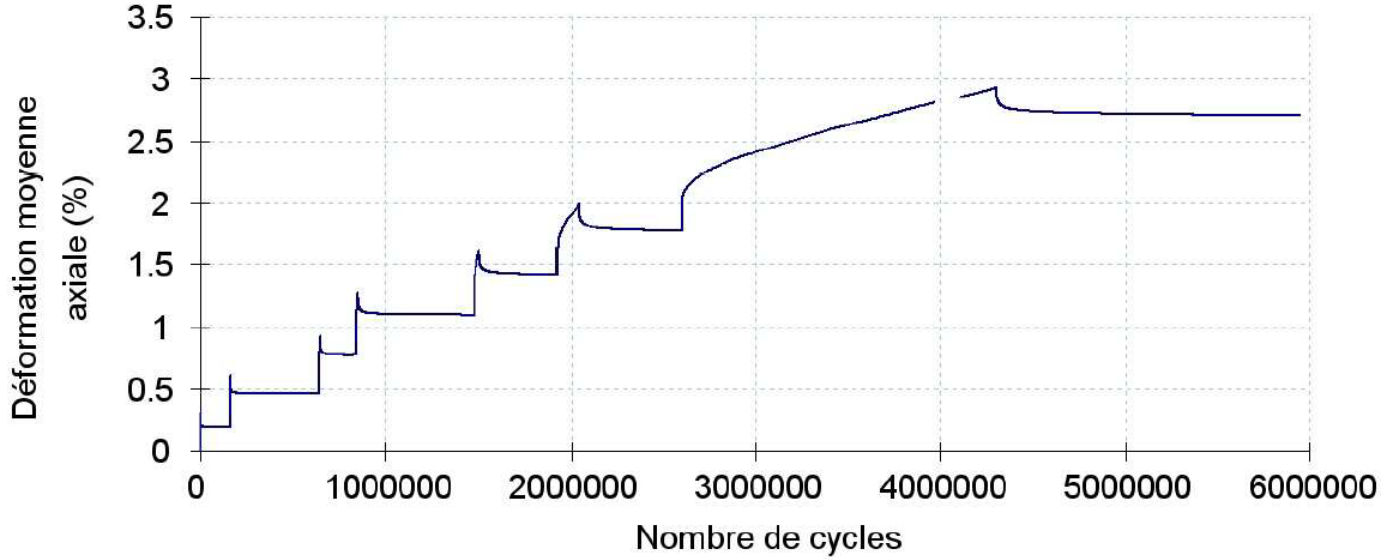


Schéma de décomposition de la déformation totale d’un matériau élasto-visco-plastique

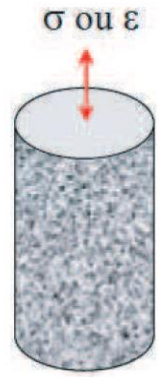
- Résultats d’essai de fluage (recouvrance) cyclique des matériaux bitumineux

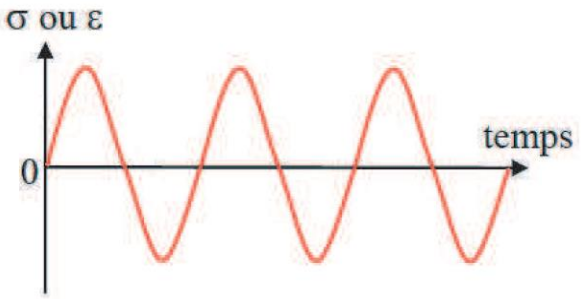




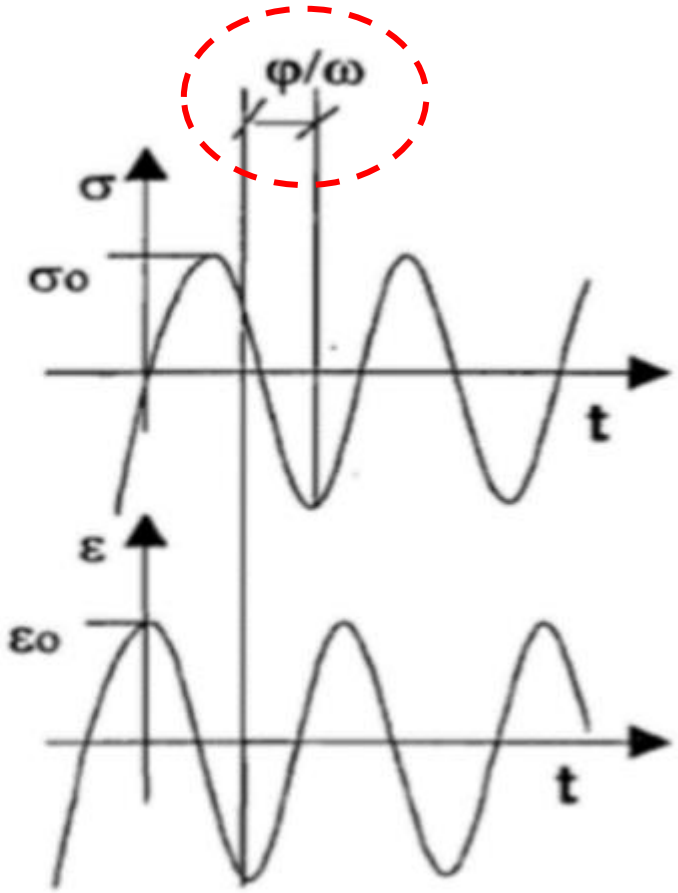


- Essai sous les sollicitation harmonique (enrobés)



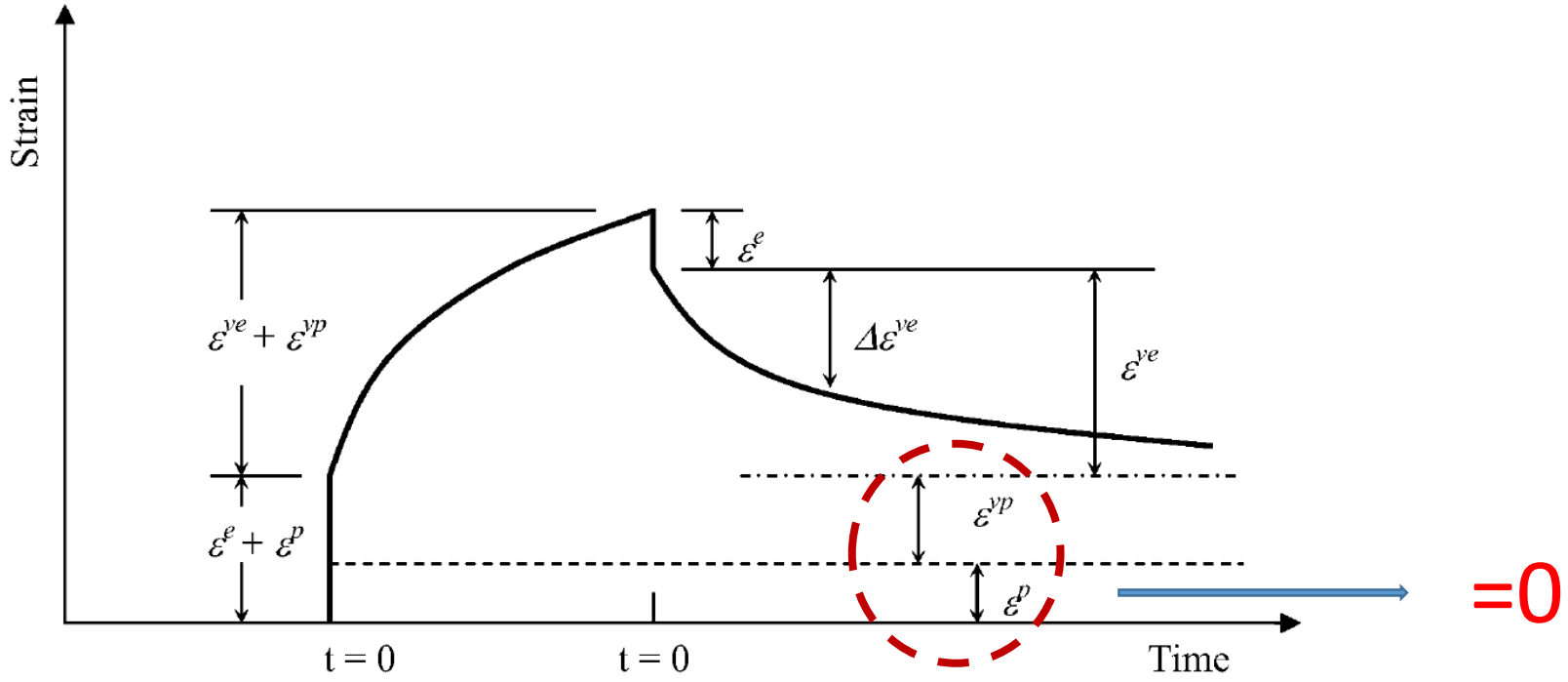






Déphasage entre la sollicitation et la réponse -> comportement visqueux du matériau ??

Comportement viscoélastique



=0

Schéma de décomposition de la déformation totale d'un matériau élasto-visco-plastique

Comportement viscoélastique

Solid or Liquid?



- Long deformation time: pitch behaves like a highly viscous liquid
  - 9th drop fell July 2013
- Short deformation time: pitch behaves like a solid



Started in 1927 by Thomas Parnell in Queensland, Australia

http://www.theatlantic.com/technology/archive/2013/07/the-3-most-exciting-words-in-science-right-now-the-pitch-dropped/277919/

TA | TAINSTRUMENTS.COM

Extrait à partir Tainstrument.com

Range of Material Behavior

Liquid Like---------- Solid Like

Ideal Fluid ----- Most Materials -----Ideal Solid

Purely Viscous ----- *Visco*elastic ----- Purely Elastic

Viscoelasticity: Having both viscous and elastic properties

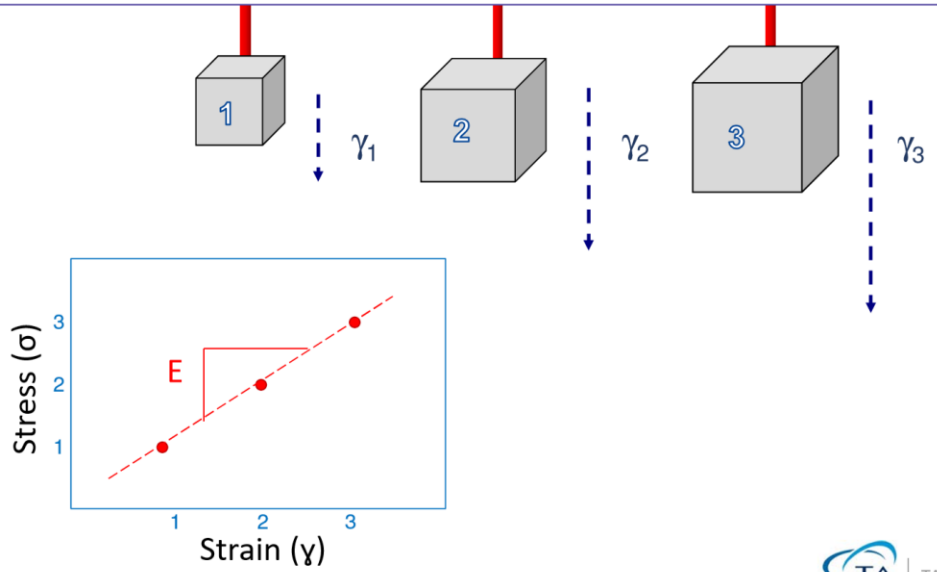
- Materials behave in the linear manner, as described by Hooke and Newton, only on a small scale in stress or deformation.

