TD2 : Propriétés des formules

Jules Chouquet

Exercice 1 Tables de vérité

1. Complétez les tables de vérité suivantes :

p	$p \to p$	$p \to (p \to p)$

p	q	$q \to p$	$p \to (q \to p)$

2. Considérez la formule suivante :$(p \to s) \to (q \lor (p \land \neg(r \land s)))$.
   (a) Comptez le nombre de variables propositionnelles différentes qui y apparaissent
   (b) Combien de lignes devez-vous préparer pour une table de vérité avec cette formule ?
   (c) Écrivez quelles sont les sous-formules [1].
   (d) Recopiez les sous-formules à la suite, de façon à ce que **chaque formule soit après toutes ses sous-formules**.
   (e) Construisez et remplissez la table de vérité.

Exercice 2 Équivalences

1. Démontrez, en utilisant les tables de vérité, que la conjonction et la disjonction sont **commutatives** [2]
2. Démontrez que la conjonction et la disjonction sont **associatives** [3]
3. Démontrez que l'implication n'est **pas** associative.

À partir de maintenant, il est autorisé d'écrire les suites de conjonctions sans les parenthéser :
On peut écrire $(p \land q \land r \land s \land t \land \ldots)$. Vous venez en effet de démontrer que dans ce cas, les parenthèses ne changent pas la formule.
Ce n'est bien sûr valide que si l'on a **uniquement** le même connecteur répété plusieurs fois.
C'est la même chose pour les suites de disjonctions. Il est désormais autorisé d'écrire $(p \lor q \lor r \lor s \lor t \lor \ldots)$

1. Rappel : cela inclut la formule en entier et les variables propositionnelles.
2. On peut inverser les sous-formules sans changer le sens/la vérité de la formule.
3. Avec trois formules, on peut changer le parenthésage sans altérer le sens/la vérité de la formule.

Exercice 3 Tautologies et antilogies

1. *Sans faire la table de vérité*, expliquez pourquoi les formules suivantes sont des antilogies ou des tautologies. Démontrez-le en raisonnant sur les connecteurs.

   Par exemple, pour expliquer que $p \to (q \to p)$ est une tautologie, je peux dire : « si p est faux, l'implication est vraie, et si p est vrai, $q \to p$ est vrai, donc le conséquent de l'implication est vraie. Donc la formule est toujours vraie »

   Ou encore, « pour que l'implication soit fausse, il faudrait que p soit vrai, et que $q \to p$ soit faux, or c'est impossible si p est vrai. Donc cette implication est toujours vraie. »

   (a) $(p \wedge q) \wedge (r \wedge \neg p)$
   (b) $(p \vee q) \vee (r \vee \neg p)$
   (c) $p \to ((((q \to r) \to s) \to t) \to p)$
   (d) $p \to (q \to (r \to (s \to (t \to p))))$

> À partir de maintenant, on à le droit de considérer qu'une formule de la forme $(F_1 \wedge F_2 \wedge F_3 \wedge F_4)$ a quatre **sous-formules immédiates**, qui sont F_1, F_2, F_3, F_4.
> Les conjonctions intermédiaires, par exemple $(F_1 \wedge F_2)$, ou $((F_1 \wedge F_2) \wedge F_3)$, n'ont plus besoin de figurer dans la table de vérité.

2. Faites les tables de vérité des formules suivantes pour déterminer si elles sont des tautologies ou des antilogies :

   (a) $((p \to q) \to p) \to p$
   (b) $(p \vee \neg p) \wedge (p \to p) \wedge (p \to (q \to p))$
   (c) $(p \wedge \neg p) \vee \neg(p \to p) \vee (p \wedge q \wedge \neg p)$

Exercice 4 Déduction naturelle Démontrez en déduction naturelle :

1. La commutativité de la conjonction
2. La commutativité de la disjonction
3. L'associativité de la conjonction
4. L'associativité de la disjonction

Rappel : pour prouver l'équivalence entre deux formules A et B, il faut prouver $A \to B$ et $B \to A$.

Attention ! les règles de la déduction naturelle ont un nombre de prémisses fixé. Il vous est donc impossible, contrairement aux tables de vérité, de prouver en déduction naturelle une formule de la forme $A \wedge B \wedge C$ si vous ne choisissez pas un parenthésage binaire.

Dans un cas comme celui-là, vous devez prouver soit $(A \wedge B) \wedge C$, soit $A \wedge (B \wedge C)$ (c'est vous qui choisissez, c'est équivalent).