

Numération au cycle 3

Anatole et sa vieille guimbarde (âgée de plus de huit ans : finie la prime à la casse !) « **PIM, PAM, POUM** ».

La voiture d'Anatole possède un (très) vieux compteur kilométrique qui marque uniquement des nombres à trois chiffres. Ce compteur fait des bruits « zarrbis » à chaque kilomètre parcouru, c'est à dire, chaque fois qu'un chiffre apparaît sur le compteur.

- Il fait **PIM** à chaque changement du chiffre de droite.
- Il fait **PAM** à chaque changement de chiffre du milieu.
- Il fait **POUM** à chaque changement du chiffre de gauche.

Anatole va faire une promenade en guimbarde et met son compteur à zéro au départ. A son retour, son compteur indique **247km**.

Question : combien de bruits Anatole a-t-il entendu pendant sa promenade ?

Patrick Wieruszewski Formateur Espé

Activité avec des réglettes Cuisenaire

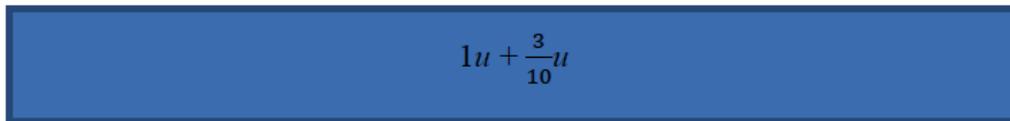
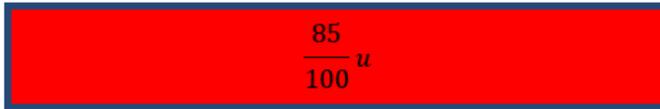
- 1) L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette orange. Trouver la longueur des réglettes jaunes, rouges et blanches.
- 2) L'unité est définie comme étant la longueur de la réglette bleue. Trouver la longueur des réglettes vertes foncé et blanche.
- 3) La réglette orange vaut deux unités. Trouver la longueur des réglettes jaunes, blanches, marron/noires et roses/violettes.
- 4) La réglette blanche vaut un septième de l'unité. Trouver l'unité.
- 5) La réglette verte clair vaut $\frac{3}{4}$ de l'unité. Trouver l'unité.

LES BANDES ACCOLEES

D'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 » B. Anselmo H., Zucchetta, B. Rozanès (Canopé Editions)

DESCRIPTION RAPIDE : On dispose de deux bandes de longueurs différentes dont la mesure donnée est une fraction décimale de l'unité. Les élèves doivent d'abord prévoir quelle sera la longueur obtenue en mettant les deux bandes bout à bout puis trouver une disposition des nombres qui leur permette d'effectuer rapidement l'addition posée des deux mesures....

MATERIEL :



- Une demi-droite graduée en centièmes
- Deux bandes respectivement de longueur $1u + \frac{3}{10}u$ et $\frac{85}{100}u$ à projeter ou à construire en grand pour pouvoir être affichées au tableau.

CONSIGNES

1. Vous rangez les bandes et les droites graduées dans une enveloppe. Vous devez prévoir combien mesurerait une bande ayant la même longueur que vos deux bandes mises bout à bout. On les sortira ensuite pour vérifier.
2. Vous devez maintenant essayer de poser l'addition de $1u + \frac{3}{10}u$ et $\frac{85}{100}u$ (Cela doit vous permettre de retrouver le résultat précédent.) Vous travaillerez d'abord seuls puis vous vous mettez d'accord à plusieurs sur une disposition qui vous semble pratique.

L'APPRENTI COMPTABLE

D'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 » B. Anselmo H., Zucchetta, B. Rozanès (Canopé Editions)

DESCRIPTION RAPIDE :

▲ Dans cette activité, les élèves se retrouvent dans un 1er temps plongés en l'an 1500. Ils disposent uniquement des écritures sous forme d'entiers, de fractions décimales ou de sommes de ceux-ci.

