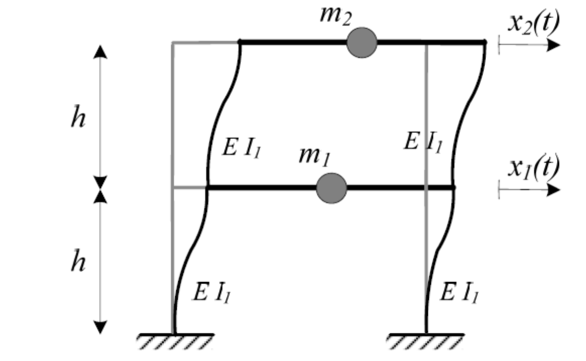
Oscillateur à plusieurs dégrées de libertés (MDDL)

On étudie un bâtiment à deux étages qui peut être simplifié comme dans la figure suivante

	m1=m2 =20 000kg $EI/h^3=7.5\ 10^5$ N/m

1) Réaliser une analyse modale de la structure en la simplifiant en un oscillateur à 2 D.D.L
    a. Calculer la matrice de rigidité
    b. Calculer la matrice de masse
    c. Trouver les valeurs propres (pulsations) et les vecteurs propres (modes)
    d. Trouver les masses et les rigidités associés à chaque mode

2) Soit un vecteur de déplacements quelconque par exemple <U>=<0.002, 0.003>. Calculer les déplacements « z » associés à chaque mode (= décomposer le vecteur U dans la base des vecteurs modaux). Cela signifier de calculer ce vecteur comme combinaison linéaire des vecteurs modaux les déplacements « z » z_i représentent les coefficients de cette décomposition.
3) Supposons maintenant que les conditions initiales de la structure sont données par $<X_0>=<U>=<0.002, 0.003>$ et $<X'_0>=<0, 0.1>$. Calculer la réponse du bâtiment (en fonction du temps) pour ces conditions
4) En utilisant la méthode de Rayleigh calculer la pulsation propre/naturelle/primaire de la structure et comparer celle-ci avec sa valeur exacte calculer au point 1.c de l'exercice

Principes d'analyse modale des systèmes à multiples dégrée de liberté (MDDL ou MDOF)

Analyse modale d'un système MDOF.

On rappelle l'analyse modale le calcul des fréquences naturelles et des modes de vibration du système. Les fréquences naturelles sont liées avec les valeurs propres du problème suivant

$$([K]-\omega^2[M])\{u\}=\{0\}$$

alors que les modes de vibrations sont les vecteurs propres associés.

Solution numérique du problème :

Pour trouver le vecteur associé à la première valeur propre on part d'un vecteur {A} quelconque et on réécrit le problème de la façon suivante :

$$\omega_n^2[m]\{A\}=[k]\{A\}$$

En multipliant par l'inverse de [k] on obtient :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\{A\}=[k]^{-1}[m]\{A\}$$

Ou encore

$$\lambda\{A\}=[D]_1\{A\}$$

La matrice [D] ainsi obtenue s'appelle la matrice dynamique.

L'algorithme (connu comme l'algorithme de la puissance itérée) consiste à faire :

- Départ : calculer la matrice dynamique $[D]=[k]^{-1}[m]$
- On prend un vecteur arbitraire $\{A\}_0$
- On itère « n fois » en faisant à chaque pas « i » :
  - $\{A\}^*_i=[D]\{A\}_{(i-1)}$ - on multiplie [D] avec le vecteur {A} de l'itération précédente
  - $\{A\}_i=(\{A\}^*_i)/a_{max}$ - on normalise le vecteur en divisant par la valeur maximale

On continue jusqu'à ce que la variation entre deux approximations successives i et i+1 est négligeable. Le dernier l calculé représente la valeur propre cherchée et le dernier vecteur normalisé le mode associé. On trouve à partir de là

$\omega=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ et ensuite $f=\frac{\omega}{2\pi}$

Si on veut calculer les autres valeurs propres et le modes associés on utilise une des méthodes dites de « glissement » ou de « déflation » ou d'autres.

Pour le faire :

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{M_1}\{\psi\}_1$$

- Une fois la première valeur calculée et le vecteur propre associé identifié on calcul la valeur la masse associée

$$M_1^2 = \{\psi\}_1^{\mathrm{T}}[m]\{\psi\}_1$$

- On calcul la matrice de « glissement » :
  - D'abord
  - Ensuite $$[S]_1 = ([I] - \{\phi\}_1\{\phi\}_1^{\mathrm{T}}[m]$$
  - Enfin on calcule une nouvelle matrice dynamique $[D]_2 = [D]_1[S]_1$
    - On applique avec cette nouvelle matrice l'algorithme de puissance itérée

Méthode de Jacob

Principe : on calcule toutes les valeurs propres et les vecteurs propres en même temps. On écrit le problème en forme de la matrice dynamique :

$$\frac{1}{\omega_n^2}\{A\} = [k]^{-1}[m]\{A\} \qquad \lambda\{A\} = [D]_1\{A\}$$

On cherche une matrice orthogonale [R] telle que $^t[R][D]^t[R]$ soit diagonale.

On trouve [R] comme produit de plusieurs matrices :

$$[R] = [R_1][R_2][R_3]\ldots$$

1- Si le terme le plus grand (en valeur absolue) hors diagonale de la matrice [D] est d_{ij} on calcule

$$\tan 2\theta = \frac{2d_{ij}}{d_{ii} - d_{jj}}$$

2 - On construit avec cette valeur la matrice $[R_1]$ (Une matrice unitaire modifiée dans les lignes/colonnes i et j comme suivante) :

$$[R_1] = \begin{array}{c} \\ i \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \cos\theta & -\sin\theta & \\ & & 1 & \\ & \sin\theta & \cos\theta & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$
$$\qquad\qquad j$$

3 – On construit la matrice $[D_2]$ comme suivante :

$$[D]_2 = [R_1]^{\mathrm{T}}[D]_1[R_1]$$

Dans cette matrice $d_{ij}=d_{ji}=0$

On repete les opérations avec $[D_2]$, et ainsi de suite

Méthodes approchées de calcul des fréquences naturelles

Quotient de Rayleigh

On peut écrire l'équation de l'analyse modale sous la forme :

$$\lambda_r[m]\{\phi\}_r = [k]\{\phi\}_r \qquad \lambda_r\{\phi\}_r^{\mathrm{T}}[m]\{\phi\}_r = \{\phi\}_r^{\mathrm{T}}[k]\{\phi]_r$$

Et donc :

$$\lambda_r = \frac{\{\phi\}_r^{\mathrm{T}}[k]\{\phi\}_r}{\{\phi\}_r^{\mathrm{T}}[m]\{\phi\}_r}$$

Le numérateur représente l'énergie potentielle et le dénominateur l'énergie cinétique. Si on remplace les vecteurs propres par un vecteur quelconque {A} on trouve :

$$\lambda_r = R(\{A\}) = \frac{\{A\}^{\mathrm{T}}[k]\{A\}}{\{A\}^{\mathrm{T}}[m]\{A\}}$$

Le processus se passe selon les phases suivantes :

1 – Faire une hypothèse pour le premier mode de vibrations (cela peut se faire par la méthode des forces associées)

2 – Calculer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle et faire le rapport.