

TD5 : Réductions et Rice

On rappelle que l'on dispose d'une énumération des MT notée $(M_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Pour une MT M , on note f_M la fonction calculée par M .

Exercice 1. Réductions

- (1) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Un entier $i \in \mathbb{N}$.

Question : La MT M_i s'arrête-t-elle sur l'entrée i ?

- (2) (**TOTAL**) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : La machine M s'arrête-t-elle sur toutes les entrées ?

- (3) Montrer que $\begin{cases} A = \emptyset \Leftrightarrow \forall B \neq \Sigma^*, A \leq_m B \\ A = \Sigma^* \Leftrightarrow \forall B \neq \emptyset, A \leq_m B \end{cases}$

- (4) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : Existe-t-il une entrée u telle que M passe par chacun de ses états non terminaux au cours de son calcul sur l'entrée u ?

- (5) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : La MT M accepte-t-elle tous les palindromes ?

- (6) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Des entiers i, j et k .

Question : Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_k(n) = f_i(n) + f_j(n)$?

Ou de manière équivalente, le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Des MT M, N et P .

Question : Existe-t-il $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_P(n) = f_M(n) + f_N(n)$?

- (7) Pour toute MT M , on note $L_{33}(M)$ le langage des mots acceptés en au plus 33 étapes. Discuter du caractère récursif de $L_{33}(M)$ en fonction de M .

Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : Le langage $L_{33}(M)$ est-il vide ?

Indice : Quel est l'espace qui peut être visité par M en 33 étapes ?

Exercice 2. Théorème de Rice

- (1) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : A-t-on (M accepte 7 $\Leftrightarrow M$ accepte 49) ?

- (2) (**CO-FINI**) Le problème suivant est-il décidable ?

Entrée : Une MT M .

Question : La MT M s'arrête-t-elle partout sauf sur un nombre fini d'entrées ?

On pourra commencer par montrer que le problème suivant est indécidable :

Entrée : Une MT M .

Question : Le complémentaire du langage reconnu par M est-il fini ?