

# Logique

Quand ? Pourquoi ? Comment ?

Jules Chouquet



2024

- 1 Quand ?
- 2 Pourquoi ?
- 3 Comment ?
- 4 Annexe : sources

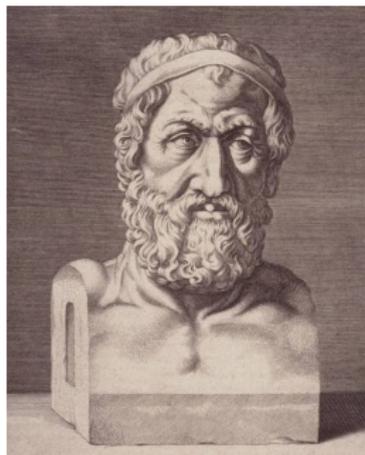
Quand ?

# Au commencement était la philosophie grecque<sup>1</sup>.

## Les présocratiques



Parménide d'Élée



Zénon d'Élée

- Parménide d'Élée : première formulation connue du principe d'identité
- Zénon d'Élée : première expression connue d'un raisonnement par l'absurde.

---

1. C'est pas vrai



- C'est une logique de *termes*<sup>a</sup> : ce sont des concepts comme "homme", "mortel", ...
- Les démonstrations (ou inférences) prennent la forme de *sylogismes*.

---

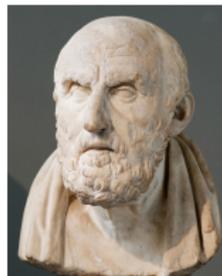
a. La formalisation se fait à l'aide de lettres de l'alphabet, représentant des *variables de noms*

## Exemple de syllogisme

Les étudiants sont des mammifères      Les mammifères sont des vertébrés  
-----  
Les étudiants sont des vertébrés



Zenon de Citium



Chrysippe de Soles

- La connaissance est divisée en trois domaines fondamentaux : l'éthique, la physique, et la **logique**.
- C'est la première logique des **propositions**<sup>2</sup>, dont on sait qu'elles peuvent être *vraies* ou *fausses*, et on peut les combiner avec des connecteurs logiques (**et**, **ou**,...)

---

2. Les propositions sont représentées par des nombres.

# Savants perses et arabes du Moyen-Âge

Quelques célébrités



Avicenne



Averroës



Al-Farabi



# Les médiévaux en Europe

## Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



Abélard



# Les médiévaux en Europe

## Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



Abélard



# Les médiévaux en Europe

## Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



Abélard



# Les médiévaux en Europe

Quelques célébrités

Buridan



d'Ockham



Abélard

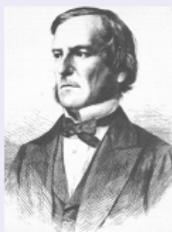


# La logique moderne

En fait, et si tout ça c'était des maths ?

Entre le XVIIème et le XIXème siècle, on commence à appliquer des méthodes mathématiques à la logique.

## Algèbres de Boole



George Boole (1847)

Vrai	1
Faux	0
“Ou”	+
“Et”	×

Projet scientifique : trouver un système avec des méthodes mathématiques pour démontrer tout ce qui est *vrai*, en calculant. On peut parler maintenant de **logique mathématique** .

# Oui, mais. . .

Comment on sait ce qui doit être démontré ou non ? Comment on choisit les axiomes ?

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, on réalise que l'intuition ne suffit plus.

Cinquième axiome des *Éléments* d'Euclide

Par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Si on suppose que c'est faux, on devrait arriver à une contradiction.

# Oui, mais. . .

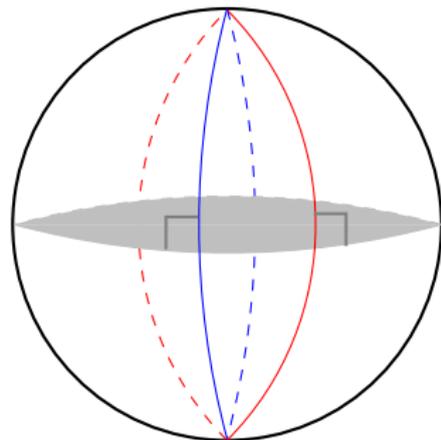
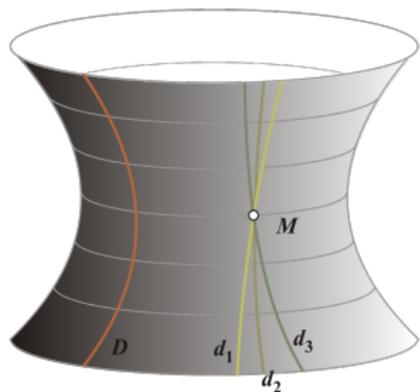
Comment on sait ce qui doit être démontré ou non ? Comment on choisit les axiomes ?

Au XIX<sup>ème</sup> siècle, on réalise que l'intuition ne suffit plus.

