1 Filtre passe bas du premier ordre

On considère le circuit électrique ci-dessous alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω variable.

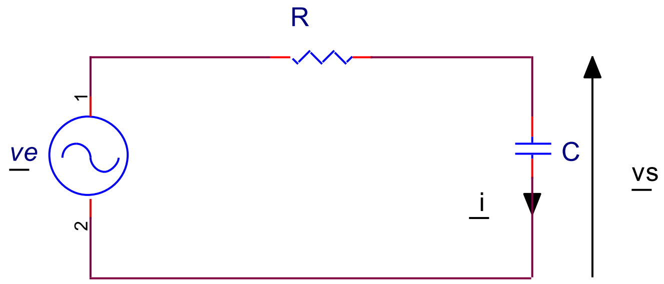

Figure 1 : Étude d'un filtre RC

Avec :

- $v_e = 2\sin\omega t$ et $\omega = 2\pi f$.
- $R = 22\ k\Omega$ et $C = 47\ nF$.

1.1 Détermination théorique

Rappel

Le filtre passe-bas n'autorise que les signaux basses fréquences de 0 Hz jusqu'à la fréquence de coupure, il produit une atténuation de – 20 dB/décade au-dessus de la fréquence de coupure. Ceci revient à bloquer les signaux de fréquences plus élevées.

La fréquence à laquelle se produit la transition est appelée la fréquence « coupure ».

Les filtres passifs simples de premier ordre (1er ordre) peuvent être réalisés en connectant ensemble une seule résistance R et un seul condensateur C en série à travers un signal d'entrée, (v_{in}) avec la sortie du filtre, (v_{out}) prise à la connexion de ces deux composants.

Comme mentionné en cours, l'impédance d'un condensateur varie inversement avec la fréquence, tandis que la valeur de la résistance reste constante au fur et à mesure que la fréquence change.

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega} = \frac{1}{jC2\pi f}$$

Aux basses fréquences, l'impédance capacitive du condensateur sera très importante par rapport à la valeur résistive de la résistance et bloque tout courant circulant dans le condensateur. La tension aux bornes de la résistance sera nulle. L'ensemble du signal d'entrée est passé directement à la sortie dans le domaine des basses fréquences.

Aux hautes fréquences, l'inverse est vrai, v_C étant petit et v_R étant grand en raison de la variation de la valeur de l'impédance capacitive. La tension de sortie sera fortement atténuée aux hautes fréquences (il diminue rapidement.), créant ce qui est communément appelé un **filtre passe-bas**.

1.1.1 Déterminer la fonction de transfert *T(jω)* de ce montage.

On applique la relation du pont diviseur en tension :

$$\underline{v}_s(j\omega) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}\underline{v}_e(j\omega) = \frac{1}{jC\omega} \times \frac{1}{\left[\frac{1}{jC\omega} + R\right]} \times \underline{v}_e(j\omega) = \frac{\underline{v}_e(j\omega)}{1 + jRC\omega}$$

Soit l'expression de la fonction de transfert :

$$T(j\omega) = \frac{\underline{v}_s(j\omega)}{\underline{v}_e(j\omega)} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

1.1.2 Exprimer la fonction de transfert *T(jω)* sous la forme : $\boldsymbol{T(j\omega) = \frac{T_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}}$

On pose :

$$T_0 = 1 \; et \; RC = \frac{1}{\omega_0} = \frac{1}{2\pi f_0} \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC} = \frac{1}{22 \times 10^3 \times 47 \times 10^{-9}} = 967\, rd.s^{-1}$$

1.1.3 Tracer la courbe asymptotique et la courbe réelle du gain $\boldsymbol{T_{dB} = 20log|T(j\omega)|}$.

On peut désormais passer à l'étude du filtre dans les différents domaines de fréquence $(\omega \ll \omega_0, \omega = \omega_0,\ \omega \gg \omega_0)$.

Pour $\omega \ll \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx 1$$

$$T_{dB} = 20log|T(j\omega)| = 0\, dB$$

L'asymptote à basse fréquence est la droite $T_{dB} = 0\, dB$.

