TD5 : Calcul des prédicats — Sémantique

Logique L1 MI

Jules Chouquet

Exercice 1 Rappel Rappelez la définition d'une interprétation pour le calcul des prédicats.

Exercice 2 Vérité des formules dans une interprétation fixée On fixe une interprétation pour un langage avec deux symboles de prédicats P, Q. Pour chacune des formules suivantes, déterminez elle est vraie dans l'interprétation ou non. Rédigez une démonstration précise.

Première partie :

— Domaine = Animaux
— $[\![P]\!]$ = Mammifères
— $[\![Q]\!]$ = Volants
— $[\![R]\!]$ = Ovipares[1]
— $[\![S]\!]$ = Poissons

1. $\exists x(S(x) \wedge P(x))$
2. $\forall x(Q(x) \to (P(x) \vee R(x)))$
3. $\forall x((S(x) \wedge Q(x)) \to \exists y(P(y) \wedge R(y)))$
4. $\forall x(P(x) \vee R(x)) \wedge \forall y(S(y) \to R(y))$

Deuxième partie :

— Domaine = $\mathbb{R}$ (nombres réels)
— $[\![P]\!] = \mathbb{N}$ (entiers naturels)
— $[\![Q]\!] = \mathbb{Q}$ (nombres rationnels)[2]

1. $\exists x \neg Q(x)$
2. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
3. $\forall x(P(x) \to Q(x))$
4. $\forall x Q(x) \to \exists y \neg P(y)$
5. $\forall x \forall y((\neg Q(x) \vee \neg Q(y)) \to (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$

Exercice 3 Interprétations des formules Pour chacune des formules suivantes, proposez une interprétation dans laquelle elle est vraie, et une interprétation dans laquelle elle est fausse (cherchez les exemples les plus simples possibles)

1. $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)$
2. $\forall x(P(x) \to Q(x))$
3. $\exists y(\neg P(y) \vee \neg Q(y))$
4. $\exists x \forall y(P(y) \to Q(x))$

1. Rappel : il existe des mammifères volants (chauve-souris), et des mammifères ovipares (ornithorinque)
2. On rappelle que $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 4 Théorèmes Pour chacune des formules suivantes, déterminez si c'est un théorème du calcul des prédicats, en justifiant précisément votre réponse.

1. $\forall x(P(x) \vee Q(x))$
2. $(\forall x(P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z)))$
3. $\exists x(P(x) \vee \neg P(x))$
4. $\forall x(P(x) \rightarrow \exists y P(y))$
5. $\exists x(P(x) \rightarrow \forall y P(y))$