Contrôle continu (5)
21 décembre — 1h30 minutes (tiers temps : 2h)

Logique L1 MI

Responsable : Jules Chouquet

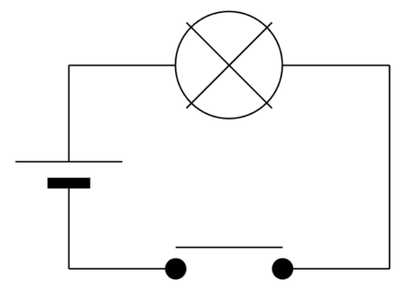
Certaines réponses doivent être rédigées sur le sujet, rendez-le avec votre copie

Tout document ou appareil est **interdit**
De plus, toute communication entre étudiants pendant l'épreuve est susceptible de faire l'objet d'un **procès verbal de tentative de fraude**.

Nom et Prénom :

Exercice 1 (Formalisation) On considère les variables propositionnelles et les associations suivantes :

- p : "lumière allumée"
- q : "circuit ouvert"



Donnez une traduction des énoncés suivants en logique propositionnelle :

1. La lumière est allumée si et seulement si le circuit est fermé
2. Si la lumière est éteinte alors le circuit est ouvert
3. Si le circuit n'est pas fermé alors la lumière n'est pas allumée
4. La lumière est allumée seulement si le circuit est fermé
5. Pour que la lumière soit allumée, il suffit que le circuit soit fermé

Exercice 2 (Formules propositionnelles)

1. Démontrez en utilisant la **déduction naturelle** :
   (a) la formule $(p \vee q) \to (\neg\neg p \vee (r \to q))$.
   (b) que les formules $\neg p$ et $p \to \bot$ sont équivalentes
2. Démontrez en utilisant les **tables de vérité** que les formules :
$$p \to (q \wedge \neg r) \qquad \text{et} \qquad \neg p \vee \neg(\neg q \vee r)$$
   sont équivalentes. Respectez les conventions vue en cours.
3. Combien de lignes comporterait une table de vérité pour une formule avec 7 variables propositionnelles ?

Exercice 3 (Calcul des prédicats) On se donne les symboles de prédicats P, Q et R.

1. Considérons la formule suivante :

$$\exists y\big(\forall x\,(P(x) \to Q(y)) \land \forall z(Q(z) \lor Q(x) \lor Q(y)) \land (R(x) \land R(y) \land R(z))\,\big)$$

   Si la formule a des variables libres, **Entourez-les sur le sujet**, ou écrivez "pas de variable libre"
2. Rappelez la définition d'une interprétation pour le calcul des prédicats.
3. Donnez une interprétation dans laquelle la formule $\exists x P(x) \land \forall y(P(y) \to Q(y))$ est <u>vraie</u>. Expliquez pourquoi.
4. Donnez une interprétation dans laquelle la formule $\forall x \forall y((Q(x) \land P(x)) \to Q(y))$ est <u>fausse</u>. Expliquez pourquoi.

Exercice 4 (Coq) Considérons que je sois au milieu d'une preuve en Coq, avec comme but $B \to \neg C$ et comme seule hypothèse $H : \neg C \lor (A \land B)$.

1. Décrivez dans le tableau ci-dessous l'évolution du (ou des) but(s) (**uniquement les buts, pas les hypothèses)** après les tactiques suivantes, exécutées l'une après l'autre :

`intro H1.`	`case H.`	`intro H2.`	`assumption.`	`intro H4.`	`intro H5.`

2. Pensez-vous que cette preuve puisse être complétée ? Si oui, décrivez comment, si non, expliquez pourquoi.

Rappel des règles (classées par connecteur)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\text{ ax} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\to\text{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\to\text{e}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \land B}\land\text{i} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash A}\land\text{e-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \land B}{\Gamma \vdash B}\land\text{e-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \lor B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C}\lor\text{e} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \lor B}\lor\text{i-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \lor A}\lor\text{i-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\ \bot \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\text{ abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \bot}\neg\text{e} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\neg\text{i}$$