Comportement viscoélastique

Elastic Behavior of an Ideal Solid

Hooke's Law of Elasticity: Stress = Modulus · Strain

$$\sigma = E \cdot \gamma$$

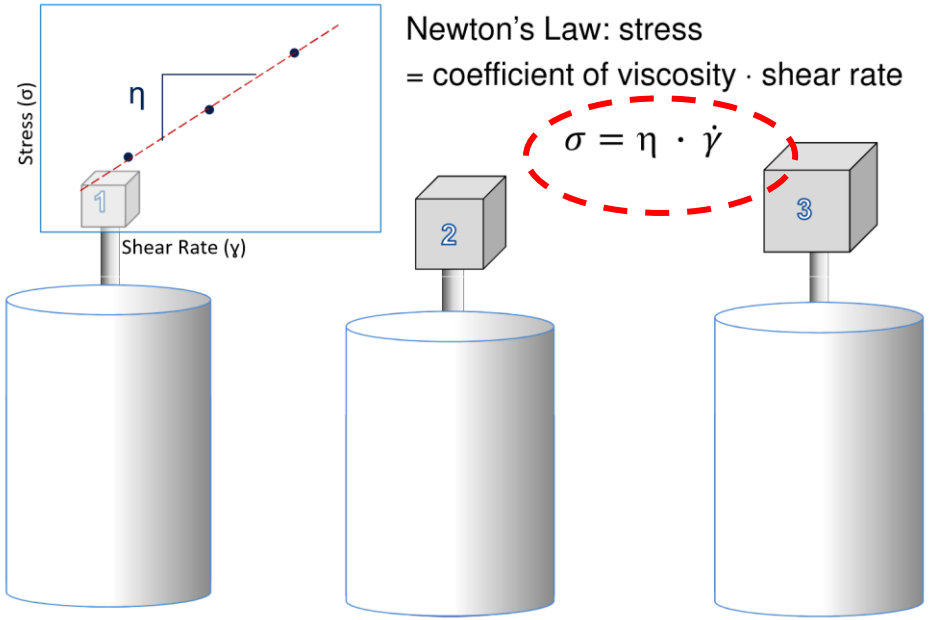


TA | TAINSTRUMENTS.COM

Viscous Behavior of an Ideal Liquid

Newton's Law: stress
= coefficient of viscosity · shear rate

$$\sigma = \eta \cdot \dot{\gamma}$$



Extrait à partir Tainstrument.com

Comportement viscoélastique

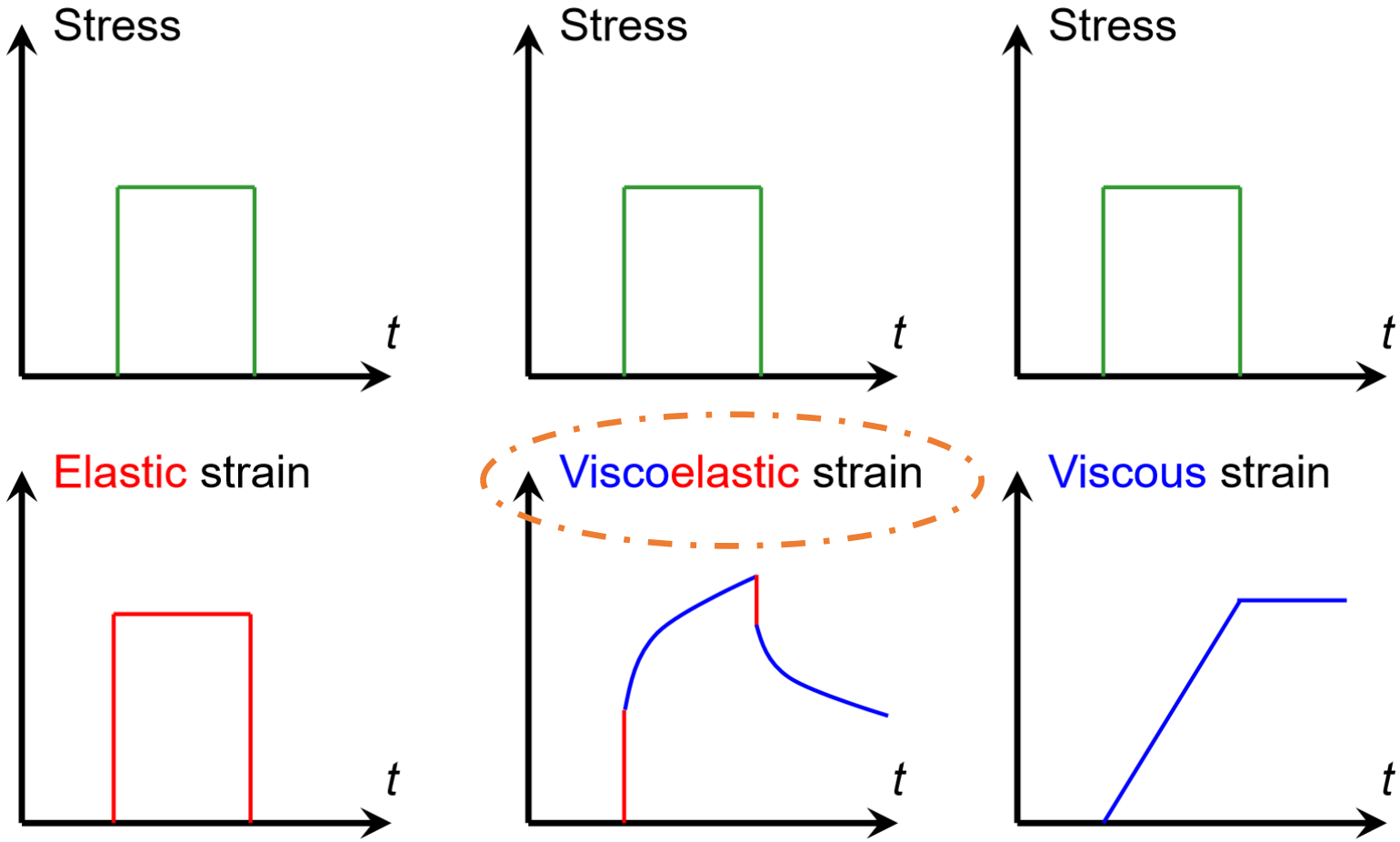
Range of Material Behavior

Liquid Like---------- Solid Like

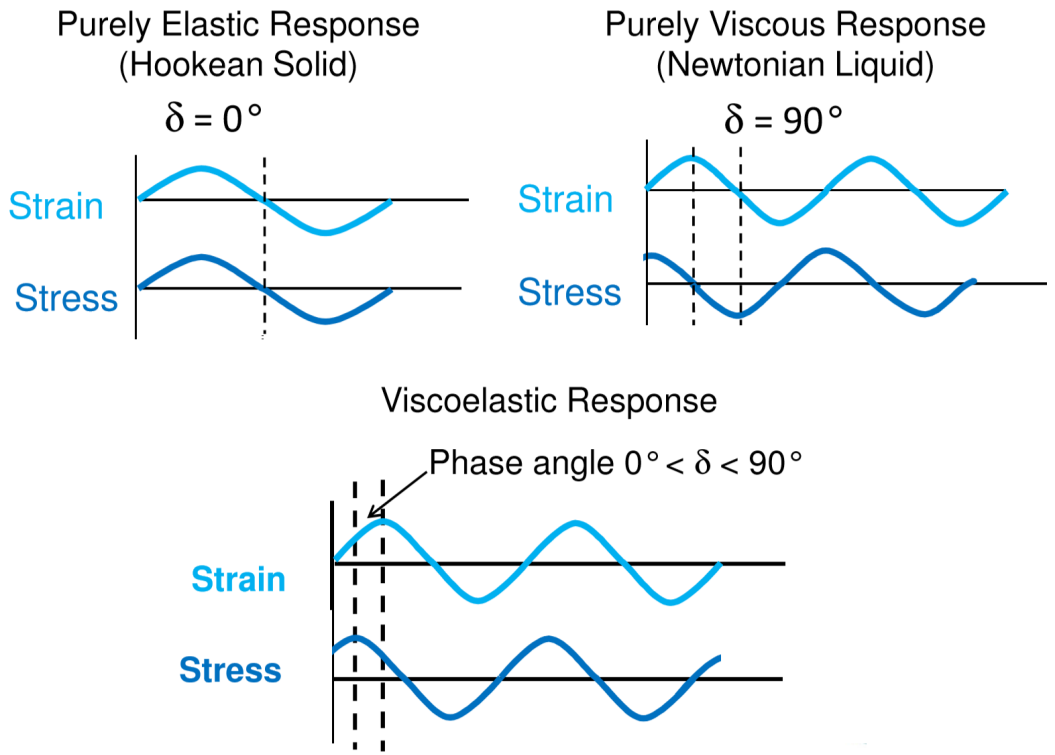
Ideal Fluid ----- Most Materials -----Ideal Solid

Purely Viscous ----- *Visco*elastic ----- Purely Elastic

Viscoelasticity: Having both viscous and elastic properties



Comportement sous sollicitation harmonique.



Sollicitation sinusoïdale de pulsation ω

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^0 \sin \omega t$$

+ Comportement purement élastique (déphasage = 0)

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) = E\varepsilon^0 \sin \omega t = \sigma^0 \sin \omega t$$

+ Comportement purement visqueux (déphasage = 90°)

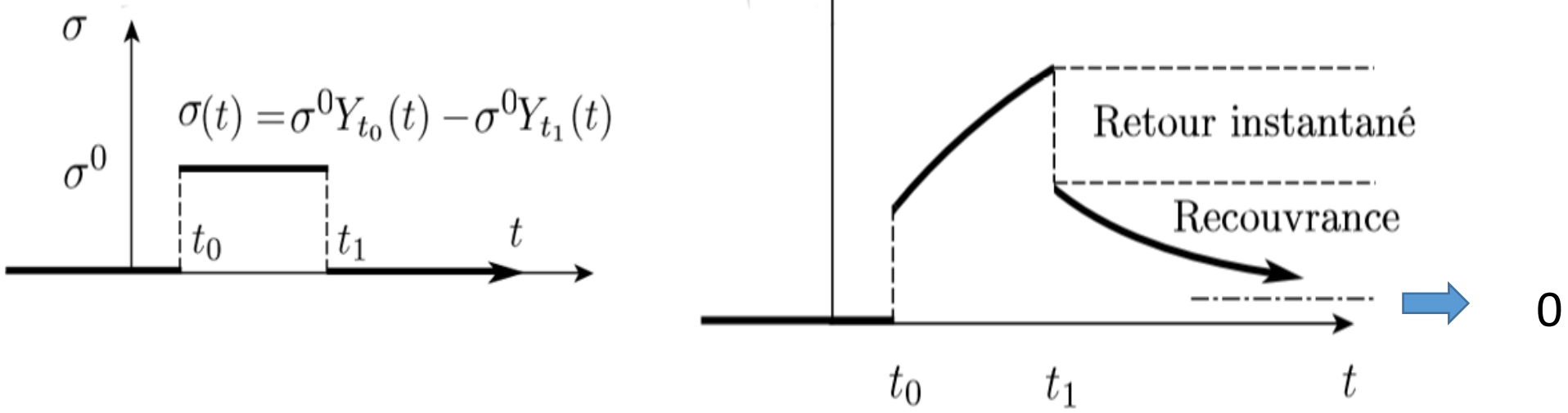
$$\sigma(t) = \eta.\varepsilon'(t) = \eta\varepsilon^0 \cos \omega t = \eta\varepsilon^0 \sin(\omega t - \tau/2)$$

+ le déphasage φ caractérise le comportement plus ou moins élastique du matériau. Plus φ tends vers $\pi/2$, plus le caractère du matériau se rapproche de celui d'un fluide visqueux

Comportement viscoélastique linéaire

On adopte par la suite un comportement linéaire du matériau où le principe de superposition est applicable. Sous cette hypothèse, la déformation $\epsilon(t)$ à chaque instant t dépend de l'histoire de la contrainte σ jusqu'à cet instant. Par exemple, dans le contexte de l'expérience de recouvrance, la réponse de déformation à l'instant t :

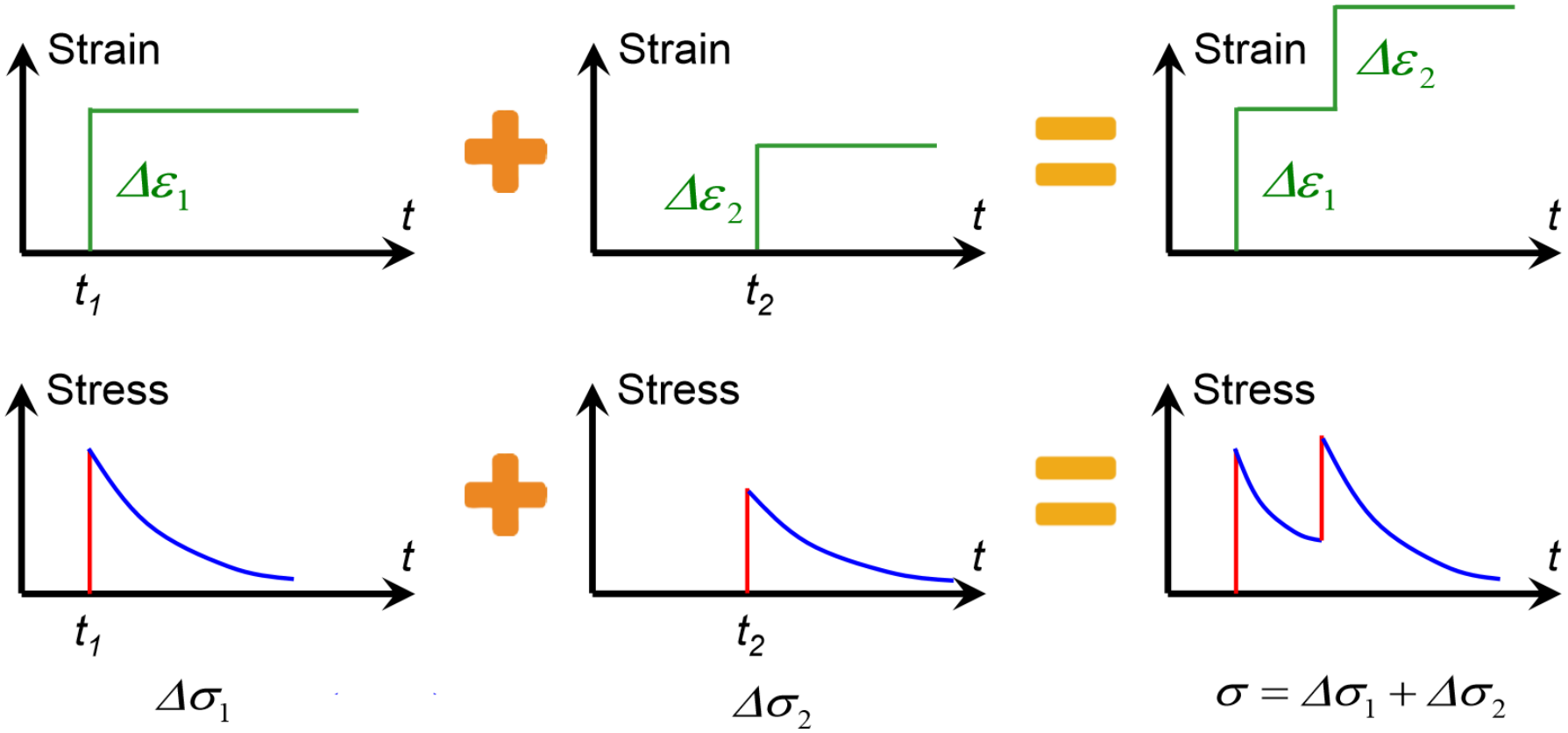
$$\varepsilon(t) = \sigma^0 (J(t_0, t) - J(t_1, t))$$