## Cinquième axiome des *Éléments* d'Euclide

Par un point extérieur à une droite, il passe une unique parallèle à cette droite.

Si on suppose que c'est faux, on devrait arriver à une contradiction.  
Sauf que non :



# La crise des fondements

## Les maths en PLS

En fait, on réalise que beaucoup de choses qui semblaient évidentes ne le sont pas du tout :

- Les liens entre courbes continues et fonctions dérivables.
- Les propriétés des ensembles infinis

Par exemple :  $\mathbb{N} \equiv \mathbb{Q} \neq \mathbb{R}^3$

---

### 3. *Diagonale de Cantor* (1891)

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

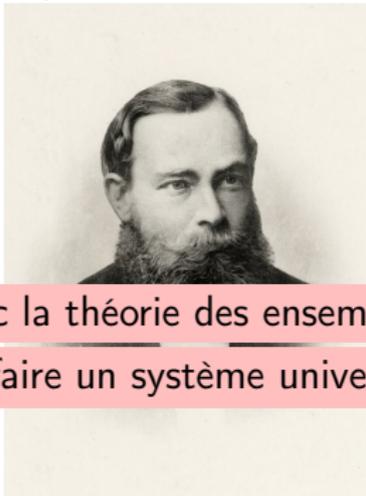
Frege



# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,  
je peux faire un système universel wesh

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,  
je peux faire un système universel wesh



Russell

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,  
je peux faire un rasoir universel wesh



Paradoxe dans ta face

Russell

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,  
je peux faire un ensemble universel wesh



Russell

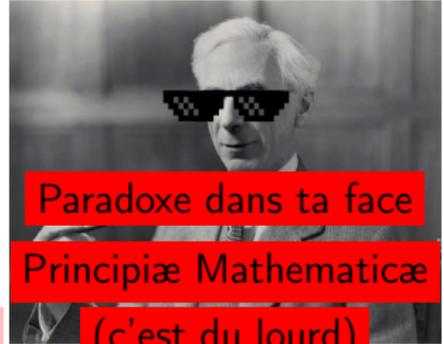
# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Avec la théorie des ensembles,  
je peux faire un rasage universel wesh



Paradoxe dans ta face  
Principia Mathematica  
(c'est du lourd)

Russell

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

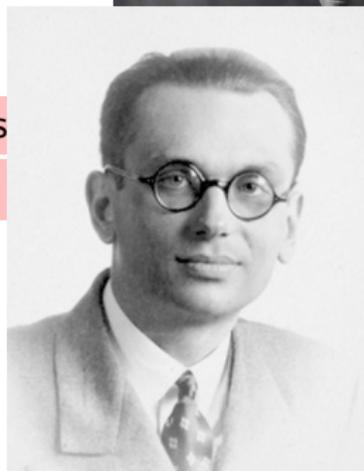
Frege



Avec la théorie des ensembles  
je peux faire un universel



Russell



Gödel

# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



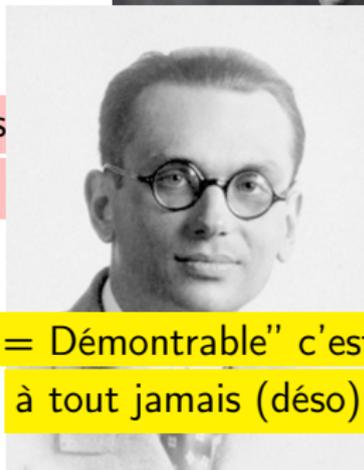
Avec la théorie des ensembles  
je peux faire un langage universel



Russell

"Vrai = Démonstrable" c'est mort  
à tout jamais (déso)

Gödel



# Le XXème siècle : le monde est en chantier

## L'octogone des logiciens

Frege



Russell

(Je viens juste de tuer le game en fait)

Avec la théorie de l'ensemble je peux faire un universel



"Vrai = Démonstrable" c'est mort à tout jamais (déso)

Gödel

# Et après, on fait quoi ?

Y a-t-il une vie après le théorème de Gödel ?

Première approche : redéfinir la vérité.  
Tout est question de langage.  
On associe la syntaxe à des objets de la réalité  
(ou à un univers mathématique précis).



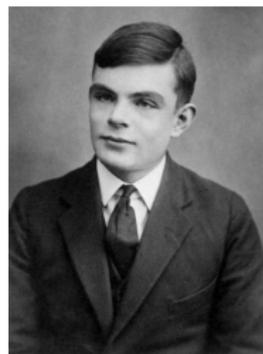
Tarski : langage et métalangage

---

Deuxième approche :  
Définir les outils mathématiques  
permettant de caractériser le **calcul**



Church : le lambda ( $\lambda$ )-calcul



Les machines de Turing

# La logique au XX<sup>ème</sup> siècle — re

En fait, et si tout ça c'était de l'informatique ?

