Logique

Les systèmes logiques (sémantique, cohérence, décidabilité, complétude)

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2024

Contexte

On a défini une logique et des outils pour raisonner dessus. [1]

Rappel : La logique a — entre autres — pour objectifs :

- Étudier le lien entre vérité et démonstration
- Étudier les algorithmes pour *calculer* si une formule est vraie.

1. Sauf mention contraire, je parle de la logique *classique*, c'est-à-dire non intuitionniste, où le raisonnement par l'absurde est autorisé.

Dans ce cours

On va voir ce qu'il en est de ces questions dans le cas de la logique propositionnelle, maintenant qu'on la connaît bien.

(Ensuite, on passera au calcul des prédicats)

Langage, sémantique et système de preuves

Quand on a défini la logique, on a en fait défini trois choses, qui sont liées mais qui correspondent à des concepts différents :

Langage, sémantique et système de preuves

Quand on a défini la logique, on a en fait défini trois choses, qui sont liées mais qui correspondent à des concepts différents :

1. Le langage (la syntaxe, les symboles, les règles de formation des formules)

Langage, sémantique et système de preuves

Quand on a défini la logique, on a en fait défini trois choses, qui sont liées mais qui correspondent à des concepts différents :

1. Le langage (la syntaxe, les symboles, les règles de formation des formules)
2. La **sémantique** , c'est-à-dire l' **interprétation** du langage, qui permet de définir ce que signifie **vrai** ou **faux** pour une formule.

Langage, sémantique et système de preuves

Quand on a défini la logique, on a en fait défini trois choses, qui sont liées mais qui correspondent à des concepts différents :

1. Le langage (la syntaxe, les symboles, les règles de formation des formules)
2. La **sémantique** , c'est-à-dire l' **interprétation** du langage, qui permet de définir ce que signifie **vrai** ou **faux** pour une formule.
3. Le système de preuves, des règles de déduction permettant de déduire des formules à partir d'autres formules.

On va revenir en détail sur ces trois concepts, voir comment ils s'incarnent et intéragissent dans le cas de la logique propositionnelle.

Le langage

On a déjà passé du temps à expliquer les règles pour écrire des formules. Mais j'attire votre attention sur le point suivant :

Tant que l'on n'a pas donné de sens aux symboles, les formules ne *veulent rien dire*. La partie *langage* de la logique est comme une grammaire, elle dit ce qui est une phrase correcte ou non.

La sémantique

La sémantique, c'est la façon de donner du sens à un langage. Sans elle, on ne peut pas parler de vérité ni de fausseté.

La sémantique

La sémantique, c'est la façon de donner du sens à un langage. Sans elle, on ne peut pas parler de vérité ni de fausseté.

On peut donner des interprétations différentes à une formule, c'est la sémantique qui va nous dire lesquelles on a le droit de faire ou non.

La sémantique

La sémantique, c'est la façon de donner du sens à un langage. Sans elle, on ne peut pas parler de vérité ni de fausseté.

On peut donner des interprétations différentes à une formule, c'est la sémantique qui va nous dire lesquelles on a le droit de faire ou non.

En logique propositionnelle, une interprétation est une association des variables propositionnelles aux deux valeurs possibles V et F.

La sémantique

La sémantique, c'est la façon de donner du sens à un langage. Sans elle, on ne peut pas parler de vérité ni de fausseté.

On peut donner des interprétations différentes à une formule, c'est la sémantique qui va nous dire lesquelles on a le droit de faire ou non.

En logique propositionnelle, une interprétation est une association des variables propositionnelles aux deux valeurs possibles V et F.

La sémantique de la logique propositionnelle

C'est les tables de vérité.

- Elles définissent le sens des connecteurs.
- Si on interprète les variables, elles nous permettent de déduire l'interprétation de la formule.

Quand on dispose d'une interprétation des formules, on peut leur associer une **valeur** .

Comment ça marche ?

