Logique

Logique propositionnelle : un langage formel

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2024

Contexte

Rappel : la logique propositionnelle[1] a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

Contexte

Rappel : la logique propositionnelle[1] a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

Contexte

Rappel : la logique propositionnelle[1] a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

Contexte

Rappel : la logique propositionnelle[1] a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »
- « **si** neige **alors** **pas** bronzage **et** **pas** baignade **et** raquettes.

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

Contexte

Rappel : la logique propositionnelle[1] a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »
- « **si** neige **alors** **pas** bronzage **et** **pas** baignade **et** raquettes.
- neige $= p$, bronzage $= q$, baignade $= r$, raquettes $= s$
  $p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r \wedge s)$

(Remarque : on utilise souvent p pour *proposition*, puis $q, r, \ldots$)

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

Avertissement

La définition et l'utilisation des connecteurs logiques données dans les prochaines pages sont à maîtriser **absolument** .

(on a terminé la partie « informelle »du cours)

$\rightarrow$ vous aurez des memos sur Celene

Un langage formel pour la logique des propositions

Pour les exemples, on va associer aux variables propositionnelles [2] les propositions suivantes : $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil »

Symbole	Nom	Exemple	Signification	Alternative
$\wedge$	Conjonction	$p \wedge q$	J'ai faim et J'ai sommeil.	J'ai faim et sommeil.
$\vee$	Disjonction	$p \vee q$	J'ai faim ou sommeil ou les deux	J'ai soit faim, soit sommeil, soit les deux
$\rightarrow$	Implication	$p \rightarrow q$	Si j'ai faim, alors j'ai sommeil	À chaque fois que j'ai faim, j'ai aussi sommeil
$\neg$	Négation	$\neg p$	Je n'ai pas faim	Il est faux que j'ai faim

2. C'est juste le nom pour les lettres utilisées.

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$ j'ai faim et/mais pas sommeil

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec p = « j'ai faim », q = « j'ai sommeil », r = « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec p = « j'ai faim », q = « j'ai sommeil », r = « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim et sommeil
$p \wedge \neg p$	

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif
$(q \rightarrow p) \wedge r$	

Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec $p =$ « j'ai faim », $q =$ « j'ai sommeil », $r =$ « j'ai soif » :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif
$(q \rightarrow p) \wedge r$	quand j'ai sommeil j'ai faim, mais là j'ai soif

Comme en maths, le parenthésage change le sens de la formule !

Dans cette section

Nous allons bientôt commencer à parler de *vérité* et de *fausseté* des formules.

Mais précisément, qu'est-ce que c'est qu'une formule ?

C'est une suite de symboles pris dans l'ensemble suivant :
$\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, (,), p, q, \ldots\}$ et qui respecte quelques règles :

- Les variables propositionnelles $p, q, \ldots$ sont des formules à part entière
- Si on a déjà écrit une formule F (qui peut être composée), alors $\neg F$ est une formule correcte.
- Si on a déjà écrit deux formules F_1 et F_2, alors $(F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2)$ sont toutes les trois des formules correctes.

Les formules avec des connecteurs seront souvent appelées des *formules composées*.

Un mot sur les parenthèses

Il est autorisé de supprimer les parenthèses externes pour une meilleure lisibilité **si elles ne rendent pas la formule ambiguë** : par exemple, la formule $(p \wedge (q \vee r))$ peut être réécrite $p \wedge (q \vee r)$, mais pas $p \wedge q \vee r$.[3]

Précisément, quand une formule est correcte, et que son **premier** et **dernier** symboles sont des parenthèses, on peut les retirer.

3. On verra plus tard qu'il existe des règles de priorité permettant d'en supprimer davantage, mais pour l'instant c'est interdit

Exemples de non-formules

Tous les exemples précédents du cours sont des formules correctes. En revanche, les suites de symboles suivantes ne sont pas des formules (on ne pourrait pas dire à quel énoncé du langage elles correspondent, elles ne *veulent rien dire*) :

- $q \ r$
- $\wedge p$
- $(p \rightarrow p($
- $p \wedge \vee q$
- $(p \vee \neg p \wedge q))$
- $p \rightarrow q \vee r$

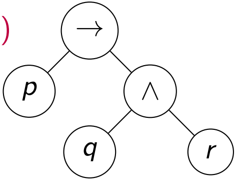
Une formule composée a toujours un connecteur principal, et une ou deux sous-formules immédiates.

