

Logique

Quelques théorèmes et propriétés de la logique propositionnelle

Jules Chouquet



2024

Précédemment

On a vu comment montrer que deux formules étaient équivalentes en utilisant les tables de vérité.

Dans ce cours

On va s'intéresser à certaines équivalences en particulier, qui vont nous apprendre des choses sur les connecteurs

Une précision sur l'équivalence

Notation

Quand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

-
1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abbréviation !

Une précision sur l'équivalence

Notation

Quand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abbréviation !

Une précision sur l'équivalence

Notation

Quand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

p	q	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Theorème

Quand $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1)$ est une tautologie.

D'ailleurs, il est fréquent d'utiliser $F_1 \leftrightarrow F_2$ comme une abbréviation de $(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1)$.¹

1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abbréviation !

Parenthèse : la **substitution**

Quelque chose qu'on a utilisé sans le dire...

Les tables de vérité commencent avec les variables propositionnelles.

Mais, les théorèmes que l'on obtient (tautologies, équivalences, ...) sont beaucoup plus généraux :

Exemple

$p \vee \neg p$ est une tautologie, mais également $F \vee \neg F$,

Quelle que soit la formule F

Parenthèse : la **substitution**

Quelque chose qu'on a utilisé sans le dire...

Les tables de vérité commencent avec les variables propositionnelles.

Mais, les théorèmes que l'on obtient (tautologies, équivalences, ...) sont beaucoup plus généraux :

Exemple

$p \vee \neg p$ est une tautologie, mais également $F \vee \neg F$,

Quelle que soit la formule F

Définition : Substitution

Soient F et G deux formules propositionnelles. $F[G/p]$ est la formule obtenue en substituant G à **chaque occurrence** de la variable propositionnelle p .

Exemples de substitutions

Soient $F = (p \vee (q \rightarrow p))$ et $G = (r \wedge s)^2$

La formule obtenue par substitution $F[G/p]$ est égale à :

$$((r \wedge s) \vee (q \rightarrow (r \wedge s)))$$

Remarques

- Si p n'apparaît pas dans G , alors p n'apparaît plus dans $F[G/p]$ (il a été remplacé).
- Si p n'apparaît pas dans F , alors on a quand même le droit d'écrire $F[G/p]$, mais il n'y a aucun remplacement à faire, et on a donc $F[G/p] = F$ dans ce cas.

2. En général, on évite d'utiliser des variables propositionnelles en commun dans F et G .

Propriétés des substitutions

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F .

Propriétés des substitutions

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

Pourquoi ?

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F .

Propriétés des substitutions

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

Pourquoi ?

→ car si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors la formule $(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1)$ est une tautologie, et que :

- $((F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1))[G/p]$
- $(F_1[G/p] \rightarrow F_2[G/p]) \wedge (F_2[G/p] \rightarrow F_1[G/p])$

Sont exactement la même chose³. Et la première est bien une tautologie, par conséquence du théorème.

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F .

Attention

L'inverse ne marche pas

Il est faux que si $F[G/p]$ est une tautologie, alors F est forcément une tautologie.

Exemple

$p \vee q$ n'est pas une tautologie, mais $(p \vee q)[(r \vee \neg r)/p]$ en est une, car elle est égale à $((r \vee \neg r) \vee q)$, qui est toujours vrai.

Conjonction et Disjonction

Retour au sens des connecteurs

Considérez les deux phrases suivantes :

- Il est faux que j'ai faim ou soif
- Je n'ai ni faim ni soif

Ainsi que ces deux-là :

- Jacques n'est pas 'jeune et beau'
- Jacques est soit 'pas jeune', soit 'pas beau'

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$$\neg(F_1 \vee F_2) \text{ et } \neg F_1 \wedge \neg F_2$$

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$

sont équivalentes

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$

sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$

sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$

sont équivalentes

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont équivalentes

Il suffit de vérifier que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, et que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont équivalentes

Il suffit de vérifier que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, et que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Remarque

C'est pour cette raison que l'on peut dire que la conjonction et la disjonction sont des connecteurs **duaux**

Parlons constantes

\top et \perp

En logique propositionnelle, on peut rajouter, en plus des variables propositionnelles, des **constantes propositionnelles**. Elles ont toujours la même valeur⁴.

Deux valeurs possibles \Rightarrow deux constantes. Une toujours vraie : \top , et une toujours fausse : \perp ⁵ (en particulier, $\neg\top \leftrightarrow \perp$ et $\neg\perp \leftrightarrow \top$)

Comme elle ne varie pas, une constante ne rajoute pas de lignes à une table de vérité :

p	$(p \wedge \top)$	$(p \wedge \top) \rightarrow \perp$
V	V	F
F	F	V

4. Si vous connaissez la différence entre une variable et une constante, vous ne devriez pas être surpris

5. Elles fonctionnent comme true et false en informatique

Quelques équivalences intéressantes

Pour finir (à relire chez vous)

$\neg\neg p$	p
$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
$p \wedge q$	$q \wedge p$
$p \vee q$	$q \vee p$
$p \wedge \top$	p
$p \vee \top$	\top
$p \wedge \perp$	\perp
$p \vee \perp$	p