

Logique

Quand ? Pourquoi ? Comment ?

Jules Chouquet



SOM2IF15 – 2023

- 1 Quand ?
- 2 Pourquoi ?
- 3 Comment ?
- 4 Annexe : sources

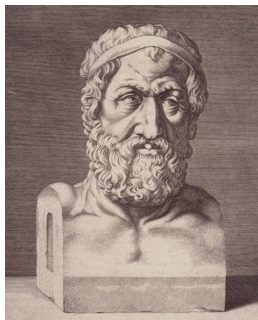
Quand ?

Au commencement était la philosophie grecque¹.

Les présocratiques



Parménide d'Élée



Zénon d'Élée

- Parménide d'Élée : première formulation connue du principe d'identité
- Zénon d'Élée : première expression connue d'un raisonnement par l'absurde.

1. C'est pas vrai



- C'est une logique de *termes*^a : ce sont des concepts comme "homme", "mortel", ...
- Les démonstrations (ou inférences) prennent la forme de *sylogismes*.

a. La formalisation se fait à l'aide de lettres de l'alphabet, représentant des *variables de noms*

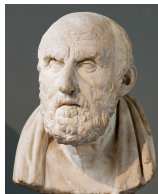
Exemple de syllogisme

Les étudiants sont des mammifères Les mammifères sont des vertébrés

Les étudiants sont des vertébrés



Zenon de Citium



Chrysippe de Soles

- La connaissance est divisée en trois domaines fondamentaux : l'éthique, la physique, et la **logique**.
- C'est la première logique des **propositions**², dont on sait qu'elles peuvent être *vraies* ou *fausses*, et on peut les combiner avec des connecteurs logiques (**et**, **ou**,...)

2. Les propositions sont représentées par des nombres.

Savants perses et arabes du Moyen-Âge

Quelques célébrités



Avicenne



Averroës



Al-Farabi

Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



Abélard



Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



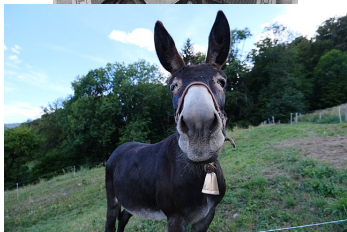
Abélard



Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



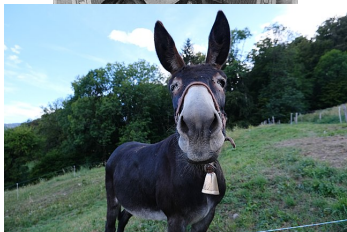
Abélard



Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



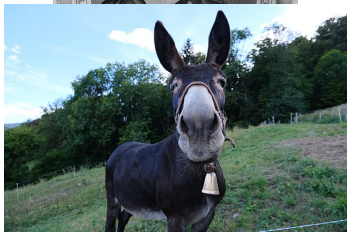
Abélard



Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

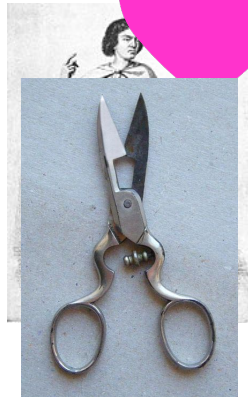
Buridan



d'Ockham



Abélard

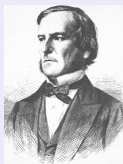


La logique moderne

En fait, et si tout ça c'était des maths?

Entre le XVII^{ème} et le XIX^{ème} siècle, on commence à appliquer des méthodes mathématiques à la logique.

Algèbres de Boole



George Boole (1847)

Vrai	1
Faux	0
“Ou”	+
“Et”	×

Projet scientifique : trouver un système avec des méthodes mathématiques pour démontrer tout ce qui est *vrai*, en calculant. On peut parler maintenant de **logique mathématique** .

Oui, mais. . .

Comment on sait ce qui doit être démontré ou non ? Comment on choisit les axiomes ?

Au XIX^{ème} siècle, on réalise que l'intuition ne suffit plus.

Cinquième axiome des *Éléments* d'Euclide

Par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Si on suppose que c'est faux, on devrait arriver à une contradiction.

Oui, mais. . .