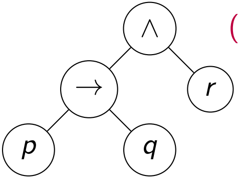
- $p \to (q \wedge r)$
- $(p \to q) \wedge r$
- $\neg p \wedge q$
- $\neg(p \wedge q)$

Représenter les formules graphiquement

Un petit dessin vaut parfois mieux qu'un long discours

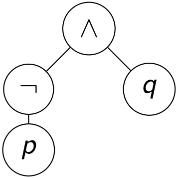
$p \to (q \wedge r)$

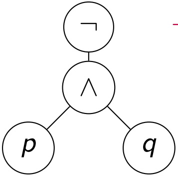




$(p \to q) \wedge r$

$\neg p \wedge q$





$\neg(p \wedge q)$

Une formule peut être vraie, ou fausse, mais pas les deux en même temps.

Les variables propositionnelles $p, q, \ldots$ peuvent être vraies ou fausses selon l' **interprétation** que l'on leur donne.

Par exemple, la variable p peut être associée à l'énoncé « la Terre est plate », ou à l'énoncé « $2 + 2 = 4$ »...

En logique, on ne s'intéresse pas forcément à ce que peut vouloir dire p, on considèrera donc le plus souvent que les variables peuvent être vraies ou fausses, et on étudiera toutes les possibilités [4]

En revanche, pour les formules composées, c'est une autre histoire, car les connecteurs ont un *sens* fixé...

4. C'est exactement ce à quoi serviront les tables de vérité que l'on verra plus tard.

La conjonction en détail

Prenons deux formules quelconques F_1 et F_2, et leur conjonction :

$$F_1 \wedge F_2$$

$\rightarrow$ la formule est vraie quand F_1 et F_2 sont vrais.
$\rightarrow$ elle est fausse quand au moins l'une des deux est fausse.

Exemple : si $p =$ « la Terre est plate », alors $p \wedge F_2$ sera fausse quoi qu'il arrive (on n'a même pas besoin de savoir si F_2 est vraie ou fausse, ça ne change rien)

Mais si p est vraie, alors il faut attendre de connaître la vérité de F_2 pour savoir si la composée $p \wedge F_2$ est vraie aussi.

La négation en détail

Soit F une formule quelconque, et sa négation :

$$\neg F$$

$\rightarrow$ la formule est vraie uniquement quand F n'est <u>pas</u> vraie.
Si $p =$ « la Terre est plate », alors $\neg p$ est vraie.

La vérité d'une négation dépend directement et uniquement de sa sous formule, elle la fait passer de vrai à faux ou de faux à vrai.

La disjonction en détail

Prenons F_1 et F_2 deux formules quelconques, et leur conjonction :

$$F_1 \vee F_2$$

$\rightarrow$ pour que la disjonction soit vraie, il suffit que l'une deux sous formules F_1 ou F_2 soit vraie. **Si les deux sont vraies, ça marche aussi**.

Autrement dit, pour qu'elle soit fausse, il faut que les deux formules soient fausses (dans tous les autres cas, elle est vraie).

Exemple : si $p =$ « la Terre est plate », alors $\neg p \vee F_2$ sera vraie quoi qu'il arrive.

L'implication en détail I

Prenons F_1 et F_2 quelconques et leur implication :

$$F_1 \rightarrow F_2$$

$\rightarrow$ pour que l'implication soit vraie, il faut que quand F_1 est vraie, F_2 aussi.

Difficulté

Quand l'antécédent [a] est faux, la formule reste vraie !

Si $p =$ « la Terre est plate », $p \rightarrow F_2$ sera toujours vraie...

a. Dans une implication, F_1 est appelé *antécédent* et F_2 est appelé *conséquent*.

En fait, il est plus facile de retenir le seul moment où une implication est fausse : c'est quand l'antécédent est vrai et le conséquent (F_2) est faux, comme ici : $p \rightarrow q$ si $p =$« $2 + 2 = 4$ »et $q =$ « $2 + 2 = 8$ »

Et dans tous les autres cas, la formule est vraie.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" $\rightarrow$ "l'herbe est mouillée"

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" $\rightarrow$ "l'herbe est mouillée"
- "je fais du ski" $\rightarrow$ "il y a de la neige"

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” $\rightarrow$ “l'herbe est mouillée”
- “je fais du ski” $\rightarrow$ “il y a de la neige“
- ”x est impair “ $\rightarrow$ ”x n'est pas divisible par 4“