Pour $\omega = \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j}$$

$$T_{dB} = 20log|T(j\omega)| = 20log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\, dB$$

Pour $\omega \gg \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx j\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$T_{dB} = 20log|T(j\omega)| = 20log\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}} = 20log\omega_0 - 20log\omega$$

L'asymptote à haute fréquence est la droite $T_{dB} = 20log\frac{\omega_0}{\omega}$. Cette droite est de pente ***– 20 dB par décade*** ce qui signifie que si ω est multiplié par 10, le gain T_{dB} diminue de *20 dB* donc le signal de sortie est divisé par 10.

1.1.4 Tracer la courbe asymptotique et la courbe réelle de l'argument $\varphi(\omega)$.

Pour $\omega \ll \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx 1$$

$$\varphi(\omega) = arctan\frac{0}{1} = 0°$$

A basse fréquence la phase tend vers 0 par valeur négative.

Pour $\omega = \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j}$$

$$\varphi(\omega) = arctan\frac{0}{1} - arctan\frac{1}{1} = 0 - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} = -45°$$

Pour $\omega \gg \omega_0$:

$$T(j\omega) = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$$\varphi(\omega) = arctan\frac{0}{1} - arctan\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{0} = 0 - arctan(\infty) = -\frac{\pi}{2} = -90°$$

A haute fréquence la phase tend vers -90°.

On effectue une simulation sous Matlab pour tracer le diagramme de Bode.

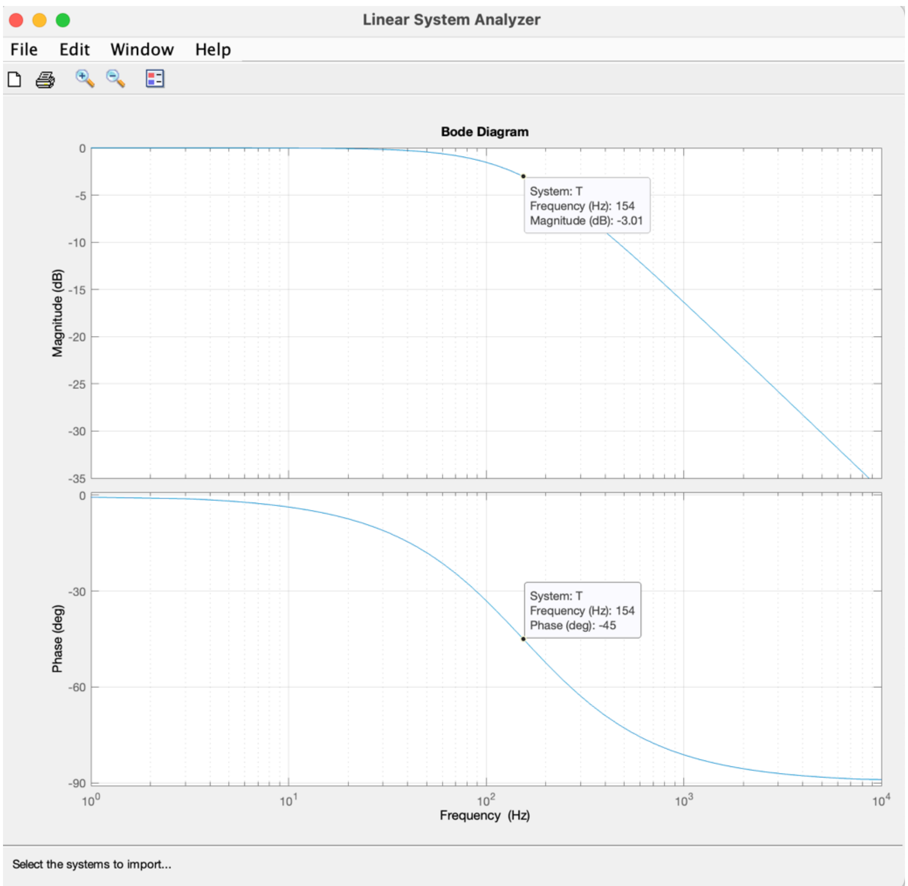

Figure 2 : Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre passe bas

La figure 2 montre que pour les fréquences supérieures à f_0, le signal de sortie décroît à une vitesse de 20 dB par décade, soit une réduction de 20 dB chaque fois que la fréquence est multipliée par 10.

