Logique

Sémantique du calcul des prédicats

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2024

Contexte

On a défini un langage (encore !) permettant d'exprimer des propriétés sur des individus.

Dans ce cours

On va voir comment parler de formules "vraies" ou "fausses" pour ce langage.

Remarque

Rassurante

Ce que vous savez faire avec la logique propositionnelle sera aussi utile ici.

Ce que vous savez faire avec la logique propositionnelle sera aussi utile ici.

Exemple

$\forall x P(x) \to \forall x P(x)$ ou $\exists y Q(y) \vee \neg \exists y Q(y)$ sont des formules toujours vraies, pour les mêmes raisons qu'avant.

(mais on ne peut plus utiliser les tables de vérité, on sera obligé de raisonner sur le sens des connecteurs)

En logique propositionnelle, on peut montrer qu'une formule est vraie sans les tables de vérité, avec une rédaction précise du raisonement.

Pour $A \to B$, on peut utiliser le raisonnement hypothétique, supposer que A est vrai, et en déduire que B est vrai avec des arguments précis. (C'est ce qu'on fait en déduction naturelle)

Avec les prédicats

Comment on montre que $P(x)$ est vrai ou faux ?

Avec les prédicats

Comment on montre que $P(x)$ est vrai ou faux ?

C'est impossible, pour plusieurs raisons.

- On n'a pas d'interprétation pour P (c'est comme vouloir montrer que p est vrai en logique propositionnelle, on peut pas)

Avec les prédicats

Comment on montre que $P(x)$ est vrai ou faux ?

C'est impossible, pour plusieurs raisons.

- On n'a pas d'interprétation pour P (c'est comme vouloir montrer que p est vrai en logique propositionnelle, on peut pas)
- On ne sait pas à quoi correspond x. Mais rappelez-vous, on ne veut pas de formules avec des variables libres, justement car on ne peut pas les interpréter…

Qu'est-ce que l'on cherche précisément à montrer ?

On peut s'intéresser à deux "vérités" possibles .

- Savoir si une formule est vraie pour une certaine interprétation.
- Savoir si une formule est toujours vraie, c'est-à-dire dans *n'importe quelle interprétation*.

1. Ça correspondait à une ligne de la table de vérité.
2. Voir si c'était une tautologie.

Qu'est-ce que l'on cherche précisément à montrer ?

On peut s'intéresser à deux "vérités" possibles .

- Savoir si une formule est vraie pour une certaine interprétation.
- Savoir si une formule est toujours vraie, c'est-à-dire dans *n'importe quelle interprétation*.

En logique propositionnelle, on a fait les deux :

- savoir si une formule est vraie quand p est vrai et q faux, etc... [1]
- savoir si une formule est vraie avec toutes les interprétations possibles des variables. [2]

1. Ça correspondait à une ligne de la table de vérité.
2. Voir si c'était une tautologie.

Pourquoi ça va être un peu différent

Pour une variable propositionnelle : deux interprétations possibles (V ou F). Donc on peut tester toutes les possibilités.

Pour un prédicat : en général, une infinité d'interprétations possibles, on ne peut pas tout mettre dans une table et calculer automatiquement le résultat.

(sinon le calcul des prédicats serait décidable)

Pourquoi ça va être un peu différent

Pour une variable propositionnelle : deux interprétations possibles (V ou F). Donc on peut tester toutes les possibilités.

Pour un prédicat : en général, une infinité d'interprétations possibles, on ne peut pas tout mettre dans une table et calculer automatiquement le résultat.

(sinon le calcul des prédicats serait décidable)

On va d'abord voir comment on montre qu'une formule est vraie pour une interprétation donnée.

Qu'est-ce qu'une interprétation pour le calcul des prédicats ?

On l'a déjà vu, en fait

- Un domaine de définition, c'est l'univers dans lequel on se place.
- Pour chaque symbole de prédicat, un sous-ensemble du domaine.

Remarque : les propriétés sont des sous-ensembles

Dans le dernier cours, $V =$ "être vertébré" correspond aussi à l'ensemble de tous les vertébrés (qui est un sous-ensemble des animaux, ou des êtres vivants).

C'est-à-dire qu'en logique, c'est la même chose de dire "x est vertébré" ou "x appartient aux vertébrés".[3]

3. Ça s'appelle *l'extensionnalité des concepts*.

Notation

Il faut faire la différence entre un symbole du langage, comme P, et son interprétation (comme un sous ensemble).

Interprétation des prédicats

Si P est un prédicat du langage, et qu'on a une interprétation dans un domaine D, alors on note $[\![P]\!]$ le sous-ensemble de D qui correspond au symbole P dans l'interprétation.

