

# Logique

## Comment l'on démontre (I) : Tables de vérité

Jules Chouquet



SOM2IF15 – 2023

# Contexte

Qu'est-ce que l'on cherche à faire ?

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

→ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

# Contexte

Qu'est-ce que l'on cherche à faire ?

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

→ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

## Pourquoi faire ?

Deux applications très utiles :

- Savoir quand deux formules sont logiquement équivalentes
- Savoir si une formule est **nécessairement** vraie

# Contexte

Qu'est-ce que l'on cherche à faire ?

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

→ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

## Pourquoi faire ?

Deux applications très utiles :

- Savoir quand deux formules sont logiquement équivalentes
- Savoir si une formule est **nécessairement** vraie

## Rappel

On ne s'intéresse plus à ce que peuvent vouloir dire les variables  $p, q, \dots$ , on considère juste qu'elles peuvent être vraies ou fausses.

# Les formules toujours vraies

Aussi appelées tautologies, théorèmes, vérités logiques,...

## Definition

Une formule est appelée **tautologie** quand sa valeur de vérité est Vrai quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y apparaissent.

Exemple :  $p \vee \neg p$  ne peut pas être fausse. En revanche,  $p \vee q$  peut être fausse, ce n'est pas une tautologie.

# Vérité et connecteurs

## Quelques choses à savoir

- Chaque variable apparaissant dans la formule peut être vraie (V) ou fausse (F)
- On doit considérer toutes les éventualités ( $p$  vrai et  $q$  vrai,  $p$  vrai et  $q$  faux, etc. ...) <sup>1</sup>
- Dans une même éventualité, une variable ne peut avoir qu'une seule valeur (V ou F), même si elle apparaît plusieurs fois dans la formule.
- Pour chaque connecteur, il y a une table à connaître par cœur

---

1. Remarquez qu'il peut y avoir plusieurs possibilités où  $p$  est vrai, par exemple. . .

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$



# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

## Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

## Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

## Conjonction

$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

## Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

## Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

## Conjonction

$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

## Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

## Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

## Conjonction

$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

## Implication

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

## Négation

$p$	$\neg p$
$V$	$F$
$F$	$V$

## Disjonction

$p$	$q$	$p \vee q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$V$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$F$

## Conjonction

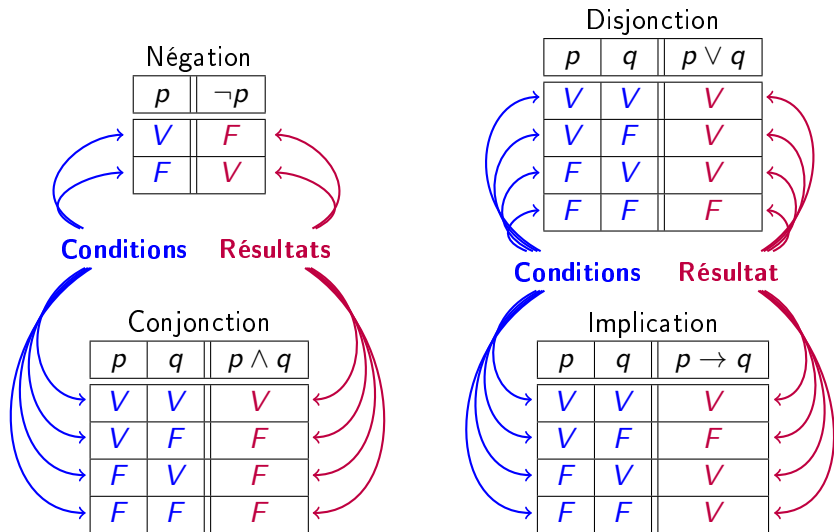
$p$	$q$	$p \wedge q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$F$
$F$	$F$	$F$

## Implication

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
$V$	$V$	$V$
$V$	$F$	$F$
$F$	$V$	$V$
$F$	$F$	$V$

# Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)



## Utiliser une table de vérité

On voudrait savoir quand la formule  $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$  est vraie ou fausse.

## Utiliser une table de vérité

On voudrait savoir quand la formule  $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$  est vraie ou fausse.

