Lois de probabilités usuelles

Dans ce document, nous rappelons succintement les différentes lois usuelles, discrètes ou continues.

1 Lois discrètes

1.1 Loi de Bernoulli : $\mathcal{B}(p)$

On dit que X suit une loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$et on note $X \sim \mathcal{B}(p)$ si
· le support de la loi est $\{0,1\}$ (X est à valeurs dans $\{0,1\}$).

· La loi de probabilité est :

$$\mathbb{P}(X=1)=p\ ,\ \mathbb{P}(X=0)=1-p.$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X]=p.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X]=p(1-p).$$

Modélisation : La loi de Bernoulli est utilisée pour modéliser une expérience aléatoire à 2 issues.

1. Succès dans un jeu binaire. Exemple : pile/face ; $X=1$ si pile, $X=0$ si face.
2. Réponse oui/non à un sondage ; $X=1$ si une personne est favorable, $X=0$ sinon.

1.2 Loi binômiale $\mathcal{B}(n,p)$

On dit que X suit une loi binômiale de paramètres $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [0,1]$ et on note $X \sim B(n,p)$ si
· le support de la loi est $\{0,1,\dots n\}$ (X est à valeurs dans $\{0,1,\dots,n\}$).

· La loi de probabilité est, pour tout $k \in \{0,1,\dots,n\}$:

$$\mathbb{P}(X=k)=\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)p^k(1-p)^{n-k}.$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X]=np.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X]=np(1-p).$$

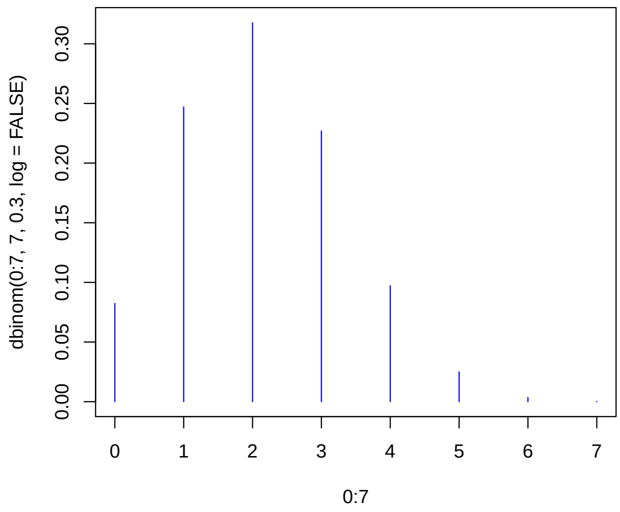
Modélisation : Une variable aléatoire de loi binômiale peut s'écrire comme une somme de variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre.

1. La Binômiale représente donc le nombre de succès (de 1) dans une épreuve de Bernoulli répétée n fois indépendamment. Exemple : v.a. donnant le nombre de "Pile" sur n lancers d'une pièce dont la probabilité de "Pile" est p : $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.
2. Comptage d'un caractère dans un tirage avec remise.
   Exemple : on tire d'un lot n pantalons, on note p la probabilité qu'il soit défectueux. Soit X la v.a. comptant le nombre de défectueux parmi les n, $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

Commandes R

On trace un diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{B}(7,0.1)$

```
>plot(0:7,dbinom(0:7,7,0.3,log=FALSE),type='h',col="blue")
```



1.3 Loi géométrique $\mathcal{G}(p)$

On dit que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in [0,1]$ et on note $X \sim \mathcal{G}(p)$ si

· le support de la loi est $\mathbb{N}$.

· La loi de probabilité est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ par

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^k$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1-p}{p}.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X] = \frac{1-p}{p^2}.$$

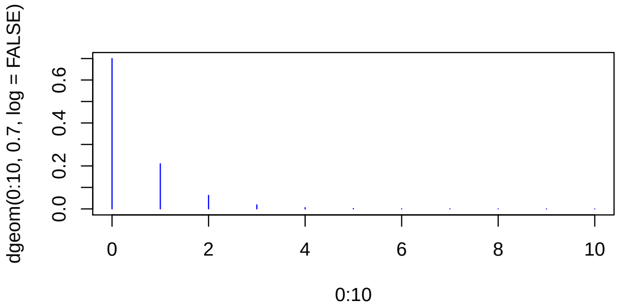
Remarque : Attention, on définit parfois la loi géométrique comme étant de support $\mathbb{N}^*$, avec loi de probabilité

$$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$

Modélisation :
Une variable aléatoire de loi géométrique représente le nombre d'échecs avant un succès (ex : essai sportif).