On peut aussi effectuer une simulation sous LTspice pour tracer le diagramme de Bode.

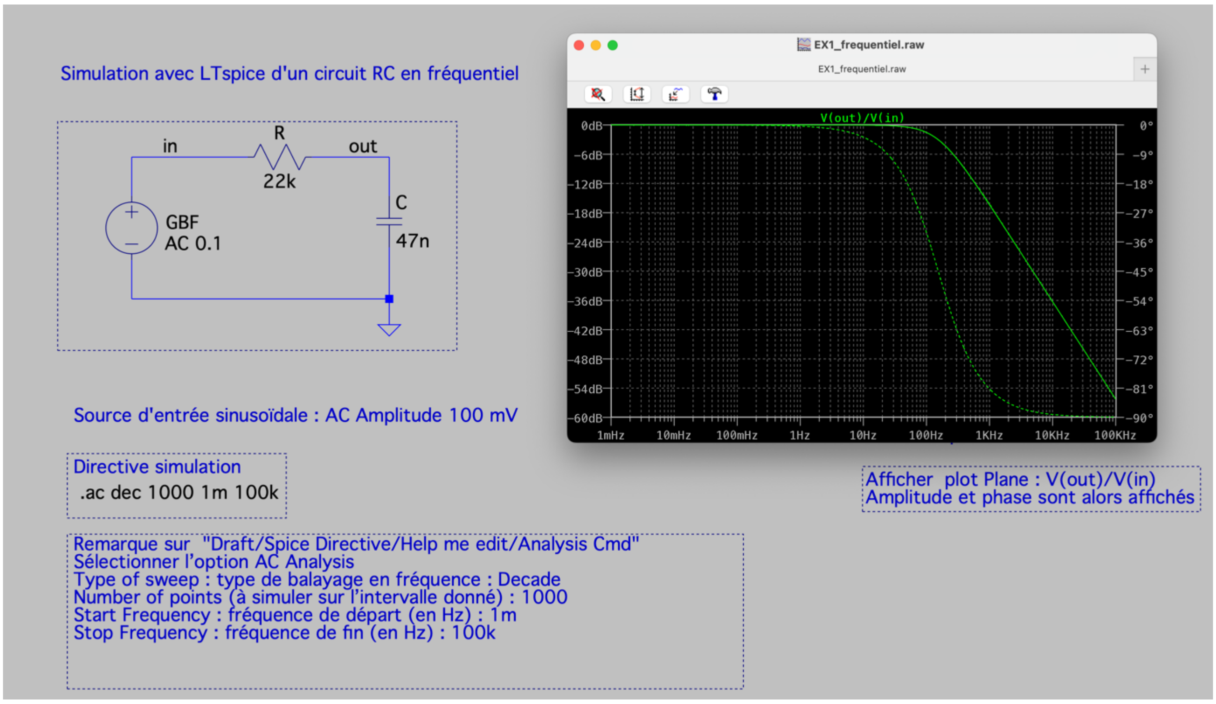

Figure 3 : Diagramme de Bode asymptotique d'un filtre passe bas

Comme on peut le voir dans le diagramme ci-dessus, le filtre passe-bas produit **un gain unitaire** (0 dB) pour les signaux basses fréquences. À la fréquence de coupure, il y a une **réduction du gain de 3dB**. Au-dessus de la fréquence de coupure, le **gain est divisé par 10** (- 20 dB) à chaque décade.

Les filtres passe-bas sont souvent utilisés pour nettoyer les signaux, à savoir éliminer le bruit.

Les filtres passe-bas sont largement utilisés dans systèmes audio, systèmes de communication, alimentations et de nombreux autres appareils électroniques

1.1.5 Déterminer la fréquence de coupure et la nature de ce filtre.

On notera f_0 la fréquence de coupure du filtre.

$$f_0 = \frac{1}{2\pi RC} = \frac{1}{2\pi \times 22 \times 10^3 \times 47 \times 10^{-9}} = 154\ hertz$$

Il s'agit d'un filtre passe-bas car il laisse passer les basses fréquences et atténue les hautes fréquences, c'est-à-dire les fréquences supérieures à la fréquence de coupure.