Et si la question importante n'était pas « qu'est-ce qui est vrai/démonstrable ? » mais « Que peut-on calculer, et comment ? »

## La thèse de Church-Turing

Ce qui est calculable est calculable par machine de Turing, ou en  $\lambda$ -calcul.

→ En fait, on est déjà en train de parler d'algorithmes.

# L'histoire ne s'arrête pas là...

Mais on s'arrête là pour aujourd'hui. Une suite possible serait l'histoire de l'informatique. Mais il faudrait revenir au moins sur :



B. Pascal



C. Babbage



A. Lovelace

Et pour arriver à l'époque de GPT4, ce serait trop long pour ce cours.

Pourquoi ?

# Quel est l'intérêt d'un cours de logique ?

Pour des mathématiciens et/ou des informaticiens

## En quelques mots

- Reasonner correctement sur des objets complexes
- Identifier et comprendre le *contexte* dans lequel on exprime des preuves, des formules,...
- Reconnaître et formuler des démonstrations correctes
- Programmation : les programmes sont construits sur des structures logiques (booléens, conditions, boucles, fonctions,...) qu'il faut comprendre *théoriquement* pour bien les utiliser.
- Détecter et résoudre les paradoxes mathématiques et informatiques
- Analyser et générer le langage de façon formelle (IA, etc. ...)

# Démontrer

## Formellement

Qu'est-ce qu'une **preuve** ? C'est une suite d'affirmations qui peut être :

- présentée à l'oral (conférence scientifique)
- écrite dans une langue naturelle (article)
- expliquée et écrite au tableau (cours)
- ...

Mais parfois, on a besoin de parler de la même preuve depuis partout dans le monde, pour :

- se mettre d'accord sur sa validité
- la reproduire, compléter, adapter, ...

Pour cela, les preuves formalisées par la logique permettent d'être précis et de parler de la même chose.

En informatique, la **vérification** permet de s'assurer qu'un programme n'aura pas de bug<sup>4</sup> : on démontre des formules logiques pour en être certain.

Plusieurs de vos enseignants sont spécialistes de ce domaine (qu'il s'agisse d'algorithmes ou de langages de programmation)

---

4. Ou au moins, d'éviter la majorité des bugs critiques

# Structures de contrôle du code informatique

```
x=0
if(b):
    if(d):
        x=1
    else:
        x=2
    if(c or True):
        print('test')
    else:
        print('stop')
```

```
x=1
if(not b or not d):
    x=2
    print('test')
```

Une analyse logique peut permettre de simplifier du code, en s'assurant que le résultat est équivalent<sup>a</sup>

a. Sur du code davantage sophistiqué, ça peut être plus difficile, et plus efficace

Comment ?

# Quels outils pour faire de la logique ?

Un langage formel pour exprimer des propriétés

## Exemples de formules que l'on va apprendre à manipuler

- $p \rightarrow (\neg q \vee r)$
- $\exists x(P(x) \rightarrow \forall xP(x))$
- $(x = 0 \vee \exists y(\neg(y = x) \wedge x > y))$

# Quels outils pour faire de la logique ?

Des techniques pour écrire des preuves précises

$p$	$q$	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Figure – Table de vérité

$$\frac{\frac{\vdots}{\Gamma \vdash p} \quad \frac{\vdots}{\Delta \vdash q}}{\Gamma, \Delta \vdash p \wedge q}$$

Figure – Dédution naturelle

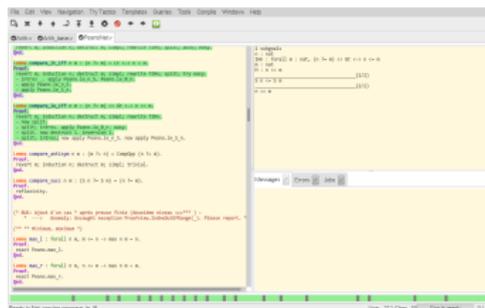
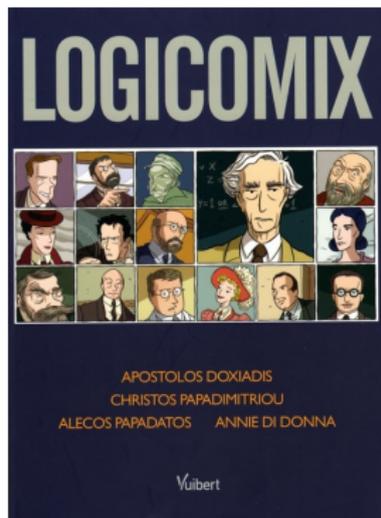


Figure – Coq

## Annexe : sources

# Référence conseillée

Si vous vous intéressez à l'histoire de la logique moderne (XXe siècle)



# Images utilisées : sources, licences

(hors domaine public)

- Buridan : G.Garitan.  
<https://creativecommons.org/licenses/by/4.0>
- Ockham : <https://creativecommons.org/licenses/by/3.0>
- Âne : Guilhem Vellut  
<https://creativecommons.org/licenses/by/2.0>