Ils doivent trouver comment faire pour additionner des nombres écrits à l'aide de fractions décimales, puis écrire un court texte pour expliquer leur démarche.

▲ Dans un 2ème temps, après qu'ils se sont rendus compte que la majorité des méthodes proposées sont fastidieuses, la découverte de Stevin, « les nombres de Disme », leur est alors exposée : elle permet de calculer avec ces nombres « selon la vulgaire manière [...] des nombres entiers ».

MATERIEL : l'énoncé !

Nous sommes en l'an 1500 ap. J.C. À cette époque, les seuls nombres connus sont : les entiers, les fractions, les fractions décimales, et les sommes d'un entier et de fractions décimales.

Tu apprends le métier de comptable. Pour ta formation, le comptable qui t'emploie t'a chargé, aujourd'hui, d'effectuer une addition. Ensuite, lorsque tu sauras faire, tu devras transmettre ton savoir-faire à un apprenti encore moins expérimenté que toi.

Tu dois effectuer la somme des trois quantités écrites dans les cadres ci-dessous :

$$27 u + \frac{8}{10} u + \frac{4}{100} u + \frac{7}{1000} u$$

$$37 u + \frac{6}{10} u + \frac{7}{100} u + \frac{5}{1000} u$$

$$875 u + \frac{7}{10} u + \frac{8}{100} u + \frac{2}{1000} u$$

Effectue l'addition suivant la méthode que tu peux imaginer en vigueur à cette époque.

N'oublie pas de penser à écrire ce que tu expliqueras à l'apprenti que tu seras chargé de former ensuite.

CONSIGNES

1. Travaille seul. Lorsque tu auras terminé, écris une explication pour ton apprenti, sans attendre que tes camarades aient fini.
2. Mettez-vous d'accord, par groupe, sur une façon de procéder et rédiger un mode d'emploi.
3. Quelle impression te font toutes ces méthodes utilisées dans la classe ?

RANGER DES SURFACES

D'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 » B. Anselmo H., Zucchetta, B. Rozanès (Canopé Editions)

DESCRIPTION RAPIDE : Dans cette activité, les élèves en binôme, ont à comparer des surfaces dont la mesure de l'aire leur est donnée en écriture décimale. Pour avoir un appui sur lequel fonder leur raisonnement, ils construisent d'abord une de ces surfaces, à l'aide de pièces dont les aires sont des fractions décimales de celle d'un rectangle unité donné.

PREREQUIS : Pour aborder cette activité, les élèves doivent avoir été familiarisés :

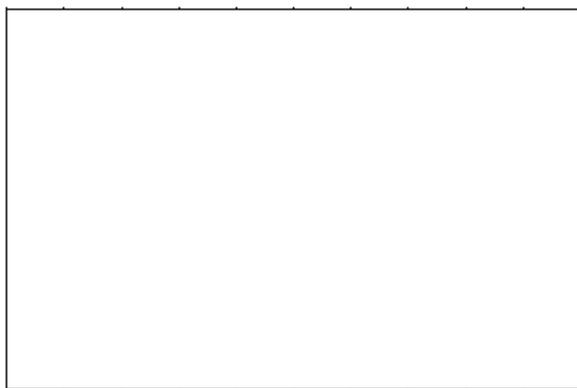
- Avec la notion d'aire
- Avec la notion de fraction décimale (dixième, centième)
- Avec la notion d'écriture décimale (en lien avec l'écriture fractionnaire d'un décimal)