Comportement viscoélastique linéaire

Boltzmann superposition principle

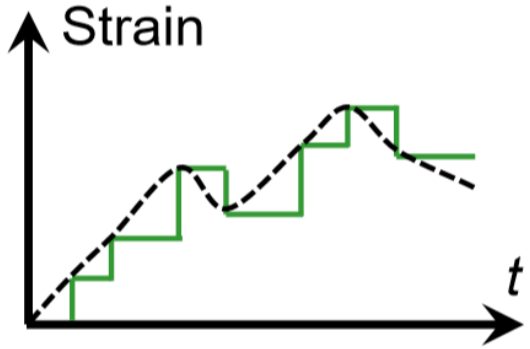
- In the linear viscoelastic regime, the stress (strain) responses to successive strain (stress) stimuli are additive



Comportement viscoélastique linéaire

- In the linear viscoelastic regime, the stress (strain) responses to successive strain (stress) stimuli are additive

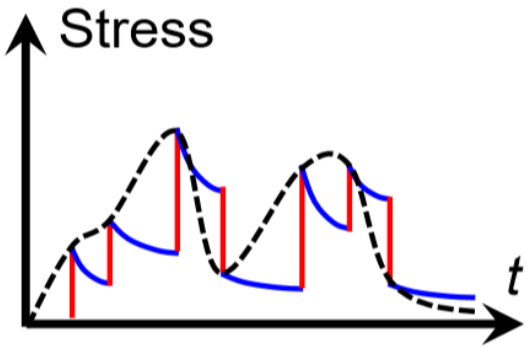
Forme de l'intégrale de Stieltjes par rapport à la dérivée de la sollicitation



$$\varepsilon = \sum_i \Delta\varepsilon_i$$

$$\varepsilon = \int_0^t \frac{d\varepsilon_i}{dt'} \cdot dt'$$

- ✓ Viscoelastic response is history-dependent
- ✓ Relaxation function r dictates time-domain response



$$\sigma = \sum_i \Delta\sigma_i = \sum_i \Delta\varepsilon_i \cdot r\ (t - t_i)$$

$$\sigma = \int_0^t \frac{d\sigma_i}{dt} \cdot dt = \int_0^t \frac{d\varepsilon}{dt'} \cdot r\ (t - t') \cdot dt'$$

Comportement viscoélastique linéaire

Pour le matériau non-vieillissant (c'est-à-dire ses propriétés mécaniques n'évoluent pas avec le temps), la fonction de retard et de relaxation sont exprimées sous la forme

$$J(t_0,t) = f(t-t_0) \qquad \text{ou} \qquad R(t_0,t) = r(t-t_0)$$

Les deux fonctions de retard *f* et de relaxation *r* vérifient :

$$f(0)r(0) = 1; \qquad f(\infty)r(\infty) = 1;$$

La superposition donne la solution:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(\tau,t)\sigma'(\tau)d\tau = \sigma(t)J(t,t) - \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial J(\tau,t)}{\partial \tau}d\tau$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)f(0) + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\, f'(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)\, f'(t-\tau)d\tau$$

Le produit de convolution de Riemann:

$$\varepsilon = f' * \sigma \qquad \text{ou} \qquad \sigma = r' * \varepsilon$$

Comportement viscoélastique linéaire

Transformation de Laplace (s: variable dans l'espace de Laplace)

$$L\{g\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

La transformation de Laplace-Carson de la distribution g, noté g_{LC}, est la transformée de Laplace de la dérivée de g :

$$g_{LC}(s) = L\{g'\}(s) = s.L\{g\}(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

Une des propriétés essentielles de la transformation de Laplace et de Laplace-Carson concerne le changement du produit de convolution en produit :

$$L\{a*b\} = L\{a\}\,L\{b\}$$

$$(a*b')_{LC} = a_{LC}b_{LC}$$

Ainsi:

$$\varepsilon = f'*\sigma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s)}$$

Comportement viscoélastique linéaire

Nous avons une relation linéaire entre contraint-déformation dans l'espace de Laplace-Carson du matériau viscoélastique linéaire:

$$\varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s) \qquad \text{ou} \qquad \sigma_{LC}(s) = r_{LC}(s)\varepsilon_{LC}(s)$$

avec : $r_{LC}(s)\, f_{LC}(s) = 1$

Ces relations sont similaires que celles d'un matériau élastique linéaire dans l'espace de Laplace Carson (cas unidimensionnel) dont le module d'Yuoung est $E=r_{LC}(s)$.

En absence de vieillissement, la solution du problème d'évolution dans le temps (l'expérience de fluage ou de relaxation) d'un comportement linéaire du matériau est identique à une équation de comportement élastique linéaire dans l'espace de Laplace-Carson

Comportement viscoélastique linéaire

Théorème de correspondance

- Sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème statique avec les conditions aux limites invariables dans le temps d'un matériau dont le comportement évolue linéairement en fonction du temps s'écrit dans l'espace de Laplace-Carson est formellement identique à un problème d'équilibre élastique linéaire

- Si la solution explicite (analytique) du problème d'équilibre élastique linéaire existe, elle est directement appliquée pour déduire la solution du problème original d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson

- Une transformation inverse de Laplace-Carson permettra de déduire la solution cherchée dans l'espace temporel. Ce principe d'application de la solution du problème élastique linéaire pour déduire la solution du problème d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson est connu sous le nom de théorème de correspondance.

Comportement viscoélastique linéaire: extension dans le cas 3D

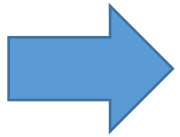
- Dans le cas général en 3D, les expressions de contrainte et de déformation seront écrites sous la forme tensorielle. A titre d'exemple, les expériences de retard et de relaxation seront reformulées sous formes :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}(t) = \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}(t_0,t) : \underline{\underline{\sigma}}^0 = \underline{\underline{\underline{\underline{f}}}}(t-t_0) : \underline{\underline{\sigma}}^0 \qquad \text{ou} \qquad \underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\underline{\underline{R}}}}(t_0,t) : \underline{\underline{\varepsilon}}^0 = \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}(t-t_0) : \underline{\underline{\varepsilon}}^0$$

Le produit de convolution de Riemann:

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\underline{\underline{f}}}}'(*:)\underline{\underline{\sigma}}$$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{r}}}}'(*:)\underline{\underline{\varepsilon}}$$



La transformation de Laplace Carson:

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s) = \underline{\underline{\underline{\underline{f_{LC}}}}}(s) : \underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s)$$

$$\underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) = \underline{\underline{\underline{\underline{r_{LC}}}}}(s) : \underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s)$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{f_{LC}}}}}(s) : \underline{\underline{\underline{\underline{r_{LC}}}}}(s) = \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$$

Comportement viscoélastique linéaire: extension dans le cas 3D

- Dans le cas du matériau viscoélastique linéaire non-vieillissant isotrope, nous avons la loi de Hooke dans l'espace de Laplace-Carson :

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}} = \frac{1+\nu_{LC}}{E_{LC}} : \underline{\underline{\sigma_{LC}}} - \frac{\nu_{LC}}{E_{LC}} \left[\mathrm{tr} \underline{\underline{\sigma_{LC}}} \right] \underline{\underline{\delta}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{LC}}} = \lambda_{LC} \left[\mathrm{tr} \underline{\underline{\varepsilon_{LC}}} \right] \underline{\underline{\delta}} + 2\mu_{LC} \underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}$$

- Dans la pratique, très souvent on considère que le coefficient de Poisson du matériau est constant

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}} = \frac{1+\nu}{E_{LC}} : \underline{\underline{\sigma_{LC}}} - \frac{\nu}{E_{LC}} \left[\mathrm{tr} \underline{\underline{\sigma_{LC}}} \right] \underline{\underline{\delta}}$$

$$\underline{\underline{\sigma_{LC}}} = \lambda_{LC} \left[\mathrm{tr} \underline{\underline{\varepsilon_{LC}}} \right] \underline{\underline{\delta}} + 2\mu_{LC} \underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}$$

avec : $$2\mu_{LC} = \frac{E_{LC}}{1+\nu}, \quad 3\lambda_{LC} + 2\mu_{LC} = \frac{E_{LC}}{1+2\nu}$$

Comportement viscoélastique linéaire: extension dans le cas 3D

Théorème de correspondance

- sous les conditions aux limites S_U et S_T qui sont indépendantes de temps *t*

$$S_U \cap S_T = 0, \quad S_U \cup S_T = \partial\Omega$$

- les équations du problème d'équilibre mécanique dans l'espace de Laplace-Carson

$$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) + \rho \underline{F_{LC}}(s) = 0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi_{lC}}}(s) + {}^{t}\,\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi_{lC}}}(s) \right]$$

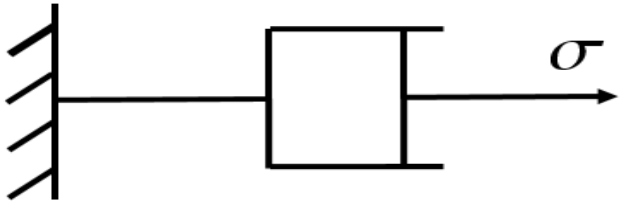
$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s) = \frac{1+\nu}{E_{LC}} : \underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) - \frac{\nu}{E_{LC}} \left[\mathrm{tr}\,\underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) \right] \underline{\underline{\delta}}$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

- Pour décrire le comportement viscoélastique des matériaux, plusieurs ***modèles rhéologiques qui sont construits de manière empirique***, ont été présentés dans la littérature. Le mot ***Rhéologie*** initialement proposé par Bingham en 1922 est utilisé de nos jours comme ***la science des déformations et des écoulements de la matière***. La recherche de la rhéologie consiste donc à décrire le comportement des matériaux à l'état solide, à l'état fluide et lors de transitions entre ces deux états.

- De manière général, ***les modèles rhéologiques*** utilisés en viscoélasticité linéaire pour le matériau non vieillissant ***sont construits à partir de l'ensemble de deux éléments de base***: ***un ressort pour présenter le comportement élastique linéaire*** et ***un amortisseur pour caractériser le comportement visqueux linéaire***.

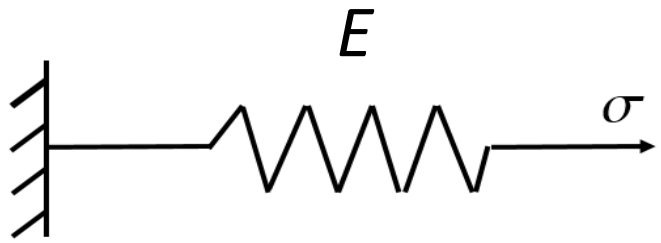




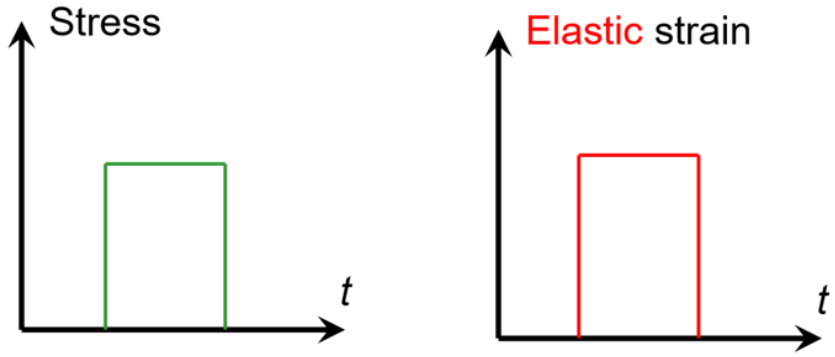
Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

- Le modèle du ressort dont la raideur constante *E* est utilisé pour présenter le comportement élastique linéaire du matériau

$$\sigma(t) = E.\varepsilon(t)$$



- En utilisant ce modèle de ressort, on obtient les fonctions de retard et de la relaxation pour les essais de fluage et de relaxation dans l'espace du temps et l'espace de Laplace-Carson comme les suivantes :



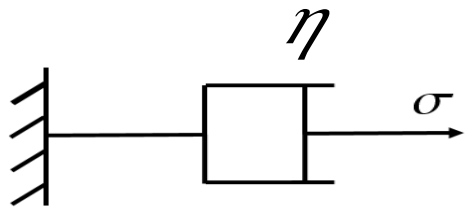
$$\varepsilon = f\,'*\sigma \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s)$$

$$f(t) = \frac{Y(t)}{E}, \quad f_{LC} = \frac{1}{E}$$

$$r(t) = E.Y(t), \quad r_{LC} = E$$

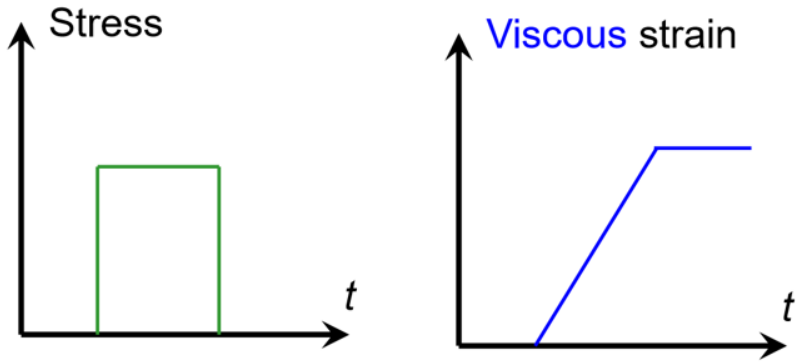
Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

