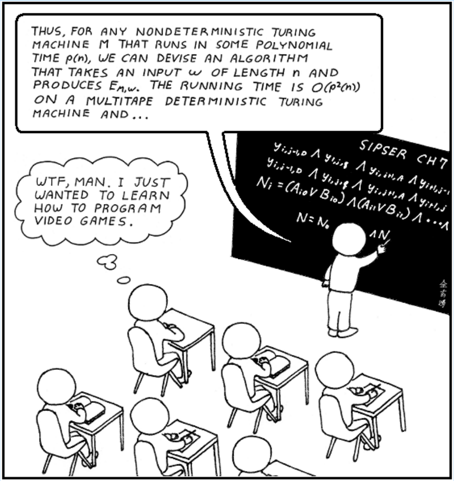
Calculabilité & Complexité

Complexité (2/4) : complexité en temps

Nicolas Ollinger (LIFO, Université d'Orléans)

M1 info, Université d'Orléans — S2 2024/2025



1. Dans l'épisode précédent. . .

Classes de complexité en temps déterministe

Hartmanis et Stearns 1965

Définition Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la classe $\mathrm{DTIME}(f(n))$ est l'ensemble des langages reconnus par une MT $\mathcal{M}$ en temps borné par $\alpha f(n)$ pour un certain α.

$$\forall u \in \Sigma^* \qquad t_{\mathcal{M}}(u) \leqslant \alpha f(|u|)$$

Définition Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions on note

$$\mathrm{DTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{DTIME}(f(n))$$

$$\mathrm{P} = \mathrm{DTIME}\left(\left\{n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

Théorème de hiérarchie

Définition Une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est **constructible en temps** s'il existe une constante α et une MT qui sur l'entrée 1^n (l'entier n en unaire) renvoie $1^{f(n)}$ (l'entier $f(n)$ en unaire) en temps $\leqslant \alpha f(n)$.

Théorème[H&S 65] Pour toute fonction f **constructible en temps**

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathrm{DTIME}(nf(n)^2)$$

Théorème[H&S 65] Pour toutes fonctions f, g **constructibles en temps** avec $f(n) \neq 0$ et $f \log f = o(g)$

$$\mathrm{DTIME}(f(n)) \subsetneq \mathrm{DTIME}(g(n))$$

P vs EXP

2. temps polynomial et exponentiel

Première séparation

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(n^k) \\ \mathrm{EXP} &= \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{DTIME}(2^{n^k}) \end{aligned}$$

Corollaire $\mathrm{P} \subsetneq \mathrm{EXP}$

Idée $\mathrm{P} \subseteq \mathrm{DTIME}(n^{\log n}) \subsetneq \mathrm{DTIME}(n^{1+\log^2 n}) \subseteq \mathrm{DTIME}(2^n) \subseteq \mathrm{EXP}$

Exemples de problèmes dans P

MULTIPLICATION D'ENTIERS

entrée :	*trois entiers a, b et k donnés en binaire*
question :	*le k^e bit de $a \times b$ vaut-il 1 ?*

ACCESSIBILITÉ

entrée :	*un graphe orienté G et deux sommets s et t*
question :	*existe-t-il un chemin de s à t dans G ?*

COUPLAGE PARFAIT

entrée :	*un graphe non orienté G*
question :	*G admet-il un couplage parfait ?*

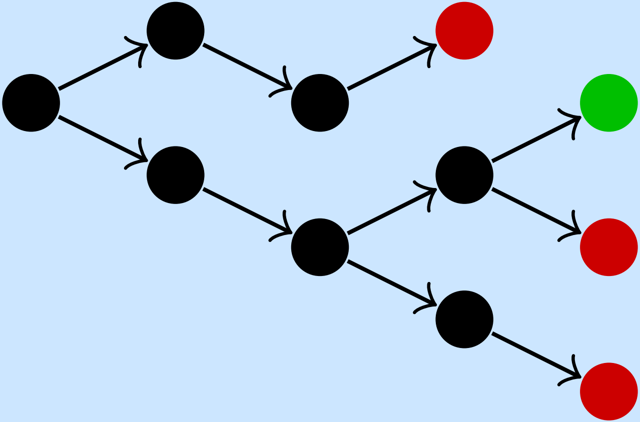
Exemples de problèmes dans EXP

RANGEMENT

entrée : *des entiers* $m, s, p_1, \ldots, p_n$ *codés en binaire*
question : *peut-on ranger les* n *objets de poids respectifs* p_i *dans* m *boîtes acceptant chacune un poids maximum* s *?*

ARRÊT EXP

entrée : *une MT* $\mathcal{M}$ *et un entier* k *en binaire*
question : *est-ce que* $\mathcal{M}$ *s'arrête sur l'entrée vide en temps* $\leqslant k$ *?*



