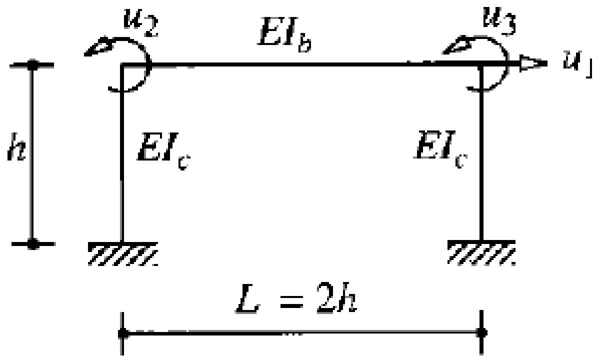
Exo 1 :Définir la rigidité latérale du portique ci-dessous constitué de 3 barres d'aciers de sections différentes. (Chopra Sec. 1.3 pg. 41)

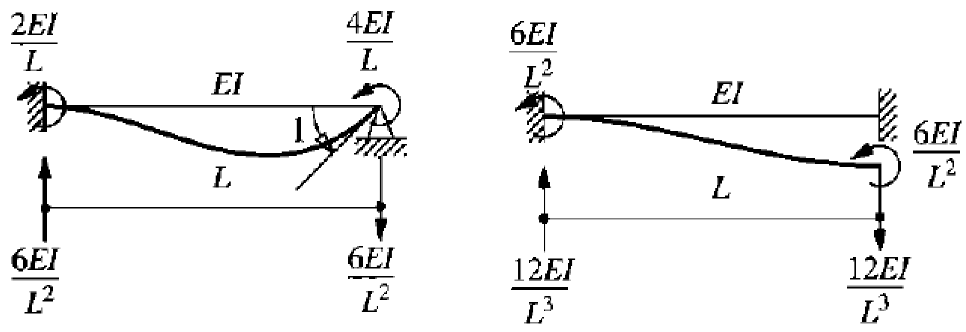


(a)

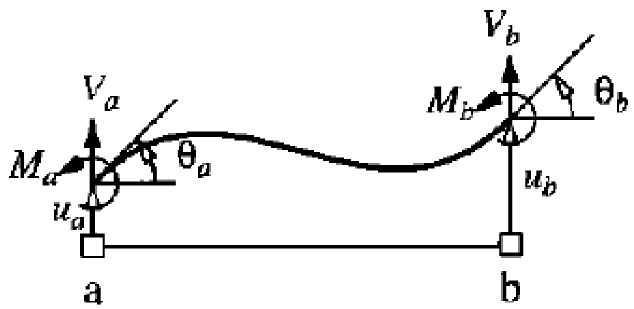
a- Identification des dégrées de libertés

3 DOF, une translation (u1) et 2 rotations (u2 et u3)
Matrice de rigidité donc 3 x 3
Le terme kij de la matrice = « force « » appliquée en i pour avoir un déplacement unitaire en j

Tableau des rigidités



(a) (b)



(c)

Dans ces figures :

a) rigidité rotationnelle b) rigidité translationnelle

Pour la combinaison (c) on peut écrire

$$M_a = \frac{4EI}{L}\theta_a + \frac{2EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \qquad V_a = \frac{12EI}{L^3}u_a - \frac{12EI}{L^3}u_b + \frac{6EI}{L^2}\theta_a + \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

$$M_b = \frac{2EI}{L}\theta_a + \frac{4EI}{L}\theta_b + \frac{6EI}{L^2}u_a - \frac{6EI}{L^2}u_b \qquad V_b = -\frac{12EI}{L^3}u_a + \frac{12EI}{L^3}u_b - \frac{6EI}{L^2}\theta_a - \frac{6EI}{L^2}\theta_b$$

Les termes ki1 de la matrice sont calculés en imposant u1=1 et u2 et u3=0

	U1	U2	U3
F1	$2\times\frac{12EI_c}{h^3}$	$\frac{6EI_c}{h^2}$	$\frac{6EI_c}{h^2}$
F2	$\frac{6EI_c}{h^2}$	$\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{L}$	$\frac{2EI_b}{L}$
F3	$\frac{6EI_c}{h^2}$	$\frac{2EI_b}{L}$	$\frac{4EI_c}{h}+\frac{4EI_b}{h}$

Dans les calculs L=2h (voir figure), donc la matrice de rigidité peut être lu

$$\frac{E}{h^3}\begin{pmatrix} 24I_c & 6hI_c & 6hI_c \\ 6hI_c & h^2(4I_c+2I_b) & 2I_bh^2 \\ 6hI_c & 2I_bh^2 & h^2(4I_c+2I_b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

$f_2 = f_3 = 0$

$$\frac{E}{h^3}\begin{pmatrix} 24I_c & 6hI_c & 6hI_c \\ 6hI_c & h^2(4I_c+2I_b) & 2I_bh^2 \\ 6hI_c & 2I_bh^2 & h^2(4I_c+2I_b) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lorsque $I_c = I_b = I$

$$\frac{EI}{h^3}\begin{pmatrix} 24 & 6h & 6h \\ 6h & 6h^2 & 2h^2 \\ 6h & 2h^2 & 6h^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = -\begin{bmatrix} 6h^2 & h^2 \\ h^2 & 6h^2 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 6h \\ 6h \end{bmatrix}u_1 = -\frac{6}{7h}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u_1$$

Et donc

$u_2 = u_3 = -\frac{6}{7h}u_1$

On obtient donc finalement :

$$f_1 = \frac{24EI}{h^3}u_1 - 2\frac{EI}{h^3}6h\frac{6}{7h}u_1 = \frac{96}{7}\frac{EI}{h^3}u_1$$

La rigidité latérale de cette structure est donc

$$k = \frac{96}{7}\frac{EI}{h^3}$$