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" $\rightarrow$ "l'herbe est mouillée"
- "je fais du ski" $\rightarrow$ "il y a de la neige"
- "x est impair " $\rightarrow$ "x n'est pas divisible par 4"
- "Je suis à la fac" $\rightarrow$ "J'ai eu mon bac"[5]

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” $\rightarrow$ “l'herbe est mouillée”
- “je fais du ski” $\rightarrow$ “il y a de la neige“
- ”x est impair “ $\rightarrow$ ”x n'est pas divisible par 4“
- ”Je suis à la fac“ $\rightarrow$ ”J'ai eu mon bac“[5]

Mais contrairement à l'intuition, parfois l'antécédent et le conséquent n'ont rien à voir :

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" $\rightarrow$ "l'herbe est mouillée"
- "je fais du ski" $\rightarrow$ "il y a de la neige"
- "x est impair " $\rightarrow$ "x n'est pas divisible par 4"
- "Je suis à la fac" $\rightarrow$ "J'ai eu mon bac"[5]

Mais contrairement à l'intuition, parfois l'antécédent et le conséquent n'ont rien à voir :

- "Je suis une licorne" $\rightarrow$ "J'ai un bec jaune"

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” $\rightarrow$ “l'herbe est mouillée”
- “je fais du ski” $\rightarrow$ “il y a de la neige“
- ”x est impair “ $\rightarrow$ ”x n'est pas divisible par 4“
- ”Je suis à la fac“ $\rightarrow$ ”J'ai eu mon bac“[5]

Mais contrairement à l'intuition, parfois l'antécédent et le conséquent n'ont rien à voir :

- “Je suis une licorne” $\rightarrow$ “J'ai un bec jaune”
- “Ma famille habite dans le Loir-et-Cher” $\rightarrow$ “$\sqrt{2}$ est irrationnel”

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

L'implication en détail III

Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- "il pleut" $\rightarrow$ "je sors mon parapluie"[6]
- "x est un nombre premier" $\rightarrow$ "x est un nombre impair"[7]

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.

7. 2 est premier

L'implication en détail III

Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- "il pleut" $\rightarrow$ "je sors mon parapluie"[6]
- "x est un nombre premier" $\rightarrow$ "x est un nombre impair"[7]

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

- "Orléans est la préfecture du Loiret" $\rightarrow$ "$2 + 2 = 5$"

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.
7. 2 est premier

L'implication en détail III

Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- "il pleut" $\rightarrow$ "je sors mon parapluie"[6]
- "x est un nombre premier" $\rightarrow$ "x est un nombre impair"[7]

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

- "Orléans est la préfecture du Loiret" $\rightarrow$ "$2+2=5$"
- "$2+2=4$ $\rightarrow$ "Jargeau est la préfecture de l'Indre"

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.

7. 2 est premier

Qu'est-ce que l'on fait avec tout ça ?

Par la suite, on ne s'intéressera plus vraiment aux préfectures, à la météo, etc. . .

- On voudra formaliser des propriétés mathématiques, mais pour parler de nombre, il faut attendre de maîtriser le calcul des prédicats.
- On va voir comment démontrer des formules de la logique des propositions avec des outils précis.
- On va étudier les propriétés *logiques* des connecteurs propositionnels.

Exemple : une propriété de la conjonction

Que dire des deux formules suivantes ?

$$(p \wedge (q \wedge r)) \qquad ((p \wedge q) \wedge r)$$

Exemple : une propriété de la conjonction

Que dire des deux formules suivantes ?

$$(p \wedge (q \wedge r)) \qquad ((p \wedge q) \wedge r)$$

Réponse

Elles sont **logiquement équivalentes** .
Qu'est-ce que ça veut dire ?

$\rightarrow$ quelles que soient les interprétations de p, q, r, elles ont toujours la même valeur de vérité [a].

[a] Soit toutes les deux sont vraies, soit toutes les deux sont fausses

Intuitivement : Ok, car il faut que p, q et r soient vrais pour que les conjonctions soient vraies. Si l'une des variables est fausse, les deux formules sont fausses.

Est-ce que les deux formules suivantes sont logiquement équivalentes ?

$$(p \to (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \qquad (\neg p \vee (p \to q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$

L'intuition c'est important

Mais ça ne suffit pas

Est-ce que les deux formules suivantes sont logiquement équivalentes ?

$$(p \to (q \lor \neg p)) \land (r \lor p) \qquad (\neg p \lor (p \to q)) \land \neg(\neg r \land \neg p)$$

(Oui)

La suite

Dans la prochaine section, on va étudier les tables de vérité, qui sont une méthode sûre pour vérifier ce genre de choses.