MATERIEL : par binôme

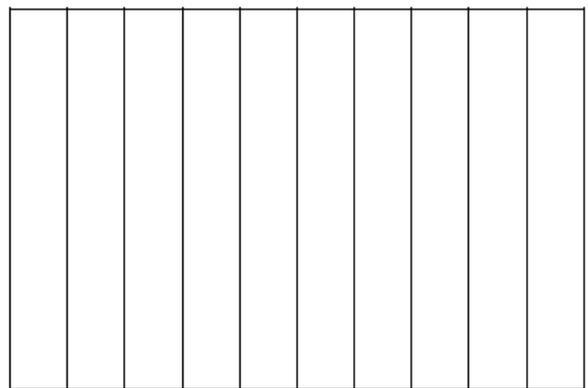
- Une fiche « énoncé » donnant les indications suivantes :

surface	a	b	c	d	e	f
aire	5,05 u	10,24 u	2,7 u	5,5 u	2,12 u	2,08 u

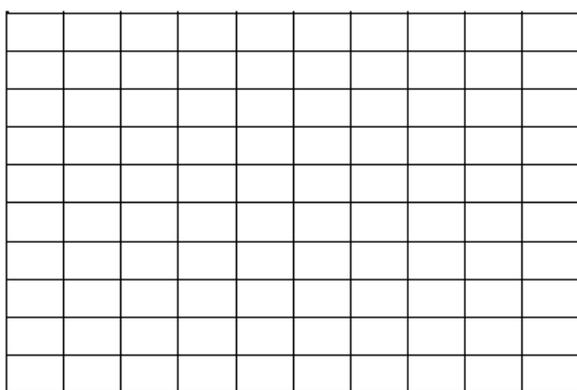
- Des surfaces à découper, telles que celles présentées ci-dessous, en quantité suffisante :



1 u



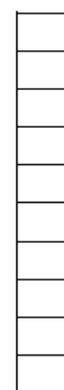
1 u



1 u



$\frac{1}{10}$ u



$\frac{1}{10}$ u



$\frac{1}{100}$ u

CONSIGNES

1. Avec le matériel que je vous ai distribué, vous ne devez construire qu'une seule surface : celle qui correspond à la lettre que je vous ai indiquée (vous pouvez utiliser des ciseaux pour effectuer des découpages et votre colle pour coller votre surface réponse sur la feuille).
2. Ensuite, quand vous aurez terminé, vous rangerez toutes les surfaces, de celle qui a la plus petite aire à celle qui a la plus grande aire, mais sans en construire de nouvelles, juste en regardant les nombres et en utilisant ce qu'ils veulent dire, vous écrirez votre rangement au dos de la feuille.

Document Eduscol Fractions et nombres décimaux au cycle 3

Stratégies d'enseignement : des fractions simples aux nombres décimaux

À l'entrée au cycle 3, les élèves ont déjà rencontré des écritures à virgule à travers l'usage social, dans le contexte des grandeurs (prix, taille, masse, etc.). Les formulations utilisées à l'oral dans la vie courante pour les exprimer, comme « trois euros vingt-cinq » pour 3,25 €, ou « trois mètres vingt-cinq » pour 3,25 m laissent entendre que ces nombres sont conçus comme la juxtaposition de deux entiers plutôt que comme un nombre décimal. En effet, on dit « trois euros vingt-cinq » ou « trois mètres vingt-cinq » tout comme on dit « trois heures vingt-cinq », montrant bien qu'il s'agit là d'une juxtaposition des euros et des centimes d'euros, ou des mètres et des centimètres, comme sont juxtaposées les heures et les minutes. Démarrer l'apprentissage des nombres décimaux en s'appuyant sur cet usage ne favorise de ce fait sans doute pas leur compréhension et risque au contraire d'encourager les élèves à concevoir l'écriture à virgule d'un nombre comme étant composée de deux nombres entiers, juxtaposés et séparés par une virgule.

Les ruptures et continuités énoncées dans le paragraphe précédent expliquent le choix indiqué dans les programmes, de construire les décimaux à partir des fractions décimales, dès le début du cycle 3. Cette construction est un processus progressif qui nécessite du temps et s'organise de façon graduelle selon les étapes déclinées ci-dessous ; il est essentiel que les nouveaux éléments introduits soient explicitement mis en lien avec les éléments préexistants, et que ces derniers continuent de vivre en articulation avec les nouvelles notions.