Par exemple, si on considère le domaine des nombres entiers, et un prédicat P pour interpréter les nombres pairs, alors $[\![P]\!]$ est l'ensemble des nombres pairs.

Notation

Il faut faire la différence entre un symbole du langage, comme P, et son interprétation (comme un sous ensemble).

Interprétation des prédicats

Si P est un prédicat du langage, et qu'on a une interprétation dans un domaine D, alors on note $[\![P]\!]$ le sous-ensemble de D qui correspond au symbole P dans l'interprétation.

Par exemple, si on considère le domaine des nombres entiers, et un prédicat P pour interpréter les nombres pairs, alors $[\![P]\!]$ est l'ensemble des nombres pairs.

Il est inclus dans l'ensemble des nombres entiers, on écrit $[\![P]\!] \subseteq \mathbb{N}$.

Prédicats et interprétation

Quand on a une interprétation pour les prédicats, on peut donner du sens aux formules de la forme $P(x)$.

Prédicats et interprétation

Quand on a une interprétation pour les prédicats, on peut donner du sens aux formules de la forme $P(x)$.

$P(x)$ sera vraie si l'élément associé à x appartient à $[\![P]\!]$.

Bien sûr, tant qu'on ne sait pas si on cherche un élément particulier ($\exists$), ou si on veut montrer que c'est vrai pour tout le monde ($\forall$), on ne peut pas répondre à cette question.

Qu'est-ce que n'est pas une interprétation ?

[domaine = êtres humains, $[\![P]\!]$ = vertébrés] ne marche pas, car P est plus grand que le domaine.[4]

[domaine = $\mathbb{N}$, $[\![P]\!]$ = irrationnels]. Idem, et ici P n'a même pas un seul élément dans le domaine.

[P = étudiants, Q = enseignants] ne marche pas, car on n'a pas précisé le domaine (gens de la fac, humains, animaux ?)[5]

4. On ne pourrait pas parler des vertébrés non humains dans cette interprétation, alors qu'ils existent.

5. Une même formule pourra être vraie ou fausse selon les cas...

Comment on montre que $\forall x F$ est vraie ?

6. Concrètement, D correspondra à : $\mathbb{N}$, les animaux, etc... ou n'importe quel ensemble.

Comment on montre que $\forall x F$ est vraie ?

On regarde le domaine de définition de l'interprétation, qui est un ensemble, appelons-le D[6].

Puis on dit : « soit un individu x quelconque appartenant à D ... »

Et on va essayer de montrer que F est vraie, quand x peut être **n'importe qui** dans le domaine D.

6. Concrètement, D correspondra à : N, les animaux, etc... ou n'importe quel ensemble.

Exemple

[domaine = N, $[\![P]\!]$ = nombres entiers positifs ou nuls]

$$\forall x P(x)$$

Démonstration :
« Soit x un élément quelconque de N. Montrons que $P(x)$ est vrai.
x est forcément un nombre entier positif ou nul, car c'est vrai pour tous les éléments de N. »

Remarque : $\forall x P(x)$ n'est vrai que quand $[\![P]\!]$ est le même ensemble que le domaine, du coup : on en déduit une propriété :

Pour tout prédicat ϕ, la formule $\forall x \phi(x)$ est vraie **si et seulement si** $[\![\phi]\!] = D$

(contre-)Exemple

[domaine = N, $[\![P]\!] =$ nombres **pairs**]

$$\forall x P(x)$$

Essayons de démontrer la formule : « Soit x un nombre entier quelconque. Montrons que $P(x)$ est vrai. »

(contre-)Exemple

[domaine = N, $[\![P]\!]$ = nombres **pairs**]

$$\forall x P(x)$$

Essayons de démontrer la formule : « Soit x un nombre entier quelconque. Montrons que $P(x)$ est vrai. »

On est coincés, il faut montrer que x est pair, alors qu'on sait juste que c'est un nombre entier.

(En effet, la formule est cette fois fausse pour cette interprétation. On le démontre en disant qu'il existe un contre exemple (1 ou n'importe quel nombre impair qui est bien dans N mais pas dans les nombres pairs.))

Comment on prouve que $\exists x F$ est vraie ?

Comment on prouve que $\exists x F$ est vraie ?

On doit trouver un **témoin** dans le domaine, pour lequel F est vraie.