1.2 Détermination pratique

1.2.1 Réaliser le montage ci-dessus sur platine *Lab*.

On réalise le montage suivant :

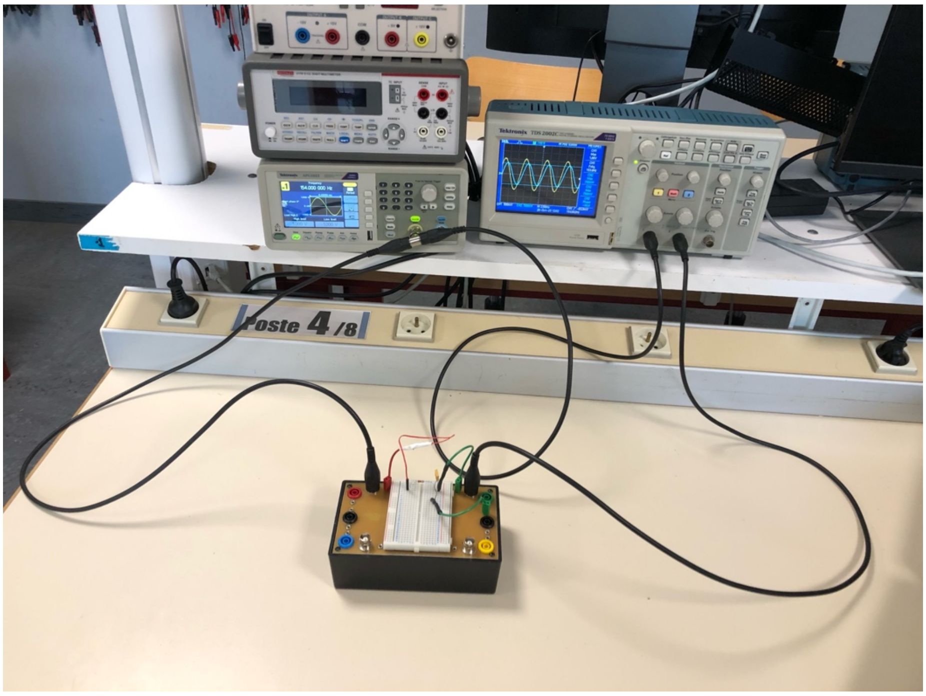

Figure 4 : Montage

1.2.2 A l'aide d'un balayage de la fréquence du *GBF*, déterminer la fréquence de coupure et l'intervalle de la fréquence nécessaire pour tracer par la suite le diagramme de Bode du circuit.

On régle le GBF de façon à ce qu'il délivre une tension $v_e(t)$ d'amplitude $\pm 1V$ et de fréquence 154 Hz.

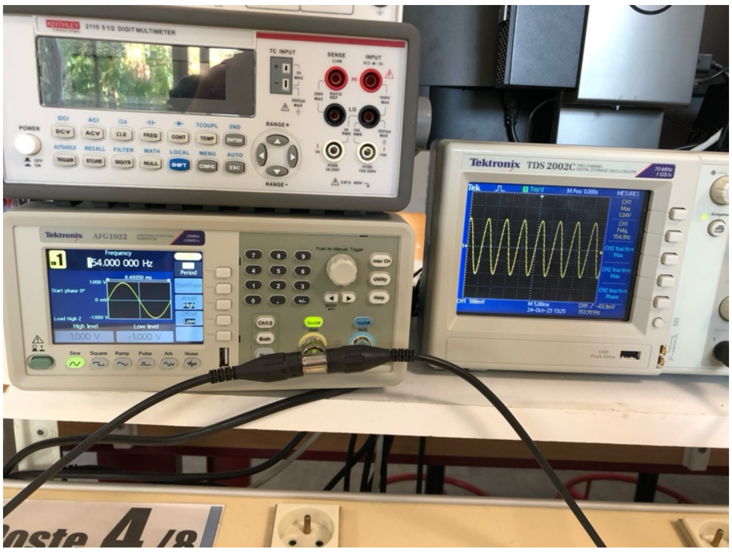

Figure 5 : Réglage GBF

On déconnecte le signal d'entrée de la platine *Lab*. On vérifie à l'aide de l'oscilloscope le bon réglage du GBF.