### Comment faire ?

- Regarder quelles sont les variables qui apparaissent (ici  $p$ ,  $q$  et  $r$ )
- Les compter, et examiner quelles sont les différentes configurations possibles ( $p, q, r$  vrais,  $p$  vrai, les autres faux, etc. . .)
- $\rightarrow$  préparer les lignes
- Écrire **toutes** les sous-formules (on va y revenir)
- $\rightarrow$  préparer les colonnes
- Appliquer les règles et remplir la table.



# Les différentes configurations possibles

## Préparer les lignes

### Propriété

Une table de vérité pour  $n$  variables comporte toujours  $2^n$  lignes.

$p$	$q$
V	V
V	F
F	V
F	F

$p$	$q$	$r$
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

### Remarque

Si vous êtes déjà familiers avec le binaire, vous pouvez remplacer  $V$  par 1 et  $F$  par 0, et chaque ligne correspond à un chiffre entre 0 et  $2^n - 1$  en binaire.

Pour  $p, q$  : 00, 01, 10, 11

# Les sous-formules

## Précisément

On appelle sous-formule d'une formule  $F$  toute formule *correcte* "apparaissant" dans  $F$ .

### Définition

Pour toute formule  $F$  :

- $F$  est une sous-formule de  $F$ .
- Si  $F$  est de la forme  $\neg F'$ , alors  $F'$  est aussi une sous-formule de  $F$  (c'est la sous-formule immédiate), ainsi que **toutes les sous-formules de  $F'$** .
- Si  $F$  est de la forme  $F_1 \bullet F_2$ <sup>a</sup>, alors  $F_1$  et  $F_2$  sont des sous-formules (immédiates) de  $F$ , ainsi que **toutes les sous-formules de  $F_1$  et  $F_2$**

---

a. Où  $\bullet$  est n'importe quel connecteur binaire  $\wedge, \vee, \rightarrow$ .

# Les sous-formules

## Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de  $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$ , c'est-à-dire :

- $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- $p, q$ , et  $r$ .

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .

# Les sous-formules

## Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de  $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$ , c'est-à-dire :

- $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- $p, q$ , et  $r$ .

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
-----	-----	-----	--------------	-----------------------	---------------------------------------	---

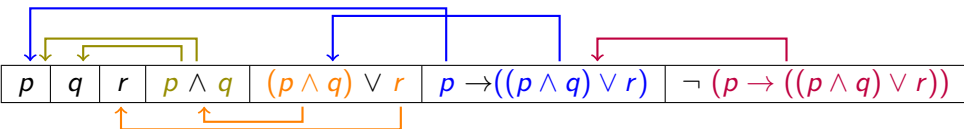
# Les sous-formules

## Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de  $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$ , c'est-à-dire :

- $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- $p, q$ , et  $r$ .

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .



# Construire la table

On reprend la préparation des **colonnes** .

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$

# Construire la table

On reprend la préparation des **lignes** .

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

# Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				



# Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V			
V	V	F	V			
V	F	V	F			
V	F	F	F			
F	V	V	F			
F	V	F	F			
F	F	V	F			
F	F	F	F			

# Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	V		
V	F	V	F	V		
V	F	F	F	F		
F	V	V	F	V		
F	V	F	F	F		
F	F	V	F	V		
F	F	F	F	F		

# Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V	V	
V	V	F	V	V	V	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	F	F	F	
F	V	V	F	V	V	
F	V	F	F	F	V	
F	F	V	F	V	V	
F	F	F	F	F	V	

# Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

$p$	$q$	$r$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

## Tautologie

Une formule est une **tautologie** lorsque toutes les lignes de sa table de vérité sont à Vrai.

$p$	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

## Antilogie

Une formule est une **antilogie** lorsque toutes les lignes de sa table de vérité sont à Faux.

$p$	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

## Équivalence

Deux formules sont équivalentes lorsque elles ont la même table de vérité.

$p$	$q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

## Exercice

Démontrez que les deux formules vues à la fin du cours précédent sont équivalentes.

$$(p \rightarrow (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \quad (\neg p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$



## Exercice

Démontrez que les deux formules vues à la fin du cours précédent sont équivalentes.

$$(p \rightarrow (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \quad (\neg p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$

## Dans le prochain cours

Nous nous intéresserons de plus près aux formules équivalentes