Commandes R
On trace un diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{G}(0.7)$

```
>plot(0:10,dgeom(0:10,0.7,log=FALSE),type='h',col="blue")
```



1.4 Loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$

On dit que X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ si
· Le support de la loi est $\mathbb{N}$.

· La loi de probabilité est donnée pour tout $k \in \mathbb{N}$ par :

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \lambda.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X] = \lambda.$$

Modélisation : La loi de Poisson est utilisée comme loi de comptage d'événéments se produisant pendant un laps de temps. Par exemple :

1. Nombre de clients entrant dans un magasin de 16h à 19h.
2. Nombre de bus passant à un arrêt en 30 mn.
3. Nombre de requêtes sur un serveur de minuit à 5h.

Commandes R

On trace un diagramme en bâtons de la loi $\mathcal{P}(4)$

```
>plot(0:10,dpois(0:10,4,log=FALSE),type='h',col="blue")
```

2 Lois continues

2.1 Loi uniforme $\mathcal{U}_{[a,b]}$

On dit que X suit une loi uniforme sur le segment $[a, b]$ et on note $X \sim \mathcal{U}[a, b]$ si
· Le support de la loi est le segment $[a, b]$.
· La densité de probabilité est :

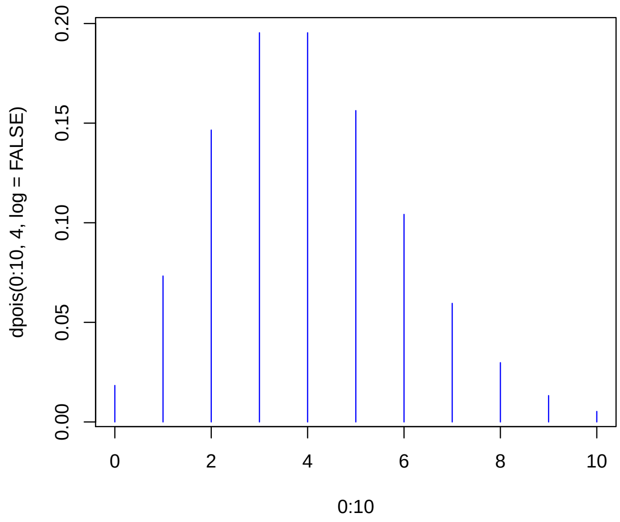
$$\begin{aligned} p(x) &= \frac{1}{b-a} \text{ si } x \in [a, b] \\ &= 0 \text{ si } x \notin [a, b] \end{aligned}$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{b-a}{2}.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X] = \frac{(b-a)^2}{6}.$$

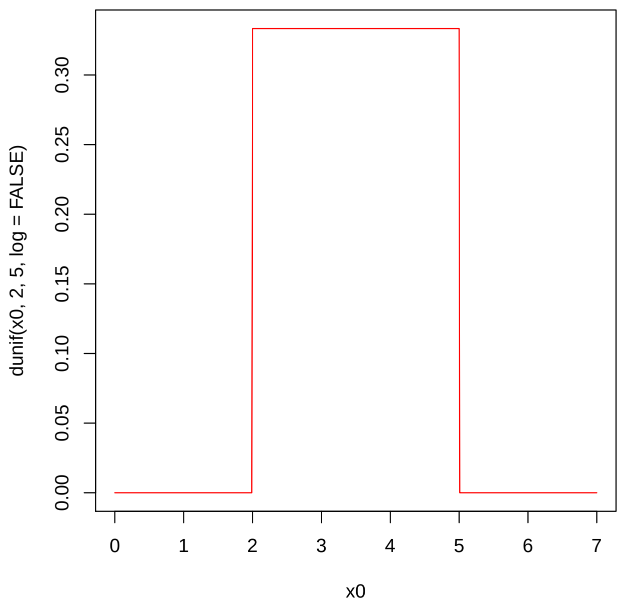


Modélisation : La loi uniforme est utilisée pour modéliser une répartition aléatoire continue uniforme sur un créneau donné.