Nature du filtre

On se place sur une fréquence très basse ($\simeq$ 15 Hz) puis on augmente progressivement la fréquence (jusqu'à $\simeq$ 15 kHz) tout en observant l'évolution des signaux à l'écran de l'oscilloscope.

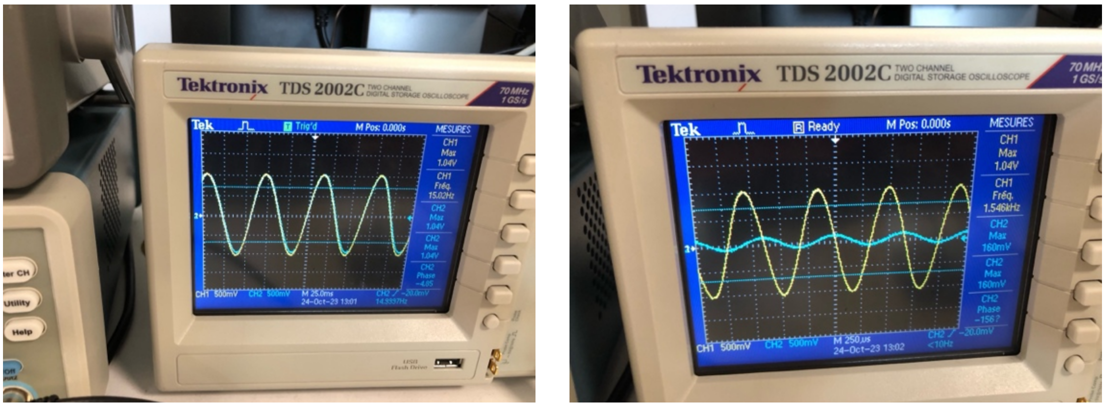

Figure 6 : Signal en BF et signal en HF

Le circuit du filtre étudié permet le passage des signaux basses-fréquences tout en atténuant les signaux hautes fréquences, il s'agit donc d'un filtre passe bas.

Détermination de la fréquence de coupure

La fréquence de coupure à - 3 dB s'obtient lorsque la transmittance du filtre est égale à $\frac{T_0}{\sqrt{2}}$.

On règle à l'aide du GBF l'amplitude du signal d'entrée à ± 1 volt (signal jaune). On positionne les curseurs de CH2 à $\pm 0{,}707$ volts.

Lorsque le signal CH2 (bleu) tangente les curseurs, on obtient la fréquence de coupure.

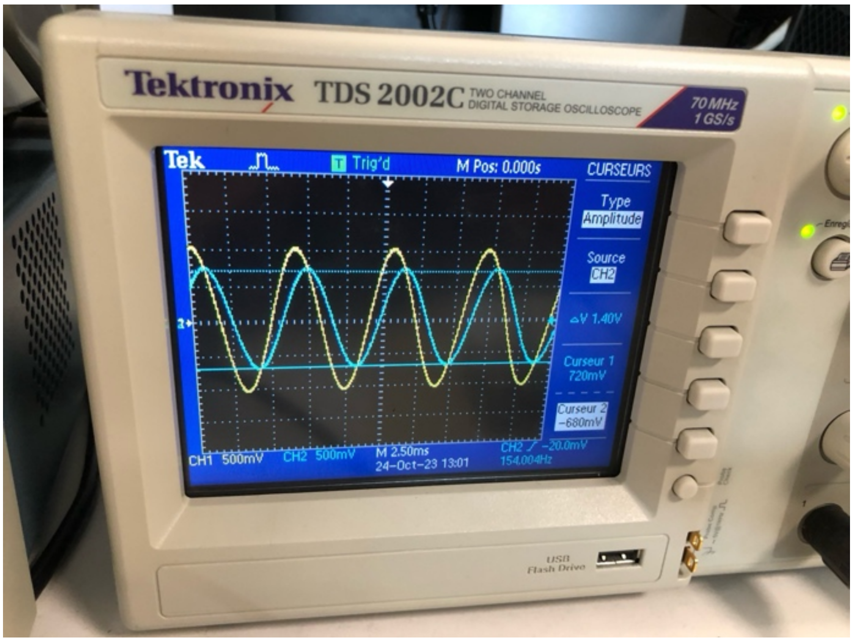

Figure 7 : Signaux à la fréquence de coupure

A l'aide du menu mesure, on relève les tensions des signaux d'entrée et de sortie ainsi que le déphasage. Pour un filtre passe-bas du 1er ordre la phase est de – 45°, soit ici une fréquence de coupure de 154 Hz.