- Le comportement visqueux linéaire est modélisé par l'amortisseur dont le coefficient de viscosité indépendant du temps η est définit à partir de la relation entre la contrainte et la vitesse de déformation (ou dérivée de la déformation par rapport au temps):



$$\sigma(t) = \eta.\varepsilon'(t)$$

- En utilisant ce modèle de l'amortisseur, on obtient les fonctions de retard et de la relaxation pour les essais de fluage et de relaxation dans l'espace du temps et l'espace de Laplace-Carson comme les suivantes :



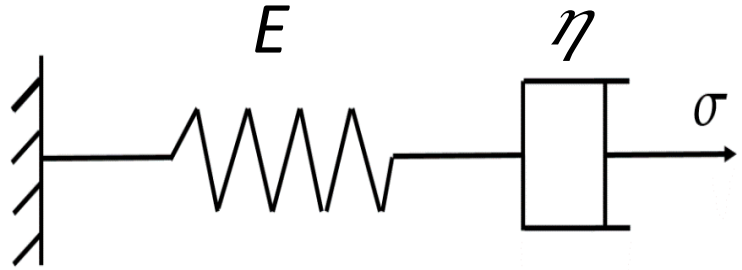
$$\varepsilon = f'*\sigma \qquad \text{ou} \qquad \varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s)$$

$$f(t) = \frac{t.Y(t)}{E}, \quad f_{LC} = \frac{1}{\eta.s}$$

$$r(t) = \eta.s, \quad r_{LC} = \eta.\delta$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Maxwell



- Le modèle de Maxwell est constitué d'un ressort relié en série avec un amortisseur

- En utilisant ce modèle pour l'essai de fluage

$$\varepsilon'(t) = \dot{\varepsilon_e}(t) + \dot{\varepsilon_v}(t) = \frac{\sigma'(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{LC} = \frac{\sigma_{LC}}{E} + \frac{\sigma_{LC}}{s.\eta} = \sigma_{LC}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta}\right) = f_{LC}\sigma_{LC}$$

+ fonction de retard:

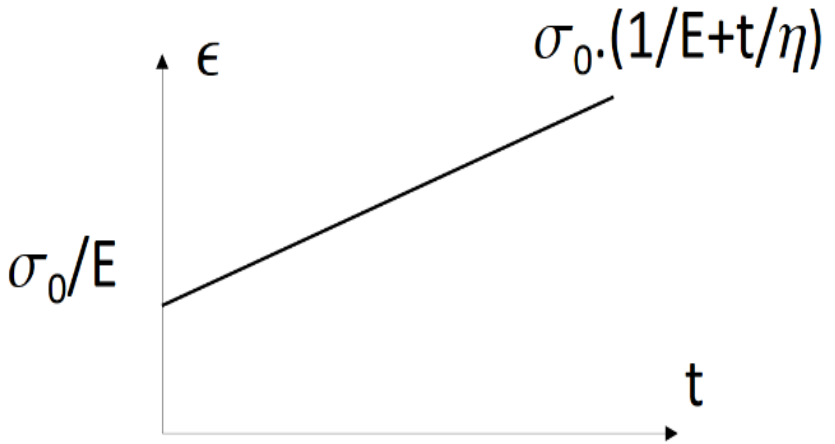
$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta} \quad \Rightarrow \quad f(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$$

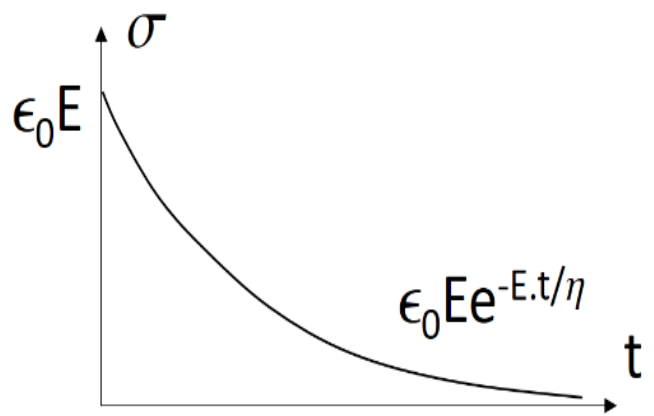
Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Maxwell

+ fonction de relaxation: $r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s.\eta}{\eta s + E}$ ⟹ $r(t) = E.e^{-\frac{E.t}{\eta}}$

+ Réponse aux essais de fluage et de relaxation: instantanée avec *r(t=0)=E* ou *f(0)=1/E*





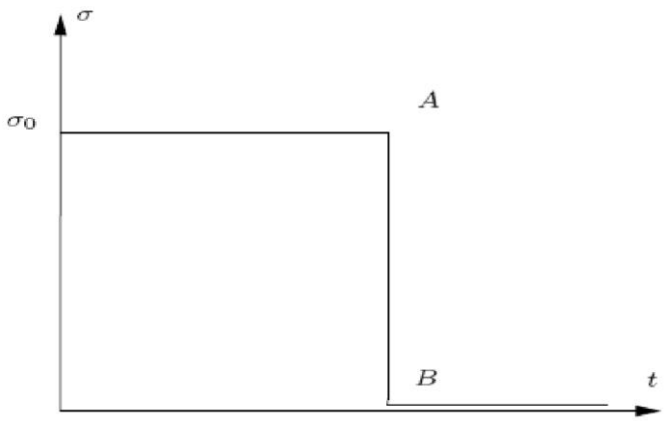
+ à l'infini: t->∞, nous avons: *f(t->∞) -> ∞* et *r(t->∞) -> 0*

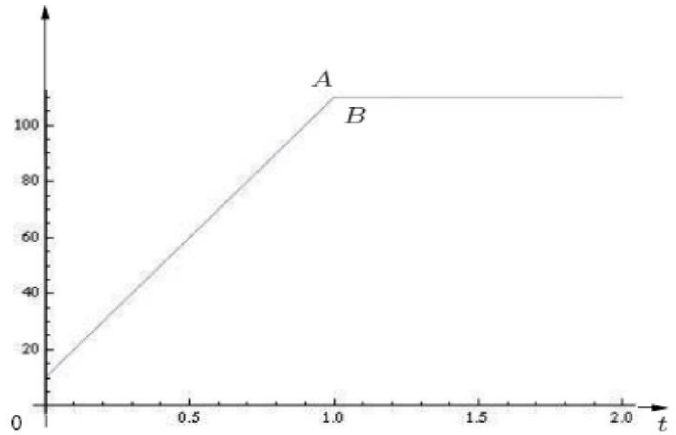
Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Maxwell

+ Réponse à l'essai de recouvrance:

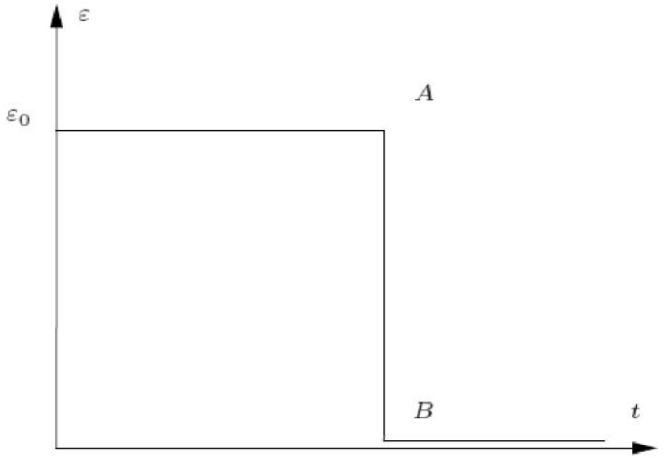
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{E}\left(1 + \dfrac{t}{\tau}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ \varepsilon(T) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

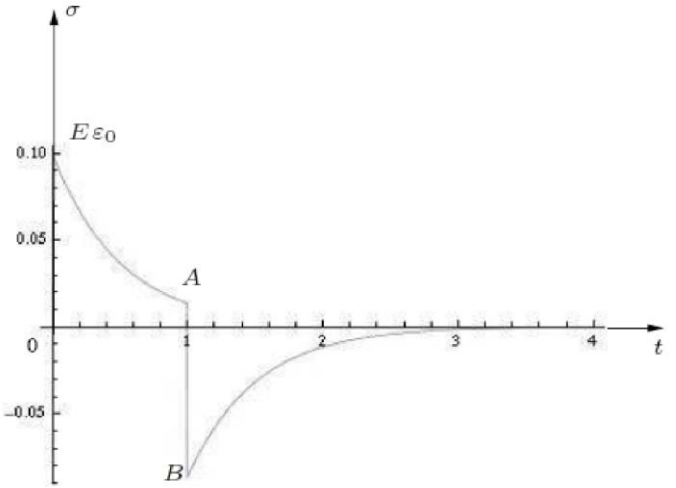




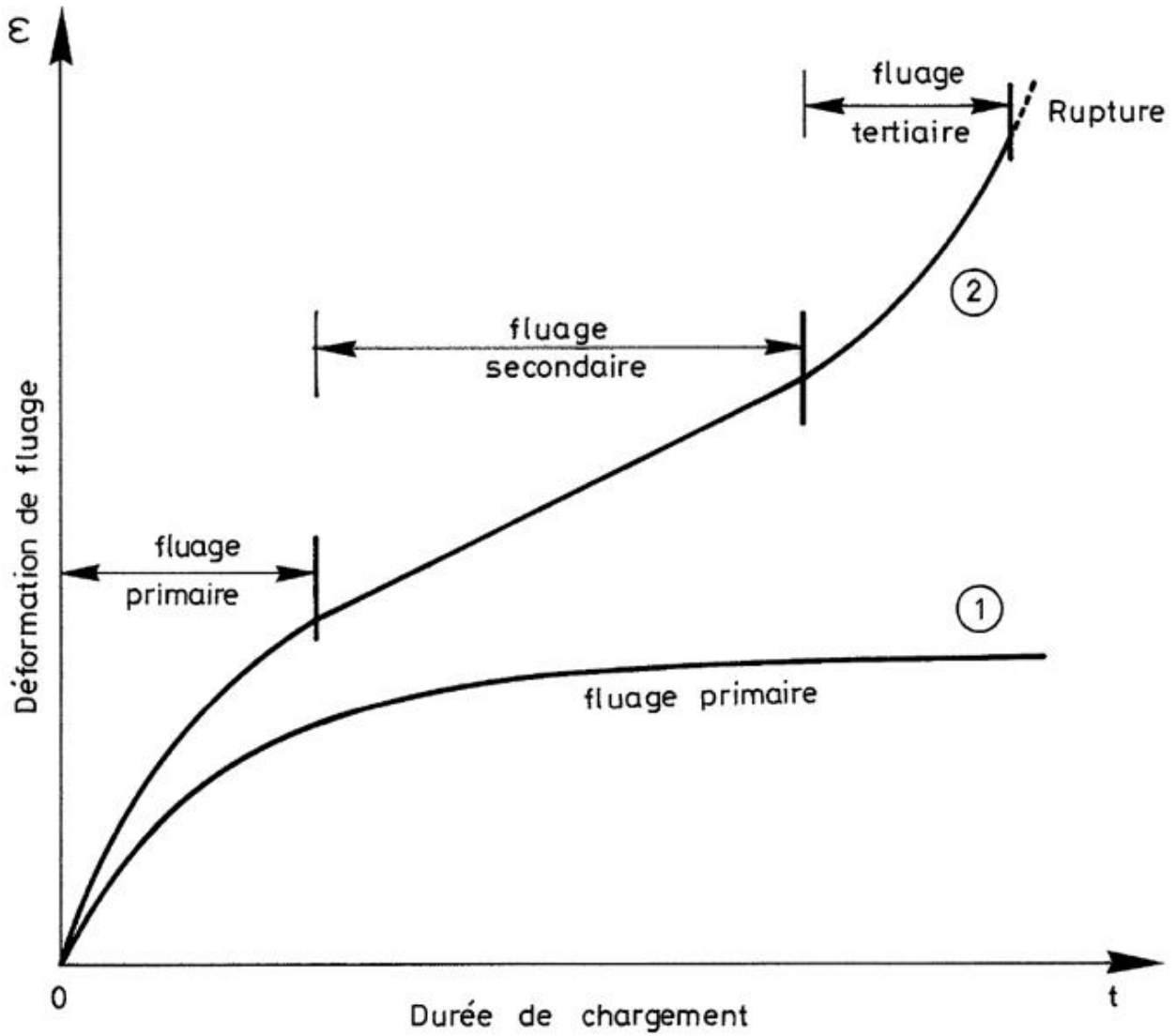
+ Réponse à l'essai d'effacement:

$$\sigma(t) = \begin{cases} E\varepsilon_0 \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right) & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ E\varepsilon_0 \left[\exp\left(-\dfrac{T}{\tau}\right) - 1\right] \exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$



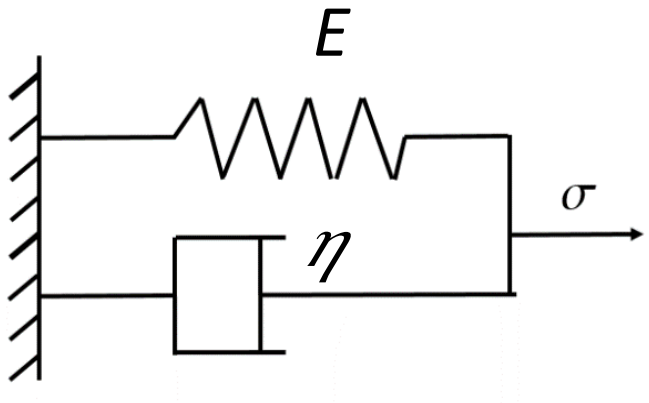


Résultats d'essai de fluage



Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin



- Le modèle de Kelvin est constitué d'un ressort relié en parallèle avec un amortisseur