3. Machines non-déterministes

Machines à choix multiples

Une **machine de Turing déterministe** dispose d'au plus une transition pour chaque configuration. Une **machine non déterministe** a plusieures exécutions possibles.

$$(q, \underbrace{a_0, a_1, \ldots, a_{k-2}}_{\text{lecture sur } k-1 \text{ rubans}}, q', \underbrace{b_1, b_2, \ldots, b_{k-1}}_{\text{écriture sur } k-1 \text{ rubans}}, \underbrace{\Delta_0, \ldots, \Delta_{k-1}}_{k \text{ déplacements}}) \in \delta$$

$$\delta \subseteq \Big((Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma^{k-1}\Big) \times \Big(Q \times \Gamma^{k-1} \times \{◀, ▼, ▶\}^k\Big)$$

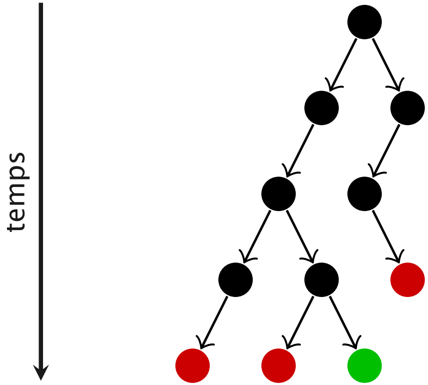
Formellement

Définition Une **MTND à k-rubans** est un tuple $(Q, \Gamma, \Sigma, \delta, q_0, B, q_a, q_r)$ où

- Q est l'ensemble fini des **états** ;
- Γ est l'**alphabet** fini de **travail** ;
- $\Sigma \subseteq \Gamma$ est l'**alphabet** fini **d'entrée** ;
- $\delta \subseteq \Big((Q \setminus \{q_a, q_r\}) \times \Gamma^{k-1}\Big) \times \Big(Q \times \Gamma^{k-1} \times \{\blacktriangleleft, \blacktriangledown, \blacktriangleright\}^k\Big)$ est la **relation de transition** ;
- $q_0 \in Q$ est l'**état initial** ;
- $B \in \Gamma \setminus \Sigma$ est le **symbole blanc** ;
- $q_a \in Q$ est l'**état d'acceptation** de la machine ;
- $q_r \in Q$ est l'**état de rejet** de la machine.

Arbre de configurations

Définition Un **calcul** d'une MTND sur une entrée $u \in \Sigma^*$ est un **arbre de configurations** obtenus en calculant toutes les transitions accessibles depuis la **configuration initiale** $c_0(u)$.



Exécutions

Définition Une **exécution** d'une MTND est un **chemin** d'un arbre de configurations : une suite de configurations compatible avec la relation de transition, d'une **configuration initiale** à une **configuration terminale**.

Temps de calcul MTND

$t_{\mathcal{M}}(u)$ = hauteur de l'arbre des configurations sur l'entrée u

$$t_{\mathcal{M}}(n) = \max_{u \in \Sigma^n} t_{\mathcal{M}}(u) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Espace de calcul MTND

$s_{\mathcal{M}}(u)$ = espace maximal utilisé par une exécution sur l'entrée u

$$s_{\mathcal{M}}(n) = \max_{u \in \Sigma^n} s_{\mathcal{M}}(u) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Langage reconnu

Définition Le **langage $L_{\mathcal{M}}$ associé** à une MTND $\mathcal{M}$ est l'ensemble des entrées pour lesquelles $\mathcal{M}$ possède un **chemin acceptant**.

Attention Un mot est accepté s'**il existe au moins un** chemin acceptant. Il est donc rejetté si **aucun** chemin n'est acceptant.

Complexité en temps non déterministe

Définition Pour toute fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la classe $\mathrm{NTIME}(f(n))$ est l'ensemble des langages reconnus par une MTND $\mathcal{M}$ en temps borné par $\alpha f(n)$ pour un certain α.

$$\forall u \in \Sigma^* \qquad t_{\mathcal{M}}(u) \leqslant \alpha f(|u|)$$

Définition Si $\mathcal{F}$ est un ensemble de fonctions on note

$$\mathrm{NTIME}(\mathcal{F}) = \bigcup_{f \in \mathcal{F}} \mathrm{NTIME}(f(n))$$

$$\mathrm{NP} = \mathrm{NTIME}\left(\left\{n^k \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}\right)$$

Premières propriétés

Proposition Si $L_1, L_2 \in \mathrm{NTIME}(t(n))$ alors $L_1 \cup L_2 \in \mathrm{NTIME}(t(n))$ et $L_1 \cap L_2 \in \mathrm{NTIME}(t(n))$.

Proposition Pour toute fonction $t : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

$$\mathrm{DTIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{NTIME}(t(n)) \subseteq \mathrm{DTIME}\left(2^{O(t(n))}\right)$$