Logique

Comment l'on démontre (I) : Tables de vérité

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2024

Contexte

Qu'est-ce que l'on cherche à faire ?

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

$\rightarrow$ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

Contexte

Qu'est-ce que l'on cherche à faire ?

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

$\rightarrow$ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

Pourquoi faire ?

Deux applications très utiles :

- Savoir quand deux formules sont logiquement équivalentes
- Savoir si une formule est **nécessairement** vraie

Savoir quand une formule est vraie ou fausse, en fonction des variables propositionnelles qui y apparaissent.

$\rightarrow$ difficulté : si la formule est compliquée, il peut être compliqué de raisonner dessus.

Pourquoi faire ?

Deux applications très utiles :

- Savoir quand deux formules sont logiquement équivalentes
- Savoir si une formule est **nécessairement** vraie

Rappel

On ne s'intéresse plus à ce que peuvent vouloir dire les variables $p, q, \ldots$, on considère juste qu'elles peuvent être vraies ou fausses.

Les formules toujours vraies

Aussi appelées tautologies, théorèmes, vérités logiques,...

Definition

Une formule est appelée **tautologie** quand sa valeur de vérité est Vrai quelles que soient les valeurs de vérité des variables propositionnelles qui y apparaissent.

Exemple : $p \vee \neg p$ ne peut pas être fausse. En revanche, $p \vee q$ peut être fausse, ce n'est pas une tautologie.

- Chaque variable apparaissant dans la formule peut être vraie (V) ou fausse (F)
- On doit considérer toutes les éventualités (p vrai et q vrai, p vrai et q faux, etc...) [1]
- Dans une même éventualité, une variable ne peut avoir qu'une seule valeur (V ou F), même si elle apparaît plusieurs fois dans la formule.
- Pour chaque connecteur, il y a une table à connaître par cœur

1. Remarquez qu'il peut y avoir plusieurs possiblités où p est vrai, par exemple...

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implication

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conjonction

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implication

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Les tables pour chaque connecteur

(C'est une reformulation de leur définition)

Négation

A	$\neg A$
V	F
F	V

Disjonction

A	B	$A \vee B$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Conditions **Résultats**

Conditions **Résultat**

Conjonction

A	B	$A \wedge B$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Implication

A	B	$A \to B$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Utiliser une table de vérité

On voudrait savoir quand la formule $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$ est vraie ou fausse.

Utiliser une table de vérité

On voudrait savoir quand la formule $\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$ est vraie ou fausse.

Comment faire ?

- Regarder quelles sont les variables qui apparaissent (ici p, q et r)
- Les compter, et examiner quelles sont les différentes configurations possibles (p, q, r vrais, p vrai, les autres faux, etc. . .)
- $\to$ préparer les lignes
- Écrire **toutes** les sous-formules (on va y revenir)
- $\to$ préparer les colonnes
- Appliquer les règles et remplir la table.

Les différentes configurations possibles

Préparer les lignes

Propriété

Une table de vérité pour n variables comporte toujours 2^n lignes.

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Remarque

Si vous êtes déjà familiers avec le binaire, vous pouvez remplacer V par 1 et F par 0, et chaque ligne correspond à un chiffre entre 0 et $2^n - 1$ en binaire.
Pour p, q : $00, 01, 10, 11$

On appelle sous-formule d'une formule F toute formule *correcte* "apparaissant" dans F.

Définition

Pour toute formule F :

- F est une sous-formule de F.
- Si F est de la forme $\neg F'$, alors F' est aussi une sous-formule de F (c'est la sous-formule immédiate), ainsi que **toutes les sous-formules de F'** .
- Si F est de la forme $F_1 \bullet F_2$ [a], alors F_1 et F_2 sont des sous-formules (immédiates) de F, ainsi que **toutes les sous-formules de F_1 et F_2**

a. Où $\bullet$ est n'importe quel connecteur binaire $\wedge, \vee, \rightarrow$.

Les sous-formules

Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de $\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$, c'est-à-dire :

- $\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \to ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- p, q, et r.

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .

Les sous-formules

Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$, c'est-à-dire :

- $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- p, q, et r.

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg (p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$

Les sous-formules

Préparer les colonnes

On recopie toutes les sous-formules de $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$, c'est-à-dire :

- $\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
- $p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$
- $(p \wedge q) \vee r$
- $(p \wedge q)$
- p, q, et r.

Et on les met dans l'ordre, de façon à ce que toute formule arrive **après ses sous-formules** .

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$

Construire la table

On reprend la préparation des **colonnes** .

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \to ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$

Construire la table

On reprend la préparation des **lignes** .

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \to ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V				
V	V	F				
V	F	V				
V	F	F				
F	V	V				
F	V	F				
F	F	V				
F	F	F				

Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V			
V	V	F	V			
V	F	V	F			
V	F	F	F			
F	V	V	F			
F	V	F	F			
F	F	V	F			
F	F	F	F			

Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \to ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \to ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V		
V	V	F	V	V		
V	F	V	F	V		
V	F	F	F	F		
F	V	V	F	V		
F	V	F	F	F		
F	F	V	F	V		
F	F	F	F	F		

Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V	V	
V	V	F	V	V	V	
V	F	V	F	V	V	
V	F	F	F	F	F	
F	V	V	F	V	V	
F	V	F	F	F	V	
F	F	V	F	V	V	
F	F	F	F	F	V	

Construire la table

On applique les **règles** avec les sous-formules immédiates.

p	q	r	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \vee r$	$p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r)$	$\neg(p \rightarrow ((p \wedge q) \vee r))$
V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	V	V	F
V	F	V	F	V	V	F
V	F	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	V	F
F	V	F	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Définitions

Tautologie

Une formule est une **tautologie** lorsque toutes les lignes de sa table de vérité sont à Vrai.

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$
V	F	V
F	V	V

Définitions

Antilogie

Une formule est une **antilogie** lorsque toutes les lignes de sa table de vérité sont à Faux.

p	$\neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	F
F	V	F

Définitions

Équivalence

Deux formules sont équivalentes lorsque elles ont la même table de vérité.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	V

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Exercice

Démontrez que les deux formules vues à la fin du cours précédent sont équivalentes.

$$(p \rightarrow (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \qquad (\neg p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$

Exercice

Démontrez que les deux formules vues à la fin du cours précédent sont équivalentes.

$$(p \to (q \lor \neg p)) \land (r \lor p) \qquad (\neg p \lor (p \to q)) \land \neg(\neg r \land \neg p)$$

Dans le prochain cours

Nous nous intéresserons de plus près aux formules équivalentes