- En utilisant ce modèle pour l'essai de relaxation:

$$\sigma(t) = \sigma_e(t) + \sigma_v(t) = E\varepsilon(t) + \eta.\varepsilon'(t) \Rightarrow \frac{\sigma_{LC}}{s} = E\frac{\varepsilon_{LC}}{s} + \eta\varepsilon_{LC} = \varepsilon_{LC}\left(\frac{E}{s} + \eta\right) = \frac{r_{LC}.\varepsilon_{LC}}{s}$$

+ fonction de relaxation:

$$r_{LC} = E + \eta s \Rightarrow r(t) = E.Y(t) + \eta.\delta(t)$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin

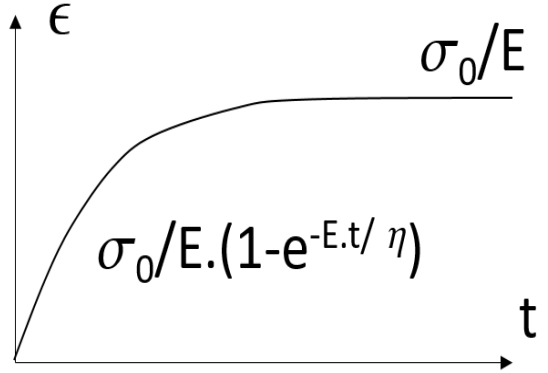
+ fonction de retard:

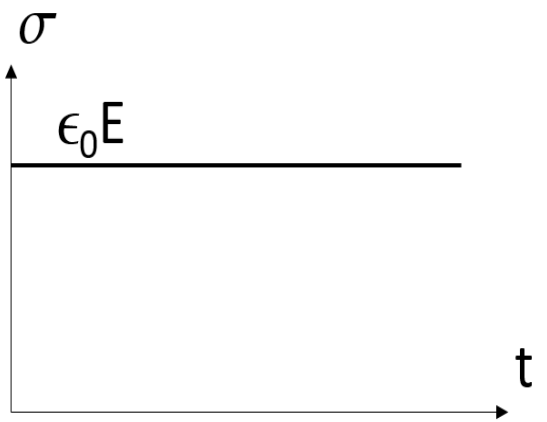
$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{1}{\eta s + E}, \quad f(t) = \frac{1}{E}(1 - e^{-\frac{E}{\eta}t})$$

+ Réponse aux essais de fluage et de relaxation

+ A l'instant t=0: f(t)=0 ce type de matériau n'a pas d'élasticité instantanée

+ A l'infini (t->∞): ϵ(t->∞)=σ_0/E (assai de fluage) alors σ(t)=ϵ_0.E (essai de relaxation).



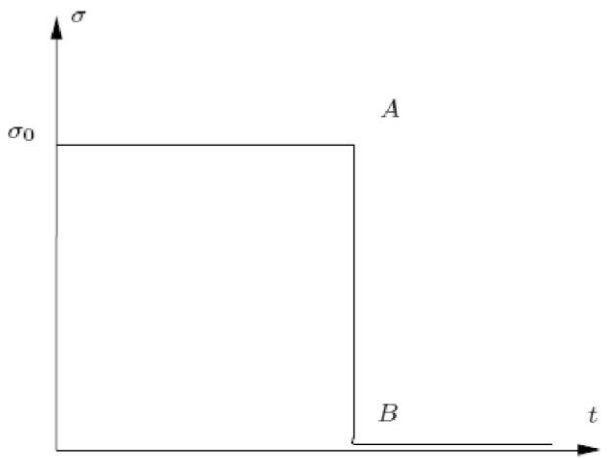


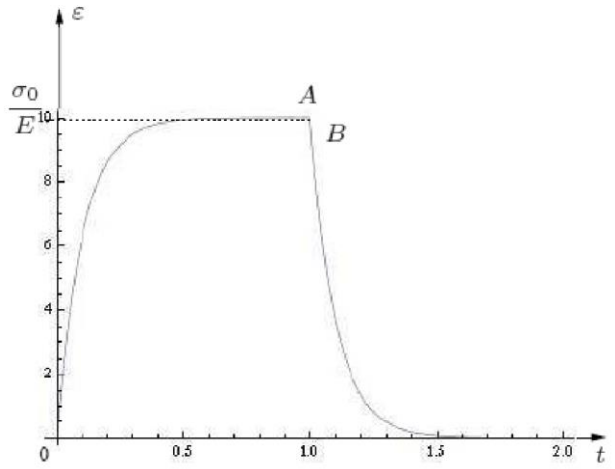
Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin

+ Réponse à l'essai de recouvrance:

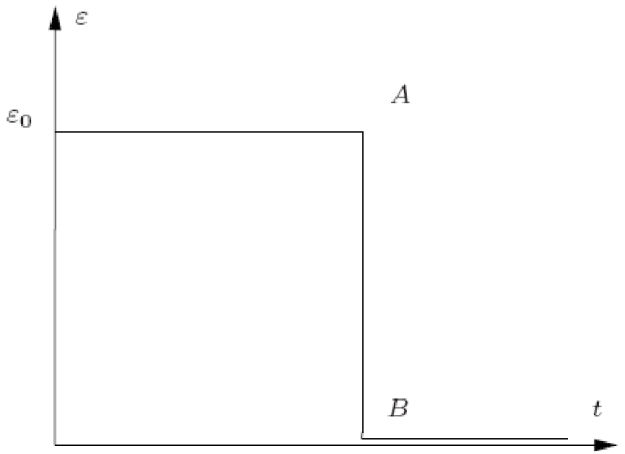
$$\varepsilon(t) = \begin{cases} \dfrac{\sigma_0}{E}\left[1 - \exp\left(-\dfrac{t}{\tau}\right)\right] & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ \varepsilon(T)\exp\left(-\dfrac{t-T}{\tau}\right) & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

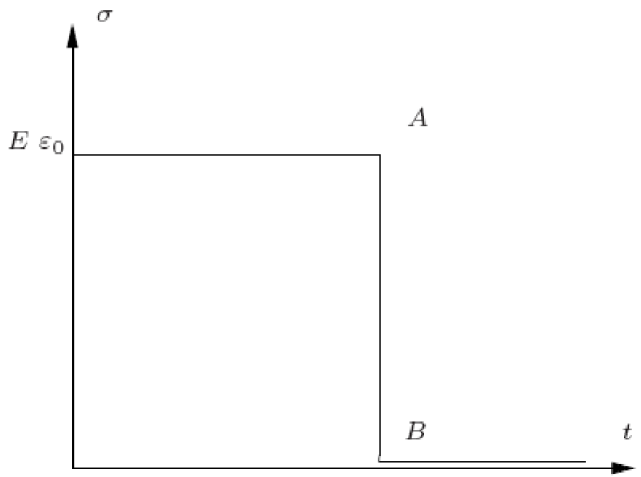




+ Réponse à l'essai d'effacement:

$$\sigma(t) = \begin{cases} E.\epsilon_0 & \text{si} \quad 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{si} \quad t > T \end{cases}$$

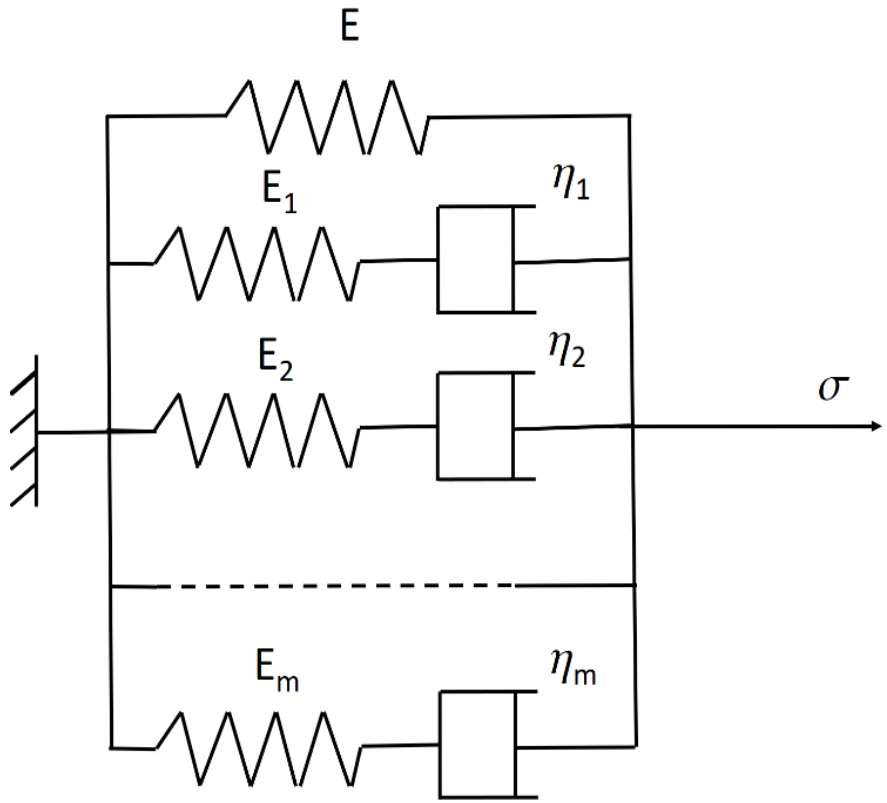




Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Maxwell généralisé

- Le modèle de Maxwell généralisé constitue d'un ressort et de *m* modèles de Maxwell assemblés en parallèle



- En utilisant ce modèle pour l'essai de relaxation:

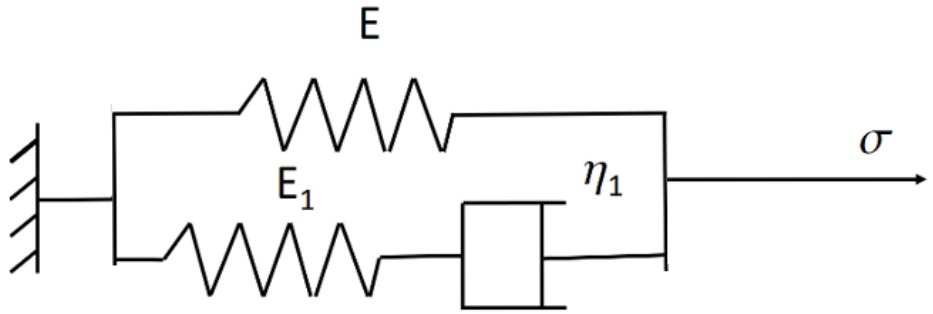
$$\sigma = \sigma^{E} + \sum_{i=1}^{m} \sigma^{M_i}$$

$$r_{LC} = r_{LC}^{E} + r_{LC}^{M_i} = E + \sum_{j=1}^{m} \frac{E_j s}{s + \frac{E_j}{\eta_j}} \quad \Rightarrow \quad f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} \quad \xrightarrow{\text{Laplace inverse}} \quad f(t), r(t)$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Zener (cas particulier du modèle de Maxwell généralisé avec m=1)

- Le modèle viscoélastique de Zener est obtenu par l'assemblage du modèle de Maxwell en parallèle avec un ressort.



- La fonction de relaxation dans l'espace temporelle et celui de Laplace-Carson peut être déduite par une addition des fonctions composantes du ressort et celles du modèle de Maxwell :

$$r_{LC} = r_{LC}^{E} + r_{LC}^{M_1} = E + \frac{E_1 s \eta_1}{\eta_1 s + E_1} \quad \Rightarrow \quad r(t) = E + E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta_1}}$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Zener

- La fonction de retard:

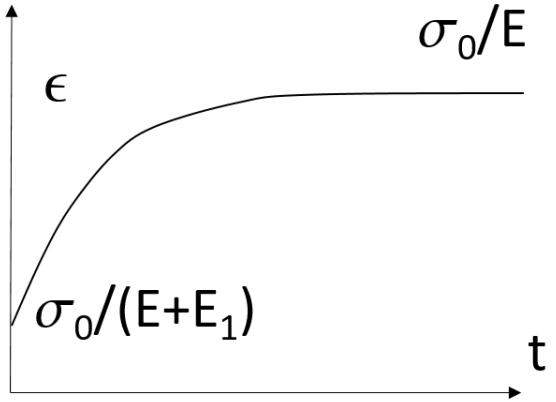
$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{E_1 + \eta_1 s}{\eta_1 s(E + E_1) + E_1 E}$$

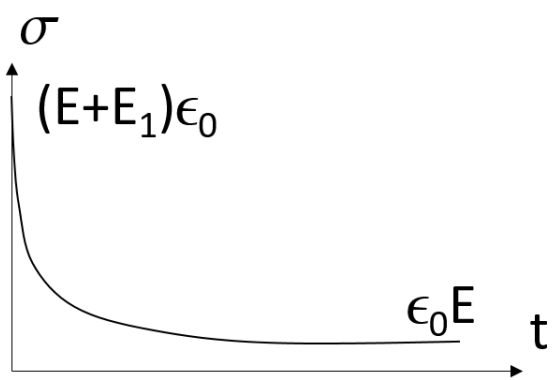
$$f(t) = \frac{1}{E}\left[1 - \frac{E_1}{E + E_1} e^{-\frac{E_1 E}{(E+E_1)\eta_1} t}\right]$$

+ Réponse aux essais de fluage et de relaxation

+ A l'instant t=0: $f(t)=1/(E+E_1)=1/r(t)$

+ A l'infini (t->∞): $\epsilon()=\sigma_0/E$ (assai de fluage) alors $\sigma(t)=\epsilon_0.E$ (essai de relaxation).