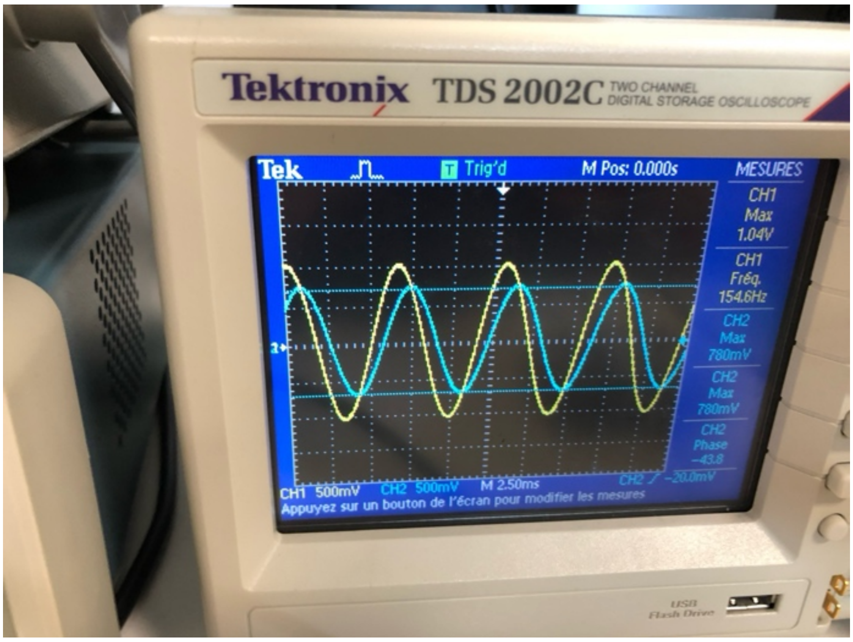

Figure 8 : Mesure à la fréquence de coupure

1.2.3 Relever à l'aide d'un oscilloscope les tensions efficaces V_e, V_s, la fréquence f et le déphasage φ.

L'échelle de fréquence en abscisse sera logarithmique : il ne faut donc pas espacer les prises de mesures de manière régulière comme on a l'habitude de le faire (ne pas prendre des mesures tous les 500 Hz par exemple).

Il faudra relever certains points sur les courbes : il faut alors que la courbe soit "précise" autour de ces points. Il faut donc prendre beaucoup de mesures autour des points caractéristiques de chaque courbe cf colonne de gauche du tableau.

On obtient le tableau de mesures suivant.

f/f_0	f(Hertz)	V_{emax} (V)	V_{smax} (V)	Gain (dB)	Phase (degré)
0,08	12,32	1,04	1,04	0	-4,87
0,1	15,4	1,04	1,04	0	-5,54
0,2	31	1,04	1,04	0	-11,9
0,5	77	1,04	0,96	-0,7	-26,7
0,8	123	1,04	0,84	-1,85	-36,8
1	**154**	**1,04**	**0,78**	**-2,5**	**-44,4**
2	308	1,04	0,472	-6,86	-62
5	770	1,04	0,208	-14	-78,1
8	1232	1,04	0,134	-18	-81,6
10	1540	1,04	0,110	-19,51	-83,8
100	15400	1,04	0,014	-40	-86,4

Tableau 1

1.2.4 Tracer la courbe du gain $T_{dB} = 20log_{10}|T(j\omega)|$ et la courbe de l'argument $\varphi(\omega)$.

On obtient le diagramme de Bode suivant :