Une interprétation des variables est une **valuation** , c'est une fonction v qui à toute variable $p, q, \ldots$ associe une valeur, V ou F.
L' **interprétation** d'une formule F pour une **valuation** v est notée $[\![F]\!]_v$.
Elle se calcule avec les tables de vérité : par exemple, si $v(p) = V$, alors $[\![p \vee q]\!]_v = V$

C'est une notation plus mathématique, mais c'est juste une autre façon de représenter le calcul d'une ligne dans une table. . .

Avec cette reformulation, on peut redéfinir les tautologies :

Définition

Une formule F de la logique propositionnelle est une tautologie si **pour toute** valuation v, $[\![F]\!]_v = V$.

Le système de preuves

Il s'agit de la déduction naturelle[2].

C'est :

- Un ensemble de règles précis et strict
- Une façon d'assembler des formules avec ces règles.

Ce n'est pas :

- Quelque chose qui détermine la vérité ou la fausseté.
- Quelque chose qui concerne le *sens* des formules.

2. Il peut y en avoir d'autres, mais c'est celui qu'on connaît.

La correction d'un système de preuves

Par rapport à une sémantique

Définition

Un système de preuve est **correct** par rapport à une sémantique si, pour toute formule F démontrée dans ce système, F est vraie dans **toutes les interprétations possibles** de la sémantique.

Théorème

En logique propositionnelle :
La déduction naturelle est **correcte** par rapport aux tables de vérité.

En effet, si on démontre $\vdash F$, alors $[\![F]\!]_v = V$ pour toute valuation v [3].

3. *i.e.* toutes les lignes de la table de vérité ont V dans la colonne de F.

Démontrer la correction

Ça semble évident, mais il y a quelques subtilités

On veut montrer que si on prouve $\vdash F$, alors F est une tautologie.

Mais pour la démonstration, on doit aussi regarder les séquents plus hauts dans la preuve, qui peuvent être de la forme $\Gamma \vdash A$.

Et A n'est pas forcément une tautologie[4]

4. Dans un axiome $\overline{A \vdash A}$, je ne peux pas regarder qu'un seul côté du séquent par exemple...

Conséquence logique

On a besoin d'une notion cruciale, plus générale que celle de tautologie :

Définition

A est **conséquence logique** d'un ensemble de formule $\Gamma = B_1, \ldots, B_n$ si : Pour **toute valuation** v telle que $[\![B_i]\!]_v = V$ pour **toutes les formules** B_i **de** Γ, on a aussi $[\![A]\!]_v = V$.

On note alors $\boxed{\Gamma \vDash A}$

Conséquence logique

On a besoin d'une notion cruciale, plus générale que celle de tautologie :

Définition

A est **conséquence logique** d'un ensemble de formule $\Gamma = B_1, \ldots, B_n$ si :
Pour **toute valuation** v telle que $[\![B_i]\!]_v = V$ pour **toutes les formules** B_i **de** Γ, on a aussi $[\![A]\!]_v = V$.

On note alors $\boxed{\Gamma \vDash A}$

Exemples :

- Si $A \in \Gamma$, alors $\Gamma \vDash A$
- Si $A, B \in \Gamma$, alors $\Gamma \vDash A \wedge B$
- Si $A, \neg A \in \Gamma$, alors $\Gamma \vDash \bot$
- Si A est une tautologie, alors $\emptyset \vDash A$ (on écrit simplement $\vDash A$ dans ce cas)

Correction et conséquence logique

Pour montrer que le système de preuve est *correct*, il faut en fait montrer que si $\Gamma \vdash A$ est issu d'un arbre de preuve, alors $\Gamma \vDash A$.

C'est facile à montrer pour les axiomes, puis il faut raisonner par *induction*, c'est-à-dire montrer que toutes les règles de déduction préservent cette propriété.

[Présentation de quelques exemples, on ne rédigera pas la preuve en détail]

Définition

Un système de déduction est **cohérent** s'il ne démontre jamais de contradiction.