Pour chacune de ces étapes, le recours à l'oral est privilégié et les écritures symboliques utilisant le trait de fraction et la virgule ne sont introduites qu'une fois le sens construit et non *a priori* ; le repérage sur une demi-droite graduée est une forme de représentation qui participe à la compréhension des différentes notions travaillées.

Introduction de l'écriture à virgule

L'écriture à virgule est une convention qui permet d'écrire les nombres décimaux en prolongeant le système décimal de position utilisé pour écrire les nombres entiers :

- la virgule sert à repérer le chiffre des unités, elle est placée immédiatement à droite de celui-ci ;
- le chiffre qui est immédiatement à droite de l'unité a une valeur dix fois plus petite que celle de l'unité : c'est donc le chiffre des dixièmes ; le chiffre qui vient immédiatement à droite du chiffre des dixièmes a une valeur dix fois plus petite que le chiffre des dixièmes, c'est donc le chiffre des centièmes car 10 centièmes = 1 dixième, etc.

24 dixièmes c'est 20 dixièmes et 4 dixièmes donc 2 unités et 4 dixièmes que l'on va, **par convention**, écrire 2,4.

$\frac{358}{100} = \frac{300}{100} + \frac{50}{100} + \frac{8}{100} = 3 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100}$. Ainsi, $\frac{358}{100}$ est égal à 3 unités, 5 dixièmes et 8 centièmes, soit, par convention 3,58.

La bonne compréhension de la notation à virgule sera travaillée tout au long du cycle, notamment avec des nombres dont l'écriture contient des zéros, nécessitant de bien comprendre ce que représente chaque chiffre dans l'écriture à virgule. Par exemple, les élèves peuvent être invités à donner l'écriture à virgule de nombres décimaux comme : 3 unités et 5 centièmes ; 6 dizaines et 5 centièmes ; $8 + \frac{5}{100}$; $\frac{7}{100}$; 5 dixièmes ; etc.

Il convient d'être vigilant dans la construction simultanée du sens (compréhension de l'aspect positionnel et décimal de notre numération) et de la technique lors des travaux dédiés aux changements d'écriture d'un même nombre : un élève pourrait donner l'illusion de maîtriser les transformations d'écritures alors qu'il n'agit que par mimétisme, notamment s'il utilise un tableau de numération.

Par exemple, un élève pourrait réussir un exercice procédural du type « Décompose comme dans l'exemple suivant : $3,58 = 3 + \frac{5}{10} + \frac{8}{100}$ les nombres 7,59 et 6,17 » sans avoir compris la numération décimale de position.

En revanche une tâche plus ouverte du type « Donne différentes écritures de 12,8 » ou « Donne différentes écritures de $\frac{128}{10}$ », laisse davantage d'initiatives aux élèves et offre la possibilité de recueillir un grand nombre de réponses différentes, y compris incorrectes, ce qui permet de travailler les liens entre les diverses écritures et de concevoir les erreurs comme des étapes nécessaires à la bonne appropriation de la notion de nombre décimal.

Document Eduscol Fractions et nombres décimaux au cycle 3 Annexe 2

Situation 2 : Construction de nombres

RAPPEL

« Avant d'introduire l'écriture à virgule, il est nécessaire de faire travailler les élèves sur des situations variées mobilisant des fractions décimales, en veillant à ne pas se limiter à des exercices répétitifs uniquement techniques convoquant la reproduction plutôt que la compréhension. »

Type de séance	Réinvestissement des fractions décimales de dénominateur 10 et 100.
Savoir en jeu	Fractions simples, fractions de dénominateurs 10 et 100. Cette séance s'inscrit dans le parcours de la construction du nombre décimal.
Objectifs pour l'élève	Mettre du sens derrière des écritures des fractions décimales (en mot ou en écriture symbolique), comprendre les équivalences entre certaines de ces écritures, consolider le sens de « dixième » et « centième », construire une image mentale de leur valeur.

