Automates, Langages et Logique

3. Automates finis non déterministes

***L2**, Université d'Orléans — S1 2024/2025*

Nicolas Ollinger

Rappels

Un **automate fini déterministe** $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ reconnait le langage $L(\mathcal{A}) \in \mathrm{Rec}\, A^*$ des mots étiquettant des **chemins acceptants** de l'automate.

Un langage est **reconnaissable** s'il est reconnu par un AFD. Dans ce cas, il est reconnu par un AFD **complet** avec au plus deux états puits.

Deux automates sont **équivalents** s'ils reconnaissent le même langage.

Automate fini non déterministe (AFN)

Définition Un **automate fini non déterministe** (noté **AFN** dans la suite) $\mathcal{A}$ est un quintuplet (Q, A, T, I, F) avec

- Q l'ensemble fini des **états** ;
- A l'**alphabet** d'entrée ;
- $T \subseteq Q \times A \times Q$ la **relation de transition** ;
- $I \subseteq Q$ l'ensemble des **états initiaux** ;
- $F \subseteq Q$ l'ensemble des **états acceptants** de l'automate.

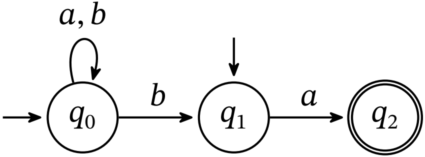
Automate fini non déterministe (AFN)

Définition Un **automate fini non déterministe** (noté **AFN** dans la suite) $\mathcal{A}$ est un quintuplet (Q, A, T, I, F) avec

- Q l'ensemble fini des **états** ;
- A l'**alphabet** d'entrée ;
- $T \subseteq Q \times A \times Q$ la **relation de transition** ;
- $I \subseteq Q$ l'ensemble des **états initiaux** ;
- $F \subseteq Q$ l'ensemble des **états acceptants** de l'automate.

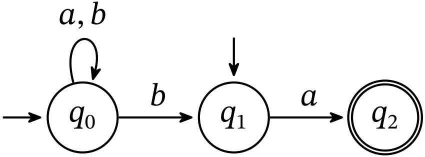
On relâche les contraintes de **déterminisme**. Qu'est-ce que cela change ?

3 modes de représentation



représentation graphique

3 modes de représentation

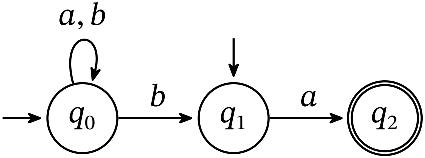


représentation graphique

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0	q_0, q_1
$\rightarrow q_1$	q_2	$\emptyset$
q_2 *	$\emptyset$	$\emptyset$

représentation tabulaire

3 modes de représentation



représentation graphique

	a	b
$\rightarrow q_0$	q_0	q_0, q_1
$\rightarrow q_1$	q_2	$\emptyset$
q_2 *	$\emptyset$	$\emptyset$

tabulaire — états en lignes

	$\downarrow q_0$	$\downarrow q_1$	q_2 *
a	q_0	q_2	$\emptyset$
b	q_0, q_1	$\emptyset$	$\emptyset$

tabulaire — états en colonnes

Fermeture transitive réflexive

La **relation de transition** est étendue aux **mots** par **fermeture**.

La **relation de transition étendue** applique successivement la relation de transition aux différentes lettres qui composent le mot.

Fermeture transitive réflexive

La **relation de transition** est étendue aux **mots** par **fermeture**.

La **relation de transition étendue** applique successivement la relation de transition aux différentes lettres qui composent le mot.

T^* est la plus petite relation qui satisfait pour tout **état** $q \in Q$, **lettre** $x \in A$ et **mot** $u \in A^*$:

$$
\begin{aligned}
(q, \varepsilon, q) &\in T^* \\
(q, x, q') &\in T^* \quad \text{si } (q, x, q') \in T \\
(q, u \cdot x, q') &\in T^* \quad \text{si } \begin{cases} (q, u, q'') \in T^* \\ (q'', x, q') \in T \end{cases} \quad \text{pour un certain } q'' \in Q
\end{aligned}
$$

Chemin dans un automate

La **relation de transition** T décrit les transitions $q \xrightarrow{a} q'$ possibles dans l'automate.

Chemin dans un automate

La **relation de transition** T décrit les transitions $q \xrightarrow{a} q'$ possibles dans l'automate.

Définition Un **chemin** dans un AFN (Q, A, T, I, F) est une suite finie de transitions successives $p_0 \xrightarrow{x_0} p_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} p_n$ où p_0 est l'**état de départ**, p_n est l'**état d'arrivée** et $(p_i, x_i, p_{i+1}) \in T$ pour tout $i < n$. Le mot $x_0 \cdots x_{n-1}$ est l'**étiquette** du chemin.