Commandes R

On trace la densité de la loi $\mathcal{U}[2,5]$

```
>x0=seq(0,7,by=0.01)
>plot(x0,dunif(x0,2,5,log=FALSE),type='l',col="red")
```



2.2 Loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

On dit que X suit une loi normale de moyenne $m \in \mathbb{R}$ et variance $\sigma^2 \in \mathbb{R}^+$ si

· La loi est à support dans $\mathbb{R}$.

· La densité de probabilité est donnée par

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2}\frac{(x-m)^2}{\sigma^2}}$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X] = m.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X] = \sigma^2.$$

Remarque : Attention à ne pas confondre σ^2 (la variance) et σ (l'écart-type). Par exemple dans R, on précise l'écart-type.
Modélisation : La loi Gaussienne est très utilisée pour modéliser des répartitions autour d'une moyenne, en Physique, Biologie , Economie, etc...
Commandes R
On trace la densité de la loi $\mathcal{N}(0,1)$ puis $\mathcal{N}(1,4)$

```
>x1=seq(-6,6,by=0.01)
>plot(x1,dnorm(x1,0,1,log=FALSE),type='l',col="red")
>x2=seq(-5,7,by=0.01)
>plot(x2,dnorm(x2,1,2,log=FALSE),type='l',col="red")
```

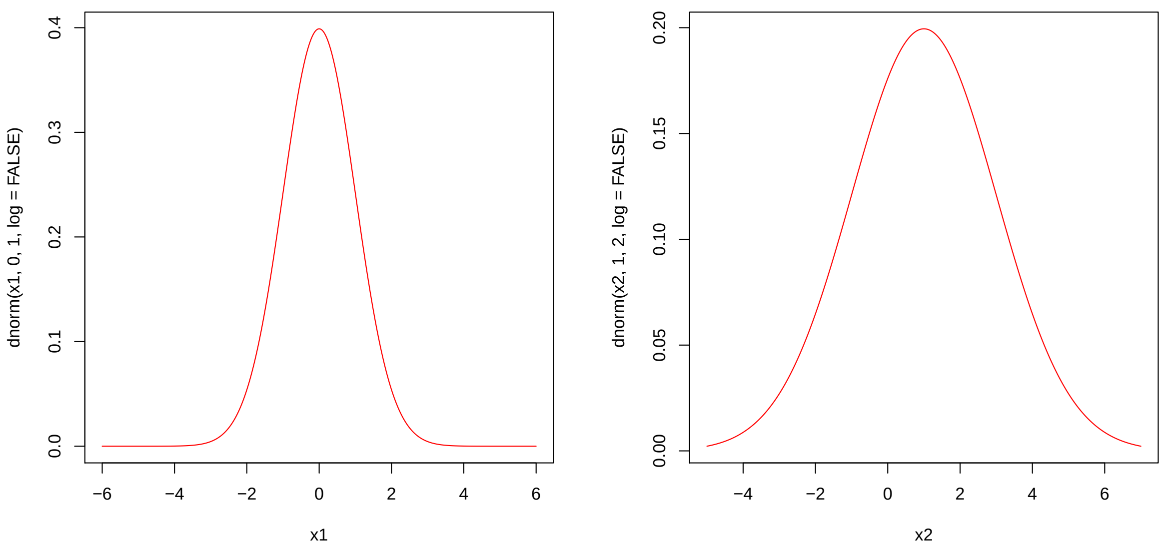


FIGURE 1 – A gauche, densité de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$. A droite, densité de la loi normale $\mathcal{N}(1,4)$ (écart-type $\sigma = 2$).

2.3 Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$

On dit que X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ et on note $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ si
Le support de la loi est : $[0, +\infty[$.
La densité de probabilité est

$$\begin{aligned} p(x) &= \lambda e^{-\lambda x} \text{ si } x \in \mathbb{R}^+ \\ &= 0 \text{ si } x < 0 \end{aligned}$$

Espérance :

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}.$$

Variance :

$$\mathbb{V}[X] = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Modélisation : La loi Exponentielle est utilisée pour modéliser des durées de vie ou des durées entre 2 phénomènes.

1. **Durée de vie** d'un composant électronique.
2. **Temps d'attente** entre :
   — l'arrivée de deux clients dans un magasin de 16h à 19h,
   — le passage de deux bus à un arrêt sur une période de temps,
   — deux requêtes sur un serveur de minuit à 5h.

Commandes R

On trace la densité de la loi $\mathcal{E}(1)$

```
>x3=seq(-2,8,by=0.01)
>plot(x3,dexp(x3,1,log=FALSE),type='l',col="red")
```