C'est-à-dire qu'il n'existe aucune formule A telle que $\vdash A$ et $\vdash \neg A$ soient prouvables.

Cohérence

D'un système logique

Définition

Un système de déduction est **cohérent** s'il ne démontre jamais de contradiction.

C'est-à-dire qu'il n'existe aucune formule A telle que $\vdash A$ et $\vdash \neg A$ soient prouvables.

Pour le démontrer dans le cas de la logique propositionnelle :

Facile, avec le théorème de correction, on sait que si A et $\neg A$ étaient prouvables, alors ils seraient des tautologies, ce qui est impossible si $V \neq F$.

Complétude

Définition

Un système de déduction est **complet** s'il permet de montrer <u>toutes</u> les formules vraies (dans la sémantique)

Complétude

Définition

Un système de déduction est **complet** s'il permet de montrer toutes les formules vraies (dans la sémantique)

Théorème (admis)

La déduction naturelle est complète pour la logique propositionnelle.
(Autrement dit, toutes les tautologies sont démontrables)

Complétude

Définition

Un système de déduction est **complet** s'il permet de montrer toutes les formules vraies (dans la sémantique)

Théorème (admis)

La déduction naturelle est complète pour la logique propositionnelle.
(Autrement dit, toutes les tautologies sont démontrables)

"Vous vous souvenez de moi ?"

Ce n'est pas toujours vrai...

Décidabilité

Définition

Un système logique est **décidable** s'il existe un algorithme permettant de déterminer si une formule est un théorème ou non.

Pour le cas de la logique propositionnelle, c'est hyper facile, voici l'algorithme :

Décidabilité

Définition

Un système logique est **décidable** s'il existe un algorithme permettant de déterminer si une formule est un théorème ou non.

Pour le cas de la logique propositionnelle, c'est hyper facile, voici l'algorithme :
Faire la table de vérité et regarder la dernière colonne.

Est-ce que cet algorithme est bien ?

Est-ce que cet algorithme est bien ?

Non.

Est-ce que cet algorithme est bien ?

Non.
En pratique, on peut vouloir savoir si une formule éventuellement très longue peut être vraie.
Le nombres de lignes de la taille de vérité est exponentiel (2^n), à grande échelle, on ne peut plus espérer avoir la réponse, même informatiquement.

Est-ce que cet algorithme est bien ?

Non.
En pratique, on peut vouloir savoir si une formule éventuellement très longue peut être vraie.
Le nombres de lignes de la taille de vérité est exponentiel (2^n), à grande échelle, on ne peut plus espérer avoir la réponse, même informatiquement.

SAT

C'est en fait un problème central. Si vous trouvez un algorithme plus efficace (pas exponentiel), vous pouvez devenir riche. . .
(Car ça répond à la question $P = NP$?)

Résumé

La déduction naturelle pour la logique propositionnelle est :

- Correcte (on ne démontre que des tautologies)
- Complète (on peut démontrer toutes les tautologies)
- Cohérente (on ne peut pas démontrer de contradiction)
- Décidable (on a un algorithme pour tester si une formule est une tautologie)

C'est la même chose de dire pour une formule A :

- Qu'elle est démontrable ($\vdash A$)
- Qu'elle est vraie dans toute interprétation possible ($\vDash A$)
- Que notre algorithme va répondre "vraie" quoi qu'il arrive (toutes les lignes des tables de vérité à V)

Ne mélangez pas ces concepts pour autant, car ça ne veut toujours dire la même chose ! !

Dans la suite du cours

Calcul des prédicats

- Système logique plus expressif [5] (on peut formaliser plus de choses)
- Déduction naturelle, avec de nouvelles règle pour les nouvelles parties du langage
- Sémantique un peu plus complexe. Grosse différence : les tables de vérité ne marchent plus, et on n'a pas d'équivalent !
- Complétude
- Correction
- Pas décidable

5. Mais on garde tous les connecteurs propositionnels et leurs règles.