Chemin dans un automate

La **relation de transition** T décrit les transitions $q \xrightarrow{a} q'$ possibles dans l'automate.

Définition Un **chemin** dans un AFN (Q, A, T, I, F) est une suite finie de transitions successives $p_0 \xrightarrow{x_0} p_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} p_n$ où p_0 est l'**état de départ**, p_n est l'**état d'arrivée** et $(p_i, x_i, p_{i+1}) \in T$ pour tout $i < n$. Le mot $x_0 \cdots x_{n-1}$ est l'**étiquette** du chemin.

En utilisant la **relation de transition étendue** on s'autorise une notation plus concise $p_0 \xrightarrow{x_0 x_1 \cdots x_{n-1}} p_n$ lorsque $(p_0, x_0 x_1 \cdots x_{n-1}, p_n) \in T^*$.

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Définition Un mot u est **accepté** par un automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un **chemin acceptant** de $\mathcal{A}$.

Langage reconnu

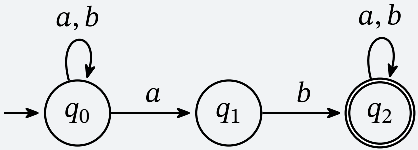
Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

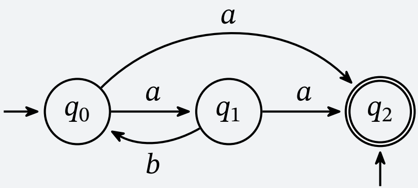
$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Définition Un mot u est **accepté** par un automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un **chemin acceptant** de $\mathcal{A}$.

Définition Le **langage reconnu** par un automate $\mathcal{A}$ est l'ensemble $L(\mathcal{A})$ des **mots acceptés** par $\mathcal{A}$.

Exercice Décrire les **langages reconnus** par les automates finis non déterministes suivants.





Fonction de transition

Comment définir une **fonction de transition** sur un **AFN** ?

Fonction de transition

Comment définir une **fonction de transition** sur un **AFN** ?

Définition La **fonction de transition** $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ d'un AFN (Q, A, T, I, F) est définie pour tout état $q \in Q$ et lettre $x \in A$ par

$$\delta(q, x) = \{q' \in Q \big| (q, x, q') \in T\} \quad .$$

Fonction de transition

Comment définir une **fonction de transition** sur un **AFN** ?

Définition La **fonction de transition** $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ d'un AFN (Q, A, T, I, F) est définie pour tout état $q \in Q$ et lettre $x \in A$ par

$$\delta(q, x) = \{q' \in Q \big| (q, x, q') \in T\} \quad .$$

La **fonction de transition étendue** capture les **états atteints**.

Fonction de transition

Comment définir une **fonction de transition** sur un **AFN** ?

Définition La **fonction de transition** $\delta : Q \times A \to \mathcal{P}(Q)$ d'un AFN (Q, A, T, I, F) est définie pour tout état $q \in Q$ et lettre $x \in A$ par

$$\delta(q, x) = \{q' \in Q \big| (q, x, q') \in T\} \quad .$$

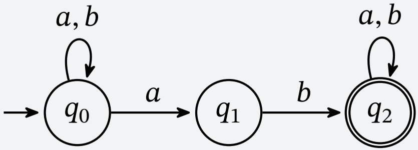
La **fonction de transition étendue** capture les **états atteints**.

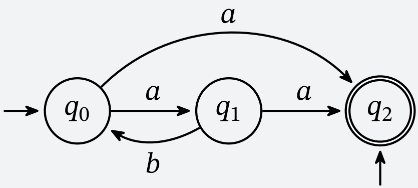
Définition La **fonction de transition étendue** $\delta^* : \mathcal{P}(Q) \times A^* \to \mathcal{P}(Q)$ d'un AFN (Q, A, T, I, F) est définie récursivement pour tout ensemble d'états $E \subseteq Q$, mot $u \in A^*$ et lettre $x \in A$ par

$$\delta^*(E, \varepsilon) = E$$

$$\delta^*(E, u \cdot x) = \cup_{q \in \delta^*(E,u)} \delta(q, x)$$

Exercice Calculer $\delta^*(E, x)$ pour tout $E \subseteq Q$ et $x \in \{a, b\}$ pour chacun des automates suivants.





Déterminisation

Les automates **non déterministes** n'apportent pas d'**expressivité**…

Déterminisation

Les automates **non déterministes** n'apportent pas d'**expressivité**…

Proposition Tout AFN est **équivalent** à un AFD.

Déterminisation

Les automates **non déterministes** n'apportent pas d'**expressivité**…

> ***Proposition*** Tout AFN est **équivalent** à un AFD.

…ils apportent parfois de la **concision** !