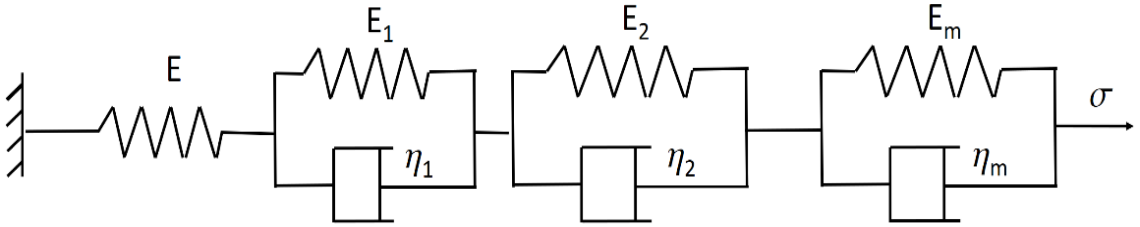




Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin généralisé

- Le modèle de Kelvin généralisé constitue d'un ressort et de *m* modèles de Kelvin assemblés en série



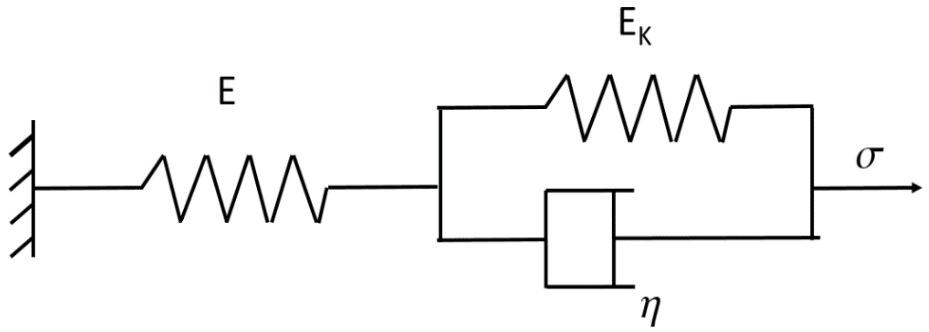
- En utilisant ce modèle pour l'essai de fluage:

$$\varepsilon = \varepsilon^{E} + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^{K_i}$$

$$f_{LC} = f_{LC}^{E} + f_{LC}^{K_i} = \frac{1}{E} + \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{1}{\eta_j s + E_j} \right) \longrightarrow r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} \xrightarrow{\text{Laplace inverse}} f(t), r(t)$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin-Voigt (cas particulier du modèle de Kelvin généralisé avec m=1)



- Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt est obtenu par l'assemblage du modèle de Kelvin en série avec un ressort.

- La fonction de retard dans l'espace temporelle et celui de Laplace-Carson peut être déduite par une addition des fonctions composantes du ressort et celles du modèle de Kelvin :

$$f(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K}(1 - e^{-\frac{E_K}{\eta}t}), \quad f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta.s}$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Kelvin-Voigt

- La fonction de relaxation :

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = E\frac{E_K + \eta.s}{E + E_K + \eta.s}$$

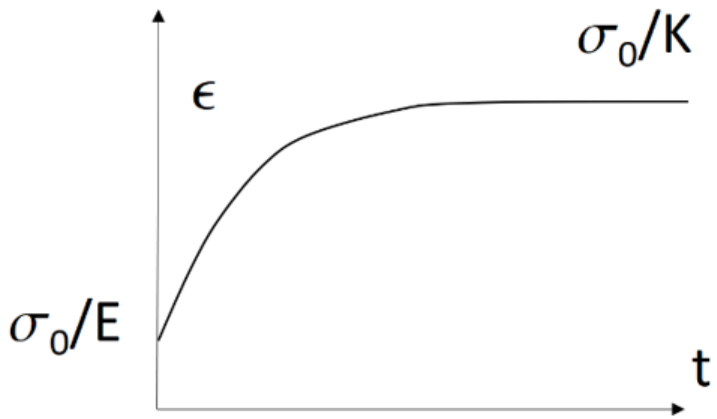
$$r(t) = \left[K + (E-K)e^{-\frac{(E+E_K).t}{\eta}} \right] Y(t)$$

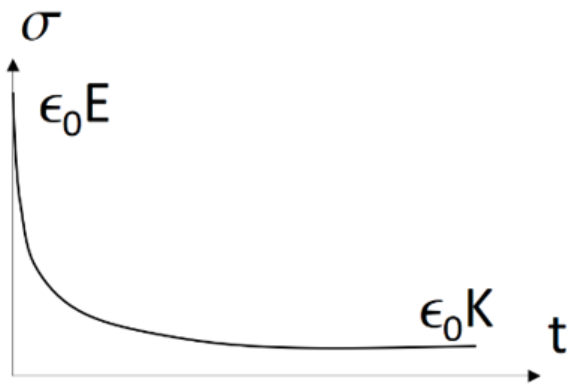
$$K = \frac{E.E_K}{E + E_K}$$

+ Réponse aux essais de fluage et de relaxation

+ A l'instant t=0: f(t)=E=1/r(t)

+ A l'infini (t->∞): $\epsilon()=\sigma_0/K$ (assai de fluage) alors $\sigma(t)=\epsilon_0.K$ (essai de relaxation).

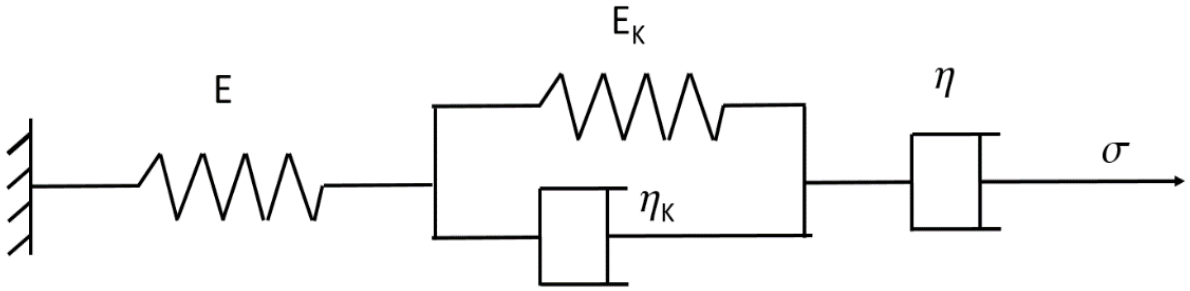




Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Burger

- Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt est obtenu par l'assemblage du modèle de Kelvin en série avec le modèle de Maxwell.



- La fonction de retard dans l'espace temporelle et celui de Laplace-Carson peut être déduite par une addition des fonctions composantes du modèle de Maxwell et celles du modèle de Kelvin :

$$f(t) = \left(\frac{1}{E} + \frac{1}{E_K}(1 - e^{-\frac{E_K}{\eta_K}t}) + \frac{t}{\eta} \right) Y(t), \quad f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta_K . s} + \frac{1}{\eta . s}$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

Modèle de Burger

- La fonction de relaxation :

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s(E_K + \eta_K.s)}{E.s + (E_K + \eta_K.s)(E/\eta + s)}$$

$$r(t) = \frac{E}{2.a}\left(a.e^{-\frac{t(b-a)}{d}} - c.e^{-\frac{t(b-a)}{d}} + a.e^{-\frac{t(b+a)}{d}} + c.e^{-\frac{t(b+a)}{d}}\right)$$

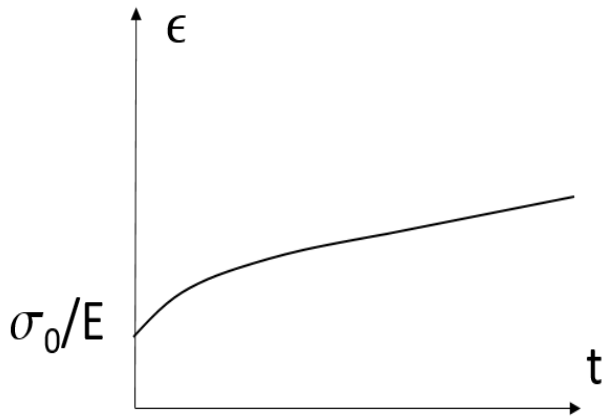
$$a = \sqrt{(E_K\eta + E(\eta + \eta_K))^2 - 4E_K E\eta_K\eta}; \quad b = E(\eta_K + \eta) + E_K\eta;$$

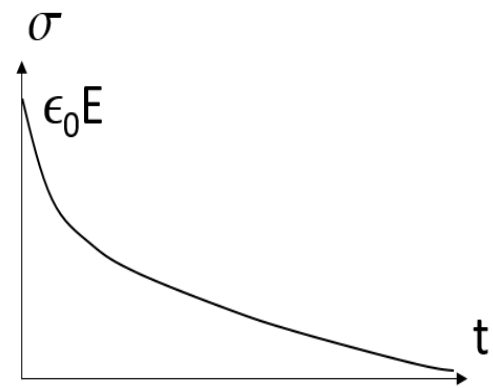
$$c = E(\eta_K + \eta) - E_K\eta; \quad d = 2\eta_K\eta;$$

+ Réponse aux essais de fluage et de relaxation

+ A t=0: *f(0)=1/E* et *r(0)=E* qui présentent en fait le comportement instantané.

+ A l'infini (t-> ∞): *f(t-> ∞)-> ∞;* (*r(t-> ∞)* ->0).



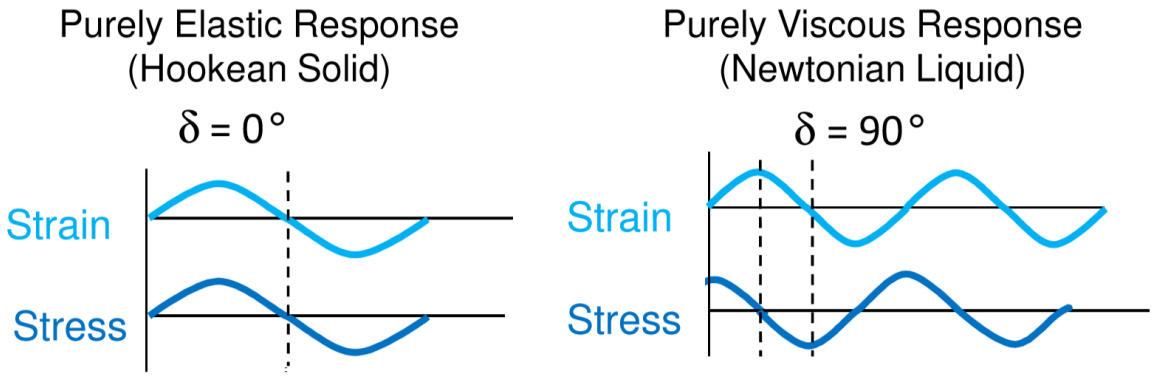


Comportement sous sollicitation harmonique. Module complexe

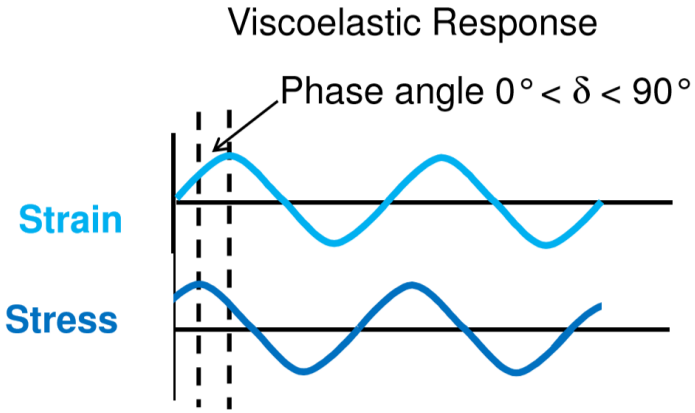
- Le comportement viscoélastique linéaire du matériau peut également être caractérisé expérimentalement en appliquant une sollicitation sinusoïdale de pulsation ω en cisaillement, flexion ou traction-compression. Le module complexe est calculé à partir de ce type de chargement.

$$\sigma(t) = \sigma^0 \sin(\omega t)$$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^0 \sin(\omega t - \varphi)$$



+ φ représente le retard de phase entre les deux signaux dû au caractère viscoélastique du matériau



Comportement sous sollicitation harmonique. Module complexe

- La sollicitation et la réponse peuvent être exprimées sous la forme complexe en posant

$$\sigma(t) = \sigma^0 e^{i\omega t}, \quad \varepsilon(t) = \varepsilon^0 e^{i\omega t - \varphi}$$

+ Le module complexe s'écrit donc sous la forme :

$$\overline{E}(\omega) = \frac{\sigma^0 e^{i\omega t}}{\varepsilon^0 e^{i\omega t - \varphi}} = \frac{\sigma^0}{\varepsilon^0} e^{i\varphi} = \left|\overline{E}\right| e^{i\varphi}$$

- Le module complexe peut également être décomposé en deux partie : la partie réelle E_1 est appelée le module d'élasticité et E_2 la partie imaginaire est appelée le module de perte.

$$\overline{E} = E_1 + iE_2$$

$$\tan\varphi = \frac{E_2}{E_1}$$

- On définit également la viscosité dynamique :

$$\overline{\eta} = \frac{\overline{E}}{i\omega} = \eta_1 - i\eta_2 = \frac{E_2}{\omega} - i\frac{E_1}{\omega}$$

Module complexe des modèles rhéologiques

Sollicitation harmonique: $\sigma(t) = \sigma^0 e^{i\omega t}$

Réponse:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\sigma'(\tau)\,d\tau$$

Modèle de Maxwell: $f(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} f(t-\tau)\sigma'(\tau)\,d\tau = -\frac{i\sigma^0 e^{i\omega t}(E + i\omega\eta)}{E\omega\eta}$$

$$\overline{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{-\sigma^0 e^{i\omega t} E\omega\eta}{i\sigma^0 e^{i\omega t}(E + i\omega\eta)} = \frac{Ei\omega\eta}{E + i\omega\eta}$$