Modalités (scénario), mise en commun, synthèse

Les élèves disposent en plusieurs exemplaires :

- d'unités ;
- d'unités partagées en 10 parts égales ;
- d'unités partagées en 100 parts égales ;
- des cartes sur lesquelles figurent des nombres.

Matériel

Les élèves travaillent en groupe. Une seule carte-nombre est distribuée à chaque groupe au début. La tâche consiste en premier lieu à construire le nombre figurant sur la carte à l'aide des unités.

Exemples de cartes

206 centièmes	2 unités et 6 centièmes	$2 + \frac{6}{100}$	$\frac{26}{100}$
26 dixièmes	$\frac{20}{10} + \frac{6}{100}$		

Remarques :

Les cartes sont différentes suivant les groupes (un groupe doit construire le nombre 26 dixièmes, un autre groupe construit le nombre 206 centièmes...).

Lorsqu'un groupe a terminé, l'enseignant distribue une autre carte.

Ce scénario permet une différenciation naturelle : l'objectif est le même pour toute la classe, mais certains groupes pourront construire plus de nombres que d'autres, chacun ayant le temps d'avancer à son rythme.

A propos de l'enseignement des nombres décimaux :

1. Donnez au moins deux définitions d'un nombre décimal

2. Numérotez pour les remettre dans l'ordre ces trois étapes de l'apprentissage

- Fraction décimale
- Nombres décimaux
- Fractions simples

Qu'est-ce qui justifie cet ordre ?

3. Les principales difficultés rencontrées par les élèves sont dues au fait qu'ils essaient de manipuler les nombres décimaux comme des entiers, or, il existe certes des « points communs » mais aussi des « différences » importantes.

Repérez ces continuités et ces ruptures entre l'apprentissage des nombres entiers et l'apprentissage des nombres décimaux.

Nombres entiers positifs	Nombres décimaux positifs	Rupture ou Continuité ?
Tout nombre entier a un successeur	La notion de successeur n'a pas de sens	R
La valeur de chaque chiffre dépend de sa position dans l'écriture du nombre entier.		
Dans une série de nombres, celui qui s'écrit avec le plus de chiffres est le plus grand.		
Il n'est pas toujours possible d'intercaler un entier entre deux entiers donnés.		
Les différentes unités sont liées entre elles par des « relations » décimales : dix unités d'un certain ordre sont égales à une unité de l'ordre immédiatement supérieur : dix unités, c'est une dizaine ; dix dizaines, c'est une centaine, etc.		
Multiplier un nombre par n, c'est ajouter n fois ce nombre. Le résultat obtenu est plus grand que le nombre multiplié par n.		

Analyser ces réponses d'élèves de CM2 et envisager quelle aide faudrait-il apporter pour dépasser les difficultés liées aux erreurs repérées.

Tâche 1

Entoure les écritures qui représentent $\frac{14}{10}$

140	1,40	$1 + \frac{4}{10}$	1,04	1,4	0,14
-----	------	--------------------	------	-----	------

Tâche 2

Sur chaque ligne, entoure le plus petit des trois nombres

3,7	7,1	5,1
5,21	5,15	5,12
7,3	7,28	7,401
6,04	6,4	6,44

Tâche 3

Voici une liste de décimaux : 4,25 ; 3 ; 2,7 ; 4,2 ; 3,9 ; 2,12 ; 3,09.

Écris ces nombres du plus petit au plus grand dans les cases suivantes.

2,7	2,12	3	3,09	4,2	4,25	
-----	------	---	------	-----	------	--

Tâche 4

Par rapport à 7, quel est le nombre le plus proche : 6,9 ou 7,08 ?

Réponse : 6,9

Tâche 5

a- Peux-tu citer 3 nombres compris entre 1,8 et 2,4 ? si oui, écris les :

1,9 - 2,3, 2,2

b- Même question entre 2,5 et 2,6 ?

on peut pas

c- Même question entre 2 et 2,01 ?

on peut pas

Tâche 6

$$0,8 + 0,4 = 0,12$$