Exemple

[domaine $= \mathbb{N}$, $P =$ nombres **pairs**]

$$\exists x P(x)$$

Essayons de démontrer la formule :

Je dois trouver un élément du domaine (un nombre entier), qui vérifie la propriété P, c'est-à-dire qui appartienne au sous ensemble P.
Ma preuve :
« $2 \in \mathbb{N}$, et $2 \in [\![P]\!]$ car 2 est pair. On a donc un témoin de nombre pair, et on peut en déduire que $\exists x P(x)$ est vraie dans cette interprétation.

Remarque

$$\exists x P(x)$$

Est une formule presque toujours vraie. Pour qu'elle soit fausse, il faut que $[\![P]\!]$ ne contienne **aucun élément**.

Pour tout prédicat ϕ, la formule $\exists x \phi(x)$ est vraie **si et seulement si** $[\![\phi]\!] \neq \emptyset$

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.
- $F_1 \vee F_2$ est vraie si F_1 **ou** F_2 est vraie.

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.
- $F_1 \vee F_2$ est vraie si F_1 **ou** F_2 est vraie.
- $F_1 \rightarrow F_2$ est vraie si quand F_1 est vraie, F_2 est vraie aussi [7]

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.
- $F_1 \vee F_2$ est vraie si F_1 **ou** F_2 est vraie.
- $F_1 \to F_2$ est vraie si quand F_1 est vraie, F_2 est vraie aussi [7]
- $\neg F$ est vraie si F n'est **pas** vraie.

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.
- $F_1 \vee F_2$ est vraie si F_1 **ou** F_2 est vraie.
- $F_1 \rightarrow F_2$ est vraie si quand F_1 est vraie, F_2 est vraie aussi [7]
- $\neg F$ est vraie si F n'est **pas** vraie.
- $\forall x F$ est vraie si F est vraie **quel que soit x dans le domaine**

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Composition

Pour les formules composées avec des connecteurs logiques, on raisonne comme avant.
En résumé :

- $F_1 \wedge F_2$ est vraie si F_1 **et** F_2 sont vraies.
- $F_1 \vee F_2$ est vraie si F_1 **ou** F_2 est vraie.
- $F_1 \to F_2$ est vraie si quand F_1 est vraie, F_2 est vraie aussi [7]
- $\neg F$ est vraie si F n'est **pas** vraie.
- $\forall x F$ est vraie si F est vraie **quel que soit x dans le domaine**
- $\exists x F$ est vraie **s'il existe un x dans le domaine** tel que F est vraie.

(Dans les deux derniers cas, x peut apparaître dans F).

7. C'est-à-dire, soit F_1 est fausse, soit F_2 est vraie.

Comment on montre que $\forall x(P(x) \to Q(x))$ est vraie ?

8. Rappel : c'est le cas si $[\![P]\!] = \emptyset$.

Comment on montre que $\forall x(P(x) \to Q(x))$ est vraie ?

" Soit x un élément quelconque du domaine.

8. Rappel : c'est le cas si $\llbracket P \rrbracket = \emptyset$.

Comment on montre que $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$ est vraie ?

“ Soit x un élément quelconque du domaine.
Supposons que x appartienne à $[\![P]\!]$.

8. Rappel : c'est le cas si $[\![P]\!] = \emptyset$.

Comment on montre que $\forall x (P(x) \to Q(x))$ est vraie ?

“ Soit x un élément quelconque du domaine.
Supposons que x appartienne à $[\![P]\!]$.
Déduisons que x appartient aussi à $[\![Q]\!]$.“

Exemples

Toutes les interprétations dans lesquelles $[\![P]\!] \subseteq [\![Q]\!]$ rendent cette formule vraie.

- $[\![P]\!] =$ vertébrés, $[\![Q]\!] =$ mammifères
- $[\![P]\!] =$ nombres pairs et $[\![Q]\!] =$ multiples de 4
- $[\![P]\!] =$ nombres impairs et $[\![Q]\!] =$ nombres premiers.

Remarque : si on montre que x ne peut pas appartenir à $[\![P]\!]$ [8] , on démontre aussi que la formule est vraie.

8. Rappel : c'est le cas si $[\![P]\!] = \emptyset$.

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $[\![P]\!]$, ni $[\![Q]\!]$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $\llbracket P \rrbracket$, ni $\llbracket Q \rrbracket$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Exemple : $\forall x((P(x) \wedge \neg P(x)) \rightarrow F)$ est toujours vraie (pour n'importe quelle formule F).

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $[\![P]\!]$, ni $[\![Q]\!]$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Exemple : $\forall x((P(x) \wedge \neg P(x)) \rightarrow F)$ est toujours vraie (pour n'importe quelle formule F).
Démonstration :

- Soit D un ensemble quelconque, le domaine de définition.