Module complexe des modèles rhéologiques

Modèle Maxwell:

$$\overline{E} = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon(t)} = \frac{-\sigma^0 e^{i\omega t} E\omega\eta}{i\sigma^0 e^{i\omega t}(E + i\omega\eta)} = \frac{Ei\omega\eta}{E + i\omega\eta}$$

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s.\eta}{\eta s + E}$$

- On constate: le modèle complexe a la même forme que la fonction de relaxation dans l'espace de Laplace Carson en considérant *s=i*ω*

$$\left|\overline{E}\right| = \frac{E\omega\eta}{\sqrt{E^2 + \omega^2\eta^2}}$$

$$\varphi = \mathrm{ArcTan}\left[\frac{E}{\eta\omega}\right]$$

Module complexe des modèles rhéologiques

Modèle de Kelvin:

$$r_{LC} = E + \eta s \quad \rightarrow \quad \overline{E} = E + i\omega\eta$$

Modèle de Zener:

$$r_{LC} = E + \frac{E_1 s \eta_1}{\eta_1 s + E_1} \quad \rightarrow \quad \overline{E} = E + \frac{E_1 i\omega \eta_1}{\eta_1 i\omega + E_1}$$

Modèle de Kelvin-Voigt:

$$r_{LC} = E\,\frac{E_K + \eta.s}{E + E_K + \eta.s} \quad \rightarrow \quad \overline{E} = E\,\frac{E_K + i\omega\eta}{E + E_K + i\omega\eta}$$

Modèle de Burger:

$$r_{LC} = \frac{E.s(E_K + \eta_K.s)}{E.s + (E_K + \eta_K.s)(E/\eta + s)} \quad \rightarrow \quad \overline{E} = \frac{E.i\omega(E_K + \eta_K.i\omega)}{E.s + (E_K + \eta_K.i\omega)(E/\eta + i\omega)}$$

Module complexe des modèles rhéologiques

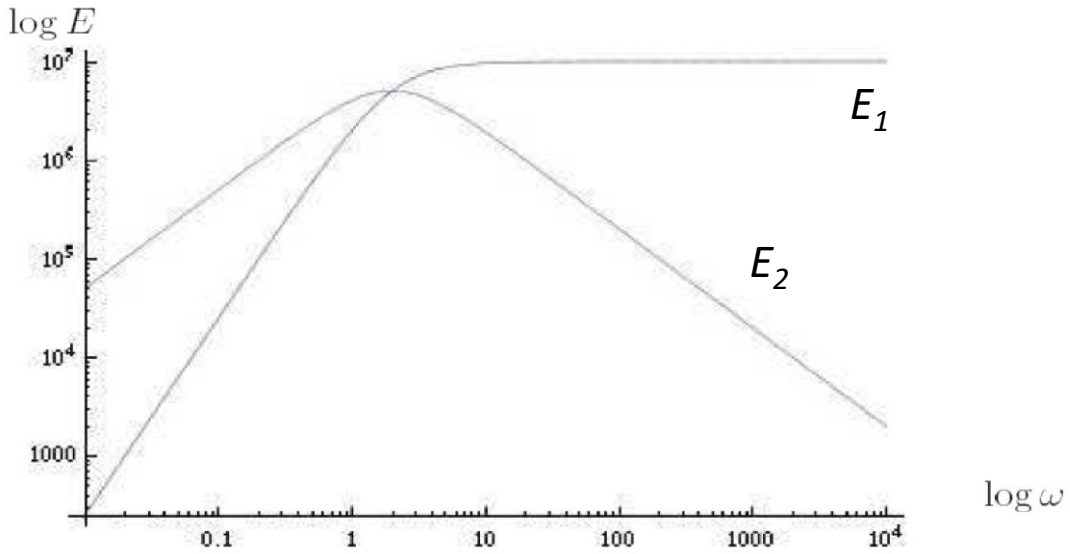
$$\overline{E} = E_1 + iE_2$$

La partie réelle E_1 est appelée le module d'élasticité et E_2 la partie imaginaire est appelée le module de perte.

Modèle Maxwell:

$$E_1(\omega) = E\frac{\omega^2\lambda^2}{1+\omega^2\lambda^2}, \qquad \lambda = \frac{\eta}{E}$$

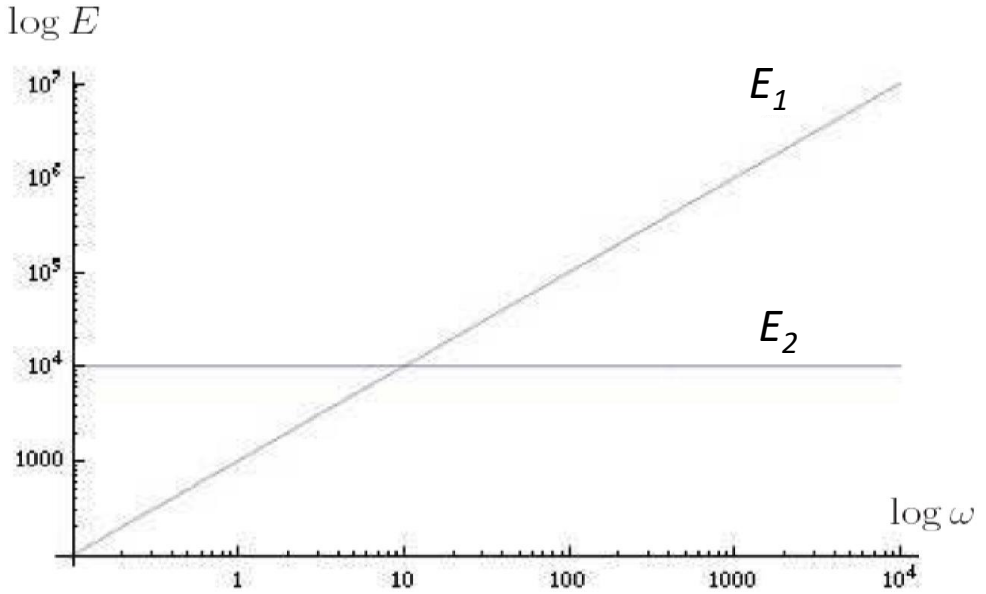
$$E_2(\omega) = E\frac{\omega\lambda}{1+\omega^2\lambda^2},$$



Modèle de Kelvin:

$$E_1 = E$$

$$E_2(\omega) = \omega\eta$$



Module complexe des modèles rhéologiques

D'un point de vue énergétique:
W: énergie stockée (énergie élastique)
ΔW: énergie perdue (convertie en chaleur par la friction moléculaire provoquant une dissipation visqueuse)

$$\overline{E} = E_1 + iE_2$$

$$W = \frac{1}{2} E_1 \varepsilon_0^2 \qquad \Delta W = \pi E_2 \varepsilon_0^2$$

$$E_1 = \frac{2W}{\varepsilon_0^2} \qquad E_2 = \frac{\Delta W}{\pi \varepsilon_0^2} \qquad \tan\varphi = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\Delta W}{2\pi W}$$

Module complexe des modèles rhéologiques

Modèle Maxwell:

$$E_1(\omega) = E\frac{\omega^2\lambda^2}{1+\omega^2\lambda^2}, \qquad \lambda = \frac{\eta}{E}$$

$$E_2(\omega) = E\frac{\omega\lambda}{1+\omega^2\lambda^2},$$

$$W = \frac{E\,\eta^2\omega^2}{2\,(E^2+\eta^2\omega^2)}\,\varepsilon_0^2$$

$$\Delta W = \frac{E^2\eta\,\omega}{E^2+\eta^2\omega^2}\,\pi\,\varepsilon_0^2$$

Modèle de Kelvin:

$$E_1 = E$$

$$E_2(\omega) = \omega\eta$$

$$W = \frac{1}{2}E\,\varepsilon_0^2$$

$$\Delta W = \pi\,\eta\,\omega\,\varepsilon_0^2$$

Comportement: viscoélastique non linéaire, élasto-viscoplastique

- Les observations au laboratoire et in-situ montrent un comportement dépendent du temps très complexe du matériau

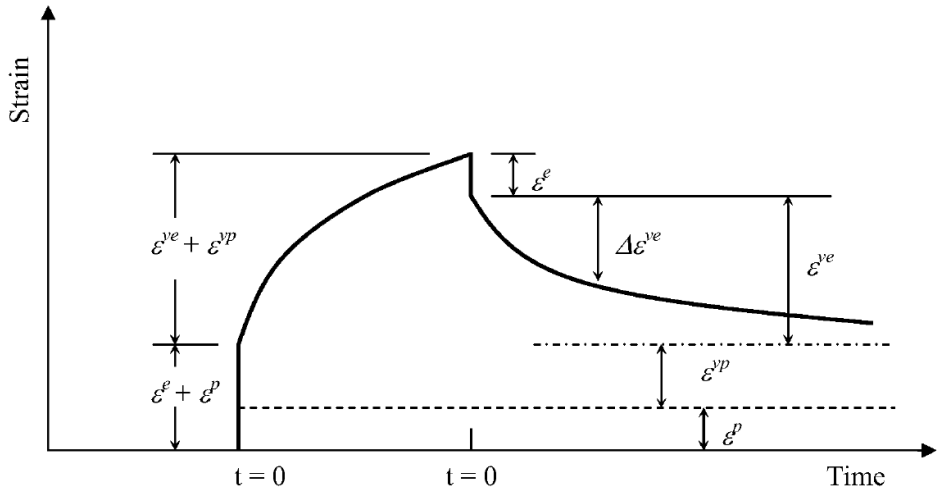
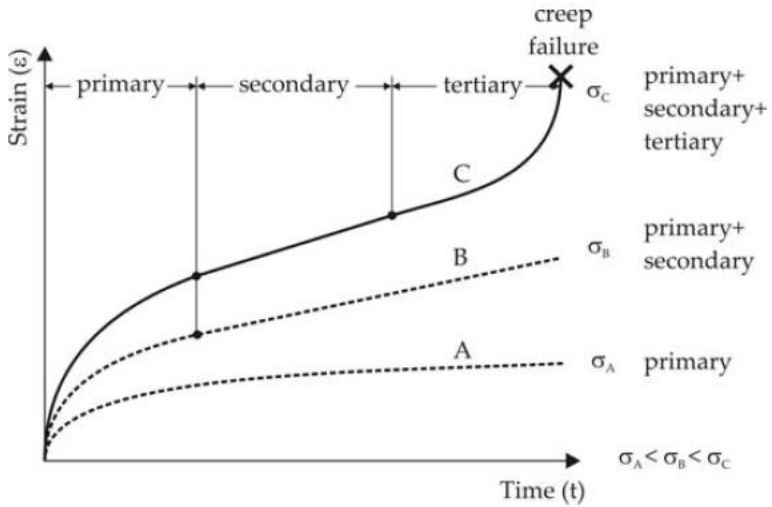
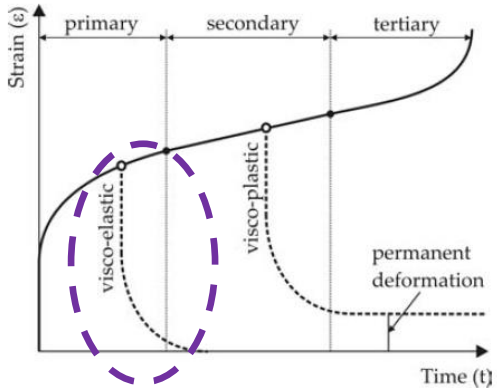
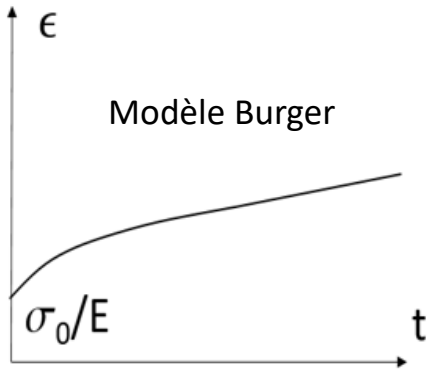


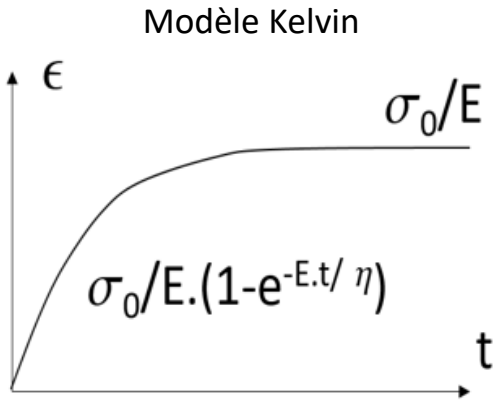
Schéma de décomposition de la déformation totale d'un matériau élasto-visco-plastique



- Les modèles viscoélastique linéaire ne permettent pas reproduire ces observations







Comportement: viscoélastique non linéaire, élasto-viscoplastique

- Modèle viscoélastique non-linéaire: modèles fractionnaires

+ Amortisseur Abel:



η, β

$$\sigma(t) = \eta^{\beta} D^{\beta}[\varepsilon(t)], \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1$$

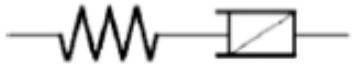
$$D^{\beta} f(t) = \frac{d^n [D^{-(n-\beta)} f(t)]}{dt^n}$$

$\sigma(t) = \sigma$ (constant stress)

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{\eta^{\beta}} \frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1$$

Fonction Gamma: $\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} dt \quad (\mathrm{Re}(\beta) > 0)$

+ Modèle Maxwell fractionnaire:

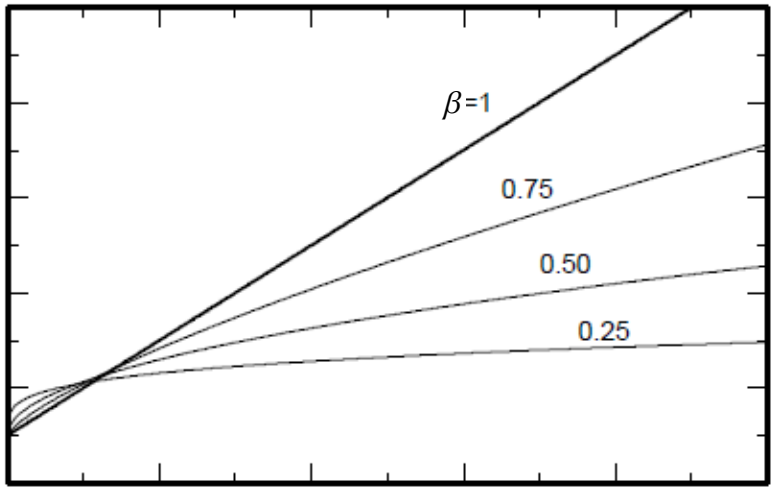


$G^M \quad \eta^M, \beta$

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_1 + \varepsilon_2(t)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma}{E}, \quad \varepsilon_2(t) = \frac{\sigma}{\eta} \frac{t^{\beta}}{\Gamma(1+\beta)}, \quad 0 \leq \beta \leq 1.$$

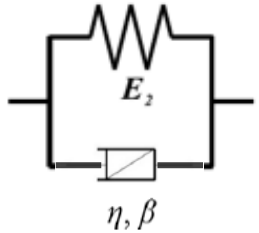
$$\varepsilon(t) = f(t).\sigma, \qquad f(t) = \frac{1}{E} + \frac{t^{\beta}}{\eta.\Gamma(1+\beta)}$$



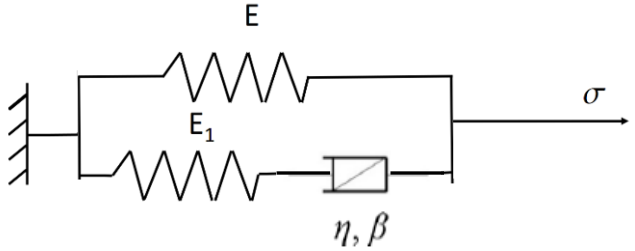
Comportement: viscoélastique non linéaire, élasto-viscoplastique

- Modèle viscoélastique non-linéaire: modèles fractionnaires

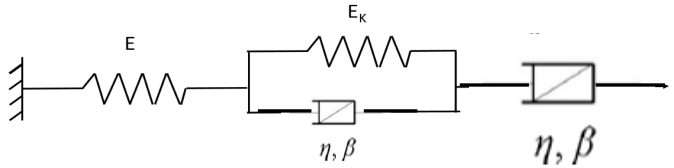
+ Modèle Kelvin fractionnaire:

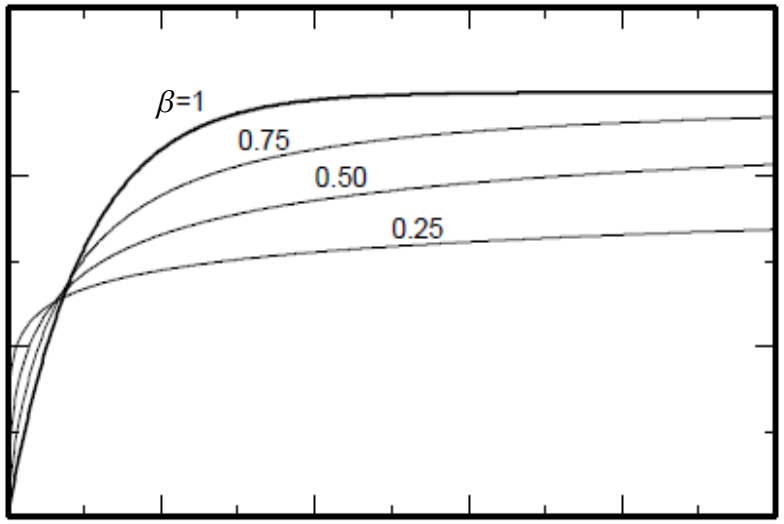


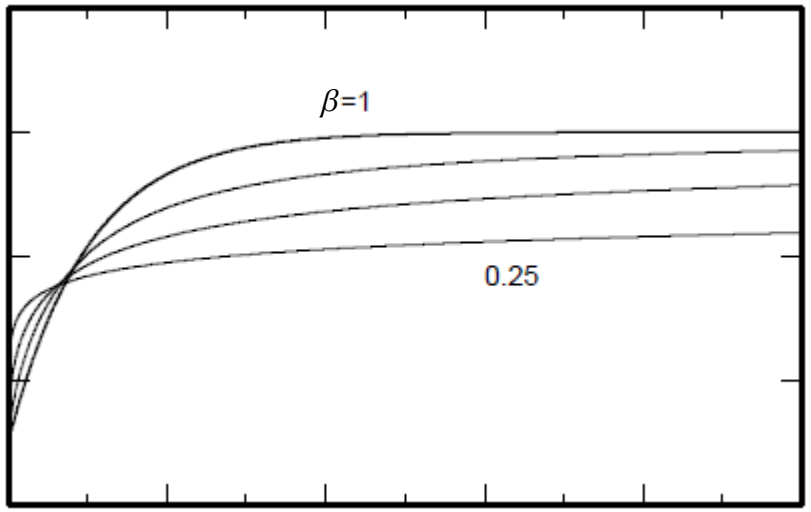
+ Modèle Kelvin-Voigt fractionnaire:

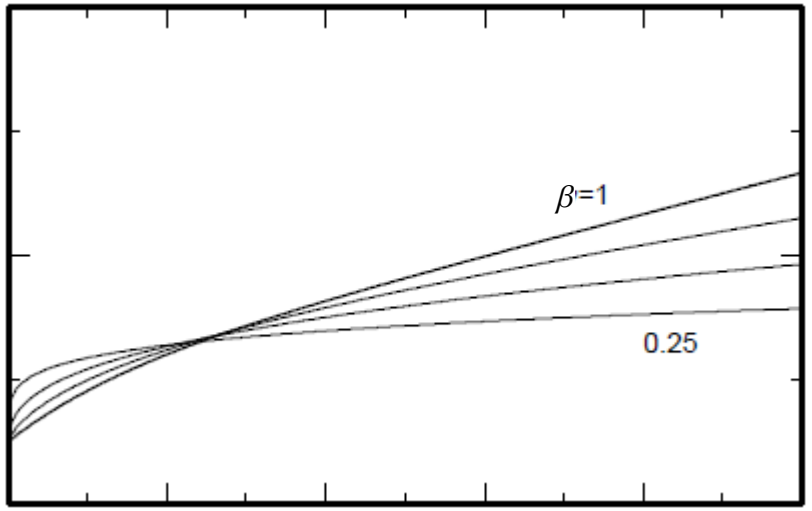


+ Modèle Burger fractionnaire:









Comportement: viscoélastique non linéaire, élasto-viscoplastique

- Modèle élasto-visco-plastique

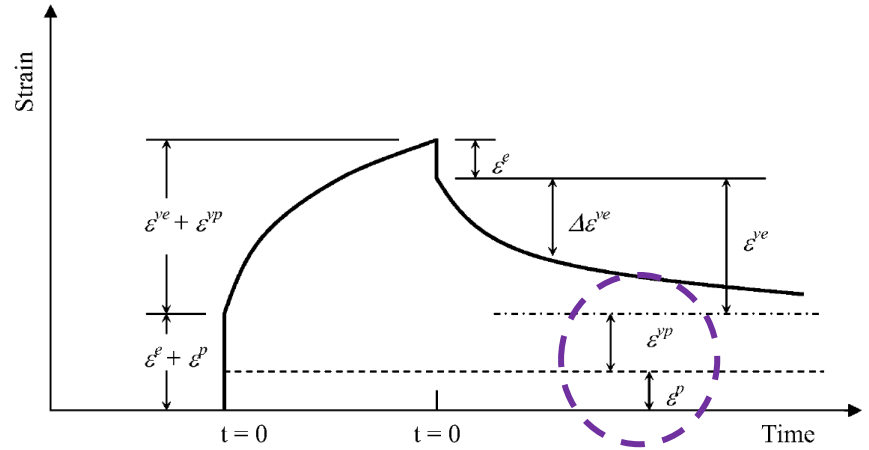
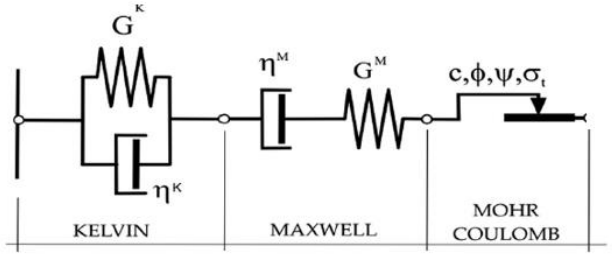


Schéma de décomposition de la déformation totale d'un matériau élasto-visco-plastique

+ Modèle CVISC: $\dot{e}_{ij} = \dot{e}^{K}_{ij} + \dot{e}^{M}_{ij} + \dot{e}^{p}_{ij}$



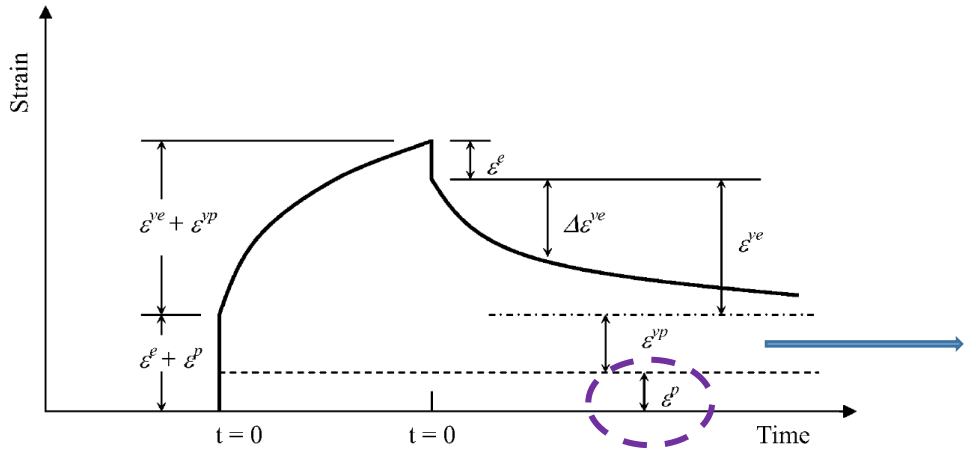
$$e^{ve}_{ij} = e^{veK}_{ij} + e^{veM}_{ij}$$

Kelvin element: $s_{ij} = 2 \cdot G^{K} \cdot e^{veK}_{ij} + 2 \cdot \eta^{K} \cdot \dot{e}^{veK}_{ij}$

Mawell element: $\dot{e}^{veM}_{ij} = \frac{\dot{s}_{ij}}{2G^{M}} + \frac{s_{ij}}{2\eta^{M}}$

The plastic strains follow the general flow rule of plasticity:

$$\dot{\varepsilon}^{p}_{ij} = \lambda \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}$$

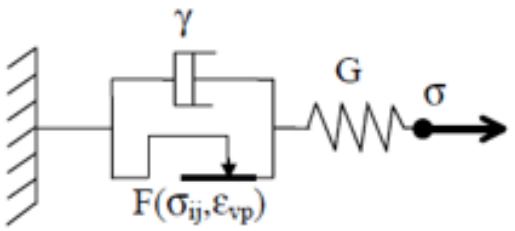


=0

Schéma de décomposition de la déformation totale d'un matériau élasto-visco-plastique

Comportement: viscoélastique non linéaire, élasto-viscoplastique

- Modèle élasto-visco-plastique à potentiel:



$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{e} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp}$$

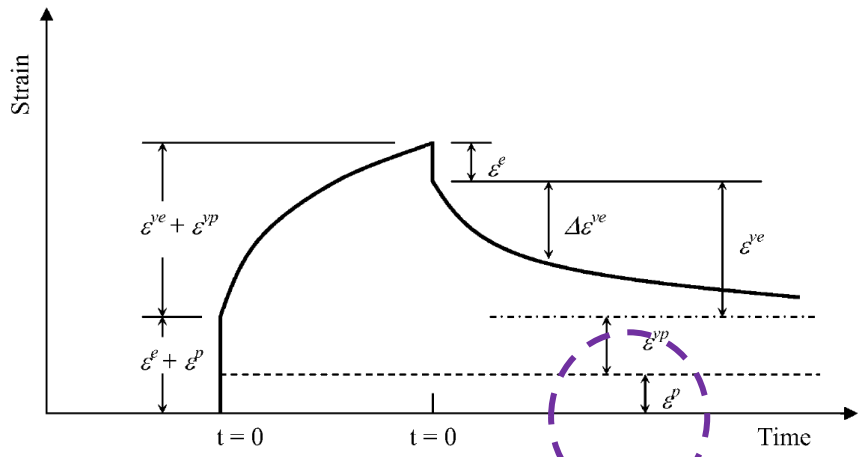


Schéma de décomposition de la déformation totale d'un matériau élasto-visco-plastique

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{vp} = \frac{\partial \Omega(\underline{\underline{\sigma}} ; \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp})}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \eta \kappa(\underline{\underline{\varepsilon}}^{vp}) < \Phi(F) > \frac{\partial F}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}$$

$\Omega(\underline{\underline{\sigma}} ; \underline{\underline{\varepsilon}}^{vp})$ *potentiel de dissipation thermodynamique*

$\Phi(F)$ désigne la *fonction d'écoulement.*

F *surface de charge limite*

η paramètre de viscosité du matériau κ fonction d'écrouissage