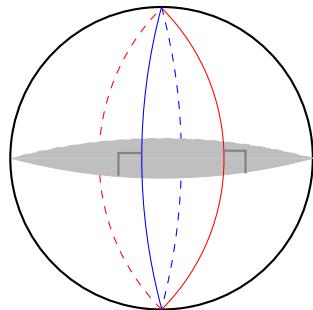
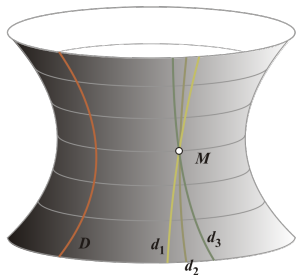
Comment on sait ce qui doit être démontré ou non ? Comment on choisit les axiomes ?

Au XIX^{ème} siècle, on réalise que l'intuition ne suffit plus.

Cinquième axiome des *Éléments* d'Euclide

Par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Si on suppose que c'est faux, on devrait arriver à une contradiction.
Sauf que non :



La crise des fondements

Les maths en PLS

En fait, on réalise que beaucoup de choses qui semblaient évidentes ne le sont pas du tout :

- Les liens entre courbes continues et fonctions dérivables.
- Les propriétés des ensembles infinis

Par exemple : $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}^3$

3. *Diagonale de Cantor* (1891)

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

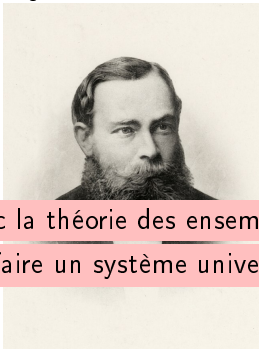
Frege



Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege

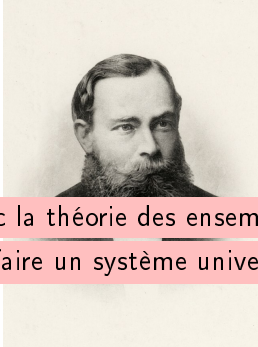


Avec la théorie des ensembles,
je peux faire un système universel wesh

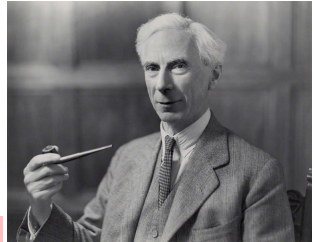
Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,
je peux faire un système universel wesh



Russell

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,
je peux faire un rasage universel wesh



Paradoxe dans ta face

Russell

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



Avec la thé ensembles,

je peux faire un e universel wesh



Paradoxe dans ta face

Russell

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

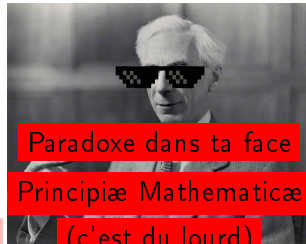
Frege



Avec la thé
je peux faire un



ensembles,
e universel wesh



Russell

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



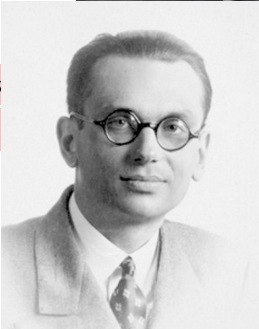
Avec la thé
je peux faire un

ensembles
e universel



s ta face
hematicæ
ourd)

Russell



Gödel

Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



Avec la thé
je peux faire un

ensembles
e universel



s ta face
hematicæ
ourd)

Russell

"Vrai = Démontrable" c'est mort
à tout jamais (déso)

Gödel

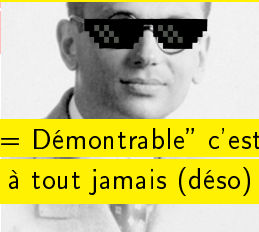
Le XXème siècle : le monde est en chantier

L'octogone des logiciens

Frege



Russell



Gödel

Avec la thé ensemble de tuer le game en fait) ematicæ
 je peux faire un e universel ourd)

(Je viens juste s ta face

"Vrai = Démonstrable" c'est mort
 à tout jamais (déso)

Et après, on fait quoi ?

Y a-t-il une vie après le théorème de Gödel ?

Première approche : redéfinir la vérité.

Tout est question de langage.

On associe la syntaxe à des objets de la réalité
(ou à un univers mathématique précis).