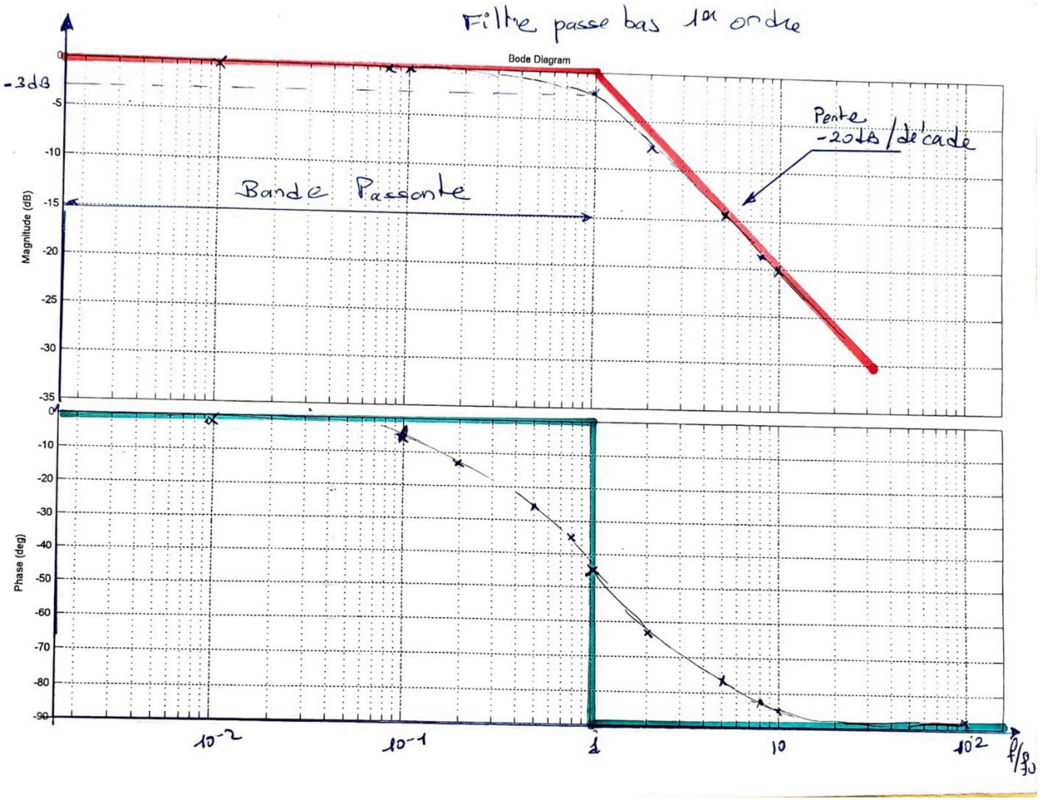

Figure 9 : Diagramme de Bode réel d'un filtre passe bas

1.2.5 Conclure.

La bande de fréquences en dessous de la zone de coupure est appelée « Pass Band » et la bande de fréquences après la fréquence de coupure est appelée « Stop Band ».

A partir du tracé, il est clair que des basses fréquences jusqu'à la fréquence de coupure, le gain est constant car la tension de sortie est proportionnelle à la tension d'entrée. Ceci est dû à l'impédance capacitive qui agit comme un circuit ouvert à basses fréquences. En effet, la valeur de l'impédance capacitive est très élevée aux basses fréquences donc elle a une plus grande capacité à bloquer le courant dans le circuit.

Après la fréquence de coupure, la tension de sortie diminue progressivement et atteint zéro. On observe que le gain diminue également avec une pente de -20 dB/décade.

Ceci est principalement dû à l'augmentation de la fréquence, lorsque la fréquence augmente la valeur de l'impédance capacitive diminue et donc la capacité à bloquer le courant à travers le condensateur diminue. Lorsque le courant à travers la sortie du circuit est en court-circuit. La tension de sortie du filtre est donc nulle aux hautes fréquences.

Si la fréquence d'entrée du filtre augmente, le signal de sortie est plus déphasé. La fréquence de coupure d'un filtre passe-bas passif dépend principalement des valeurs de résistance et de condensateur utilisées dans le filtrage du circuit. Cette fréquence de coupure est inversement proportionnelle à la fois aux valeurs de résistance et de condensateur.