TD1 — Alphabets, Mots, Langages

Ex1 Déterminer l'ensemble des préfixes et suffixes du mot $caaba$. Combien possède-t-il de facteurs ?

Ex2 Démontrer que $(uv)^R = v^R u^R$ pour tous mots $u, v \in A^*$.

Ex3 Démontrer qu'il n'existe pas de mot $u \in \{a, b\}^*$ tel que $au = ub$.

Ex4 Soient les trois langages $X = \{ab, a\}$, $Y = \{bb, ba\}$ et $Z = \{b, aa, aba\}$. Calculer les langages suivants : XY, X^*, $X + Y$, $X^2 \setminus Z$.

Ex5. Opérations sur les langages Soient X, Y et Z trois langages sur un même alphabet.

(a) Démontrer les propriétés suivantes :

- $X(Y + Z) = XY + XZ$;
- $X \subseteq Y \Rightarrow X^* \subseteq Y^*$;
- $(X^*)^* = X^*$;
- $(X + Y)^* = (X^* Y^*)^*$;

(b) Comparer les ensembles suivants (Justifier) :

- $(XY)^*$ et $X^* Y^*$;
- $(X \cup Y)^*$ et $X^* \cup Y^*$.

Ex6. Codes Un langage $X \subseteq A^*$ est un code si pour tous entiers m, n et toute suite $u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_n$ de mots de X, l'égalité $u_1 u_2 \cdots u_m = v_1 v_2 \cdots v_n$ implique les égalités $m = n$ et $u_i = v_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$.

(a) Identifier les codes parmi les langages suivants. Justifier.

- $X_1 = \{a, ab\}$;
- $X_2 = \{a, ab, ba\}$;
- $X_3 = \{ab, bc, ca\}$.

(b) Démontrer qu'un langage $\{u, v\}$ de deux mots est un code si et seulement si $uv \neq vu$;

(c) Démontrer l'affirmation suivante. Si, pour tous éléments $u, v \in L$, le mot u n'est jamais un préfixe propre du mot v alors L est un code.