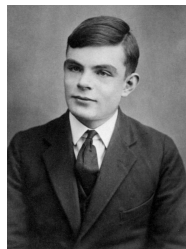
Tarski : langage et métalangage

Deuxième approche :

Définir les outils mathématiques
permettant de caractériser le **calcul**



Church : le lambda (λ)-calcul



Les machines de Turing

La logique au XX^{ème} siècle — re

En fait, et si tout ça c'était de l'informatique ?

Et si la question importante n'était pas « qu'est-ce qui est vrai/démontrable ? » mais « Que peut-on calculer, et comment ? »

La thèse de Church-Turing

Ce qui est calculable est calculable par machine de Turing, ou en λ -calcul.

→ En fait, on est déjà en train de parler d'algorithmes.

L'histoire ne s'arrête pas là...

Mais on s'arrête là pour aujourd'hui. Une suite possible serait l'histoire de l'informatique. Mais il faudrait revenir au moins sur :



B. Pascal



C. Babbage



A. Lovelace

Et pour arriver à l'époque de GPT4, ce serait trop long pour ce cours.

Pourquoi ?

Quel est l'intérêt d'un cours de logique ?

Pour des mathématiciens et/ou des informaticiens

En quelques mots

- Raisonner correctement sur des objets complexes
- Identifier et comprendre le *contexte* dans lequel on exprime des preuves, des formules,...
- Reconnaître et formuler des démonstrations correctes
- Programmation : les programmes sont construits sur des structures logiques (booléens, conditions, boucles, fonctions,...) qu'il faut comprendre *théoriquement* pour bien les utiliser.
- Détecter et résoudre les paradoxes mathématiques et informatiques
- Analyser et générer le langage de façon formelle (IA, etc...)

Démontrer

Formellement

Qu'est-ce qu'une **preuve** ? C'est une suite d'affirmations qui peut être :

- présentée à l'oral (conférence scientifique)
- écrite dans une langue naturelle (article)
- expliquée et écrite au tableau (cours)
- ...

Mais parfois, on a besoin de parler de la même preuve depuis partout dans le monde, pour :

- se mettre d'accord sur sa validité
- la reproduire, compléter, adapter, ...

Pour cela, les preuves formalisées par la logique permettent d'être précis et de parler de la même chose.

En informatique, la **vérification** permet de s'assurer qu'un programme n'aura pas de bug⁴ : on démontre des formules logiques pour en être certain.

Plusieurs de vos enseignants sont spécialistes de ce domaine (qu'il s'agisse d'algorithmes ou de langages de programmation)

4. Ou au moins, d'éviter la majorité des bugs critiques

Structures de contrôle du code informatique

```
x=0
if(b):
    if(d):
        x=1
    else:
        x=2
    if(c or True):
        print('test')
    else:
        print('stop')
```

```
x=0
if(b and d):
    x=1
else:
    x=2
    print('test')
```

Une analyse logique peut permettre de simplifier du code, en s'assurant que le résultat est équivalent^a

a. Sur du code davantage sophistiqué, ça peut être plus difficile, et plus efficace

Comment ?

Quels outils pour faire de la logique ?

Un langage formel pour exprimer des propriétés

Exemples de formules que l'on va apprendre à manipuler

- $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
- $\exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x))$
- $(x = 0 \vee \exists y(\neg(y = x) \wedge x > y))$

Quels outils pour faire de la logique ?

Des techniques pour écrire des preuves précises

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figure – Table de vérité

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash p} \quad \frac{\vdots}{\Delta \vdash q}}{\Gamma, \Delta \vdash p \wedge q}$$

Figure – Dédution naturelle

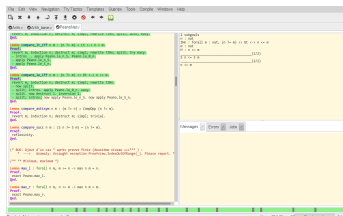
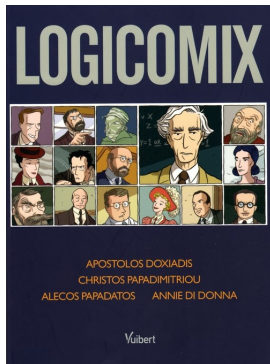


Figure – Coq

Annexe : sources

Référence conseillée

Si vous vous intéressez à l'histoire de la logique moderne (XXe siècle)



Images utilisées : sources, licences

(hors domaine public)

- Buridan : G.Garitan.
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>
- Ockham : <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0>
- Âne : Guilhem Vellut
<https://creativecommons.org/licenses/by/2.0>