Déterminisation

Les automates **non déterministes** n'apportent pas d'**expressivité**…

Proposition Tout AFN est **équivalent** à un AFD.

…ils apportent parfois de la **concision** !

Proposition La familles des **langages reconnaissables** est stable par miroir, *i.e.* si $L \in \mathrm{Rec}\, A^*$ alors $L^R = \{u^R \mid u \in L\} \in \mathrm{Rec}\, A^*$.

Exercice Soit L_n le langage des mots sur l'alphabet $\{a, b\}$ qui contiennent un a en n^{e} position en partant de la fin du mot.

(a) Donner une **expression régulière** pour L_n ;

(b) Proposer un **AFN** à $O(n)$ états pour L_n ;

(c) Combien d'états pour un **AFD** reconnaissant L_n ?

Transitions enrichies

Que se passe-t-il si on **étiquette** les **transitions** par des **mots** $u \in A^*$ plutôt que par des **lettres** $x \in A$?

Transitions enrichies

Que se passe-t-il si on **étiquette** les **transitions** par des **mots** $u \in A^*$ plutôt que par des **lettres** $x \in A$?

Remarque Une transition $q \xrightarrow{u_0 \cdots u_n} q'$ étiquetée par un mot **non vide** peut être transformée par ajout de nouveaux états en une suite de transitions $q = q_0 \xrightarrow{u_0} q_1 \xrightarrow{u_1} q_2 \cdots \xrightarrow{u_n} q_{n+1} = q'$.

Transitions enrichies

Que se passe-t-il si on **étiquette** les **transitions** par des **mots** $u \in A^*$ plutôt que par des **lettres** $x \in A$?

Remarque Une transition $q \xrightarrow{u_0 \cdots u_n} q'$ étiquetée par un mot **non vide** peut être transformée par ajout de nouveaux états en une suite de transitions $q = q_0 \xrightarrow{u_0} q_1 \xrightarrow{u_1} q_2 \cdots \xrightarrow{u_n} q_{n+1} = q'$.

Mais…et le **mot vide** alors ?

Transitions spontanées

Une **ε-transition** est une transition spontanée $q \xrightarrow{\varepsilon} q'$.

Transitions spontanées

Une **ε-transition** est une transition spontanée $q \xrightarrow{\varepsilon} q'$.

Définition Un **automate fini non déterministe avec transitions spontanées** (noté **ε-AFN** dans la suite) $\mathcal{A}$ est un quintuplet (Q, A, T, I, F) avec

- Q l'ensemble fini des **états**;
- A l'**alphabet** d'entrée;
- $T \subseteq Q \times (A \cup \{\varepsilon\}) \times Q$ la **relation de transition**;
- $I \subseteq Q$ l'ensemble des **états initiaux**;
- $F \subseteq Q$ l'ensemble des **états acceptants** de l'automate.

Fermeture transitive réflexive

La **relation de transition étendue** applique successivement la relation de transition aux différentes lettres qui composent le mot.

T^* est la plus petite relation qui satisfait pour tout **état** $q \in Q$, **mot** $x \in A \cup \{\varepsilon\}$ et **mot** $u \in A^*$:

$$
\begin{aligned}
(q, \varepsilon, q) &\in T^* \\
(q, x, q') &\in T^* \quad \text{si } (q, x, q') \in T \\
(q, u \cdot x, q') &\in T^* \quad \text{si } \begin{cases} (q, u, q'') \in T^* \\ (q'', x, q') \in T \end{cases} \quad \text{pour un certain } q'' \in Q
\end{aligned}
$$

Chemin dans un ε-AFN

La définition de chemin reste la même.

Chemin dans un ε-AFN

La définition de chemin reste la même.

Définition Un **chemin** dans un ε-AFN (Q, A, T, I, F) est une suite finie de transitions successives $p_0 \xrightarrow{x_0} p_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} p_n$ où p_0 est l'**état de départ**, p_n est l'**état d'arrivée** et $(p_i, x_i, p_{i+1}) \in T$ pour tout $i < n$. Le mot $x_0 \cdots x_{n-1}$ est l'**étiquette** du chemin.

Chemin dans un ε-AFN

La définition de chemin reste la même.

Définition Un **chemin** dans un ε-AFN (Q, A, T, I, F) est une suite finie de transitions successives $p_0 \xrightarrow{x_0} p_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} p_n$ où p_0 est l'**état de départ**, p_n est l'**état d'arrivée** et $(p_i, x_i, p_{i+1}) \in T$ pour tout $i < n$. Le mot $x_0 \cdots x_{n-1}$ est l'**étiquette** du chemin.

En utilisant la **relation de transition étendue** on s'autorise une notation plus concise $p_0 \xrightarrow{x_0 x_1 \cdots x_{n-1}} p_n$ lorsque $(p_0, x_0 x_1 \cdots x_{n-1}, p_n) \in T^*$.