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $[\![P]\!]$, ni $[\![Q]\!]$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Exemple : $\forall x((P(x) \wedge \neg P(x)) \rightarrow F)$ est toujours vraie (pour n'importe quelle formule F).
Démonstration :

- Soit D un ensemble quelconque, le domaine de définition.
- Soit x un élément quelconque dans D

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $[\![P]\!]$, ni $[\![Q]\!]$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Exemple : $\forall x((P(x) \wedge \neg P(x)) \rightarrow F)$ est toujours vraie (pour n'importe quelle formule F).
Démonstration :

- Soit D un ensemble quelconque, le domaine de définition.
- Soit x un élément quelconque dans D
- Soit $[\![P]\!]$ un sous-ensemble quelconque de D.

Théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule est toujours vraie ?

$\rightarrow$ on fait pareil, sauf qu'on ne connaît pas $[\![P]\!]$, ni $[\![Q]\!]$, ni le domaine, ça peut être n'importe quels ensembles.

Exemple : $\forall x((P(x) \land \neg P(x)) \rightarrow F)$ est toujours vraie (pour n'importe quelle formule F).
Démonstration :

- Soit D un ensemble quelconque, le domaine de définition.
- Soit x un élément quelconque dans D
- Soit $[\![P]\!]$ un sous-ensemble quelconque de D.
- Il est impossible que $x \in [\![P]\!]$ et $x \notin [\![P]\!]$, donc $(P(x) \land \neg P(x))$ ne peut pas être vrai, et l'implication est donc vraie.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème [9] ?

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème [9] ?

$\rightarrow$ on trouve une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème[9] ?

$\rightarrow$ on trouve une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Construire le contre exemple

Trouver une interprétation où $\exists x P(x)$ est vraie, et $\forall x P(x)$ est fausse :

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème[9] ?

$\rightarrow$ on trouve une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Construire le contre exemple

Trouver une interprétation où $\exists x P(x)$ est vraie, et $\forall x P(x)$ est fausse :

- Il faut que $[\![P]\!]$ contienne un élément.

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème [9] ?

$\rightarrow$ on trouve une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Construire le contre exemple

Trouver une interprétation où $\exists x P(x)$ est vraie, et $\forall x P(x)$ est fausse :

- Il faut que $[\![P]\!]$ contienne un élément.
- Pour que $\forall x P(x)$ soit fausse, il faut que tous les éléments du domaine ne soient pas dans $[\![P]\!]$.

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Non—théorèmes du calcul des prédicats

Comment on montre qu'une formule n'est pas un théorème [9] ?

$\rightarrow$ on trouve une interprétation dans laquelle la formule est fausse.

$\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

Construire le contre exemple

Trouver une interprétation où $\exists x P(x)$ est vraie, et $\forall x P(x)$ est fausse :

- Il faut que $[\![P]\!]$ contienne un élément.
- Pour que $\forall x P(x)$ soit fausse, il faut que tous les éléments du domaine ne soient pas dans $[\![P]\!]$.
- Donc il suffit de trouver un domaine D et un ensemble P qui contienne au moins un élément, mais pas tous.

9. Théorème = vrai dans toute interprétation.

Exemples d'interprétations

Qui rendent fausse la formule $\exists x P(x) \rightarrow \forall x P(x)$

- $D = \mathbb{N}$, $[\![P]\!] =$ n'importe quel ensemble de nombres qui n'est pas vide et qui ne contient pas $\mathbb{N}$ en entier (nombres pairs, nombres premiers, $\{0\}$...)
- On peut aussi construire un exemple très simple : $D = \{0, 1\}$, et $[\![P]\!] = \{1\}$.

Dans ce cas-là on a bien un élément dans P, mais pas tous...

Question

Que se passe-t-il si D ne contient qu'un seul élément ?

Exemple plus difficile

Le théorème du buveur

$$\exists x (P(x) \to \forall y P(y))$$

Exemple plus difficile

Le théorème du buveur

$$\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$$

Démonstration :

- Soit D un ensemble quelconque et P un sous ensemble quelconque de D.
- Raisonnons par cas :
  1— soit $[\![P]\!] = D$
  2— soit il existe au moins un élément e qui est dans D mais pas dans $[\![P]\!]$.
- Dans le cas 1, la formule $\forall y P(y)$ est vraie, donc l'implication sera vraie (en choisissant n'importe quel élément pour x).
- Dans le cas 2, considérons notre élément e qui n'est pas dans $[\![P]\!]$. Pour cet élément, $P(x)$ est faux, donc l'implication est vraie.

Remarque : cette formule n'est pas démontrable sans raisonner par l'absurde.