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Définition Un mot u est **accepté** par un automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un **chemin acceptant** de $\mathcal{A}$.

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFN lorsque l'état de départ est un **état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$I \ni q_0 \xrightarrow{u} q_f \in F \qquad (q_0, u, q_f) \in T^*$$

Définition Un mot u est **accepté** par un automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un **chemin acceptant** de $\mathcal{A}$.

Définition Le **langage reconnu** par un automate $\mathcal{A}$ est l'ensemble $L(\mathcal{A})$ des **mots acceptés** par $\mathcal{A}$.

Exercice Soit $L \in \operatorname{Rec} A^*$, montrer que les langages des **suffixes** et **facteurs** de L sont **reconnus** par des ε-AFN.

Idée Supposer que L est reconnu par un AFD émondé.

Élimination des ε-transitions

La notion de **langage reconnaissable** est très robuste.

Élimination des ε-transitions

La notion de **langage reconnaissable** est très robuste.

Proposition Tout ε-AFN est **équivalent** à un AFN (et donc à un AFD).

Idée procéder à la fermeture (avant ou arrière) des transitions par la clôture transitive des transitions spontanées.

Élimination des ε-transitions

La notion de **langage reconnaissable** est très robuste.

Proposition Tout ε-AFN est **équivalent** à un AFN (et donc à un AFD).

Idée procéder à la fermeture (avant ou arrière) des transitions par la clôture transitive des transitions spontanées.

Proposition Tout AFN étiqueté par des **mots** est **équivalent** à un AFN.

Morphismes sur les mots

Le langage A^* muni de la concaténation et du mot vide ε est un **monoïde**.

Définition Soient $(E, \times, e)$ et $(F, \cdot, f)$ deux monoïdes. Un **morphisme** de $(E, \times, e)$ dans $(F, \cdot, f)$ est une application $\varphi : E \to F$ telle que :

(i) $\varphi(e) = f$;

(ii) $\varphi(x \times y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y)$ pour tous $x, y \in E$.

Remarque Un **morphisme sur les mots** est donc une application $\varphi : A^* \to B^*$ telle que $\varphi(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\varphi(uv) = \varphi(u)\varphi(v)$ pour tous mots $u, v \in A^*$. Il est donc complétement défini par sa restriction à A.

Stabilité

Grâce aux automates non-déterministes étiquetés par des mots, on obtient facilement de nouvelles propriétés de clôture.

Proposition La familles des **langages reconnaissables** est stable par :

(a) concaténation ; $L_1, L_2 \in \operatorname{Rec} A^* \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \in \operatorname{Rec} A^*$

(b) étoile de Kleene ; $L \in \operatorname{Rec} A^* \Rightarrow L^* \in \operatorname{Rec} A^*$

(c) image par un morphisme ; $L \in \operatorname{Rec} A^* \Rightarrow \varphi(L) \in \operatorname{Rec} A^*$

(d) image inverse. $L \in \operatorname{Rec} A^* \Rightarrow \varphi^{-1}(L) \in \operatorname{Rec} A^*$

Langages rationnels

Définition La famille $\mathrm{Rat}\, A^*$ des **langages rationnels** sur l'alphabet A est la plus petite famille de langages qui contient tous les **langages finis** sur A et qui est stable par les **opérations rationnelles** :

(i) somme (**union**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 + L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(ii) produit (**concaténation**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(iii) itération (**étoile de Kleene**). $L \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L^* \in \mathrm{Rat}\, A^*$

Langages rationnels

Définition La famille $\mathrm{Rat}\, A^*$ des **langages rationnels** sur l'alphabet A est la plus petite famille de langages qui contient tous les **langages finis** sur A et qui est stable par les **opérations rationnelles** :

(i) somme (**union**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 + L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(ii) produit (**concaténation**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(iii) itération (**étoile de Kleene**). $L \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L^* \in \mathrm{Rat}\, A^*$

On peut énoncer un théorème fondamental de la théorie des langages.

Langages rationnels

Définition La famille $\mathrm{Rat}\, A^*$ des **langages rationnels** sur l'alphabet A est la plus petite famille de langages qui contient tous les **langages finis** sur A et qui est stable par les **opérations rationnelles** :

(i) somme (**union**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 + L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(ii) produit (**concaténation**) ; $L_1, L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L_1 \cdot L_2 \in \mathrm{Rat}\, A^*$

(iii) itération (**étoile de Kleene**). $L \in \mathrm{Rat}\, A^* \Rightarrow L^* \in \mathrm{Rat}\, A^*$

On peut énoncer un théorème fondamental de la théorie des langages.

Théorème de Kleene Un langage est **rationnel** si et seulement si il est **reconnaissable**.