Automates, Langages et Logique
5. Minimisation

L2, Université d'Orléans — S1 2024/2025

Nicolas Ollinger

Rappels

Un **automate fini déterministe** $\mathcal{A} = (Q, A, \delta, q_0, F)$ reconnait le langage $L(\mathcal{A}) \in \mathrm{Rec}\, A^*$ des mots étiquettant des **chemins acceptants** de l'automate.

Un langage est **reconnaissable** s'il est reconnu par un AFD. Dans ce cas, il est reconnu par un AFD **complet** avec au plus deux états puits.

Deux automates sont **équivalents** s'ils reconnaissent le même langage.

Automate fini déterministe (AFD)

Définition Un **automate fini déterministe** (noté **AFD** dans la suite) $\mathcal{A}$ est un quintuplet (Q, A, δ, q_0, F) avec

- Q l'ensemble fini des **états** ;
- A l'**alphabet** d'entrée ;
- $\delta : Q \times A \to Q \cup \{\bot\}$ la **fonction partielle de transition** ;
- $q_0 \in Q$ l'**état initial** ;
- $F \subseteq Q$ l'ensemble des **états acceptants** de l'automate.

Un AFD est **complet** si sa fonction de transition est **totale**, c'est-à-dire définie pour toute paire état/lettre.

Fonction de transition étendue

La **fonction de transition** est étendue des **lettres** aux **mots** par récurrence.

La **fonction de transition étendue** applique successivement la fonction de transition aux différentes lettres qui composent le mot.

Pour tout **état** $q \in Q$, **lettre** $x \in A$ et **mot** $u \in A^*$, on pose :

$$\delta^*(q, \varepsilon) = q$$

$$\delta^*(q, u \cdot x) = \begin{cases} \delta(\delta^*(q, u), x) & \text{si } \delta^*(q, u) \neq \bot \\ \bot & \text{sinon} \end{cases}$$

Intuitivement, $\delta^*(q, u)$ est l'**état atteint** en partant de l'état q et en lisant le mot u dans l'automate.

Chemin dans un automate

La **fonction de transition** δ décrit les transitions $q \xrightarrow{a} \delta(q,a)$ possibles dans l'automate.

Définition Un **chemin** dans un automate (Q, A, δ, q_0, F) est une suite finie de transitions successives $p_0 \xrightarrow{x_0} p_1 \xrightarrow{x_1} \cdots \xrightarrow{x_{n-1}} p_n$ où p_0 est l'**état de départ**, p_n est l'**état d'arrivée** et $\delta(p_i, x_i) = p_{i+1}$ pour tout $i < n$. Le mot $x_0 \cdots x_{n-1}$ est l'**étiquette** du chemin.

En utilisant la **fonction de transition généralisée** on s'autorise une notation plus concise $p_0 \xrightarrow{x_0 x_1 \cdots x_{n-1}} p_n = \delta^*(p_0, x_0 x_1 \cdots x_{n-1})$.

Langage reconnu

Définition Un chemin est **acceptant** pour un AFD lorsque l'état de départ est l'**état initial** et l'état d'arrivée un **état acceptant**.

$$q_0 \xrightarrow{u} q = \delta^*(q_0, u) \in F$$

Définition Un mot u est **accepté** par un automate $\mathcal{A}$ s'il est l'étiquette d'un **chemin acceptant** de $\mathcal{A}$.

Définition Le **langage reconnu** par un automate $\mathcal{A}$ est l'ensemble $L(\mathcal{A})$ des **mots acceptés** par $\mathcal{A}$.

Quotient

Définition Le **quotient gauche** d'un langage $L \subseteq A^*$ par un mot $u \in A^*$ est le langage $u^{-1}L = \{v \in A^* | uv \in L\}$.

Définition Le **quotient droit** d'un langage $L \subseteq A^*$ par un mot $u \in A^*$ est le langage $Lu^{-1} = \{v \in A^* | vu \in L\}$.

Ces notations sont **étendues aux langages** par

$$K^{-1}L = \{v \in A^* | \exists u \in K \quad uv \in L\}$$
$$LK^{-1} = \{v \in A^* | \exists u \in K \quad vu \in L\}$$

Quotients et automates finis

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) reconnaissant un langage $L \in \mathrm{Rec}\, A^*$. Pour tout état $q \in Q$, notons L_q le langage associé à l'état q, c'est-à-dire

$$L_q = \{v \in A^* | \delta^*(q, v) \in F\}$$

Lemme Pour tout $u \in A^*$ et $q = \delta^*(q_0, u)$, on a $u^{-1}L = L_q$.

Démonstration

$$\begin{aligned} u^{-1}L &= \{v \in A^* | uv \in L\} \\ &= \{v \in A^* | \delta^*(q_0, uv) \in F\} \\ &= \{v \in A^* | \delta^*(\delta^*(q_0, u), v) \in F\} \\ &= \{v \in A^* | \delta^*(q, v) \in F\} \\ &= L_q \end{aligned}$$

Caractérisation par les quotients

Proposition Un langage est **reconnaissable** si et seulement si il a un **nombre fini de quotients gauche**.

Démonstration

$\Rightarrow$ L'ensemble des quotients est contenu dans l'ensemble fini des langages L_q des états d'un automate fini qui le reconnait.

Caractérisation par les quotients

Proposition Un langage est **reconnaissable** si et seulement si il a un **nombre fini de quotients gauche**.

Démonstration

$\Rightarrow$ L'ensemble des quotients est contenu dans l'ensemble fini des langages L_q des états d'un automate fini qui le reconnait.

$\Leftarrow$ Construisons un automate à partir de l'ensemble des quotients !

Automate minimal

Définition Soit L un langage sur un alphabet A. L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ de L est l'automate (Q, A, δ, q_0, F) où :

$$
\begin{aligned}
Q &= \left\{u^{-1}L \middle| u \in A^*\right\} \\
q_0 &= \{L\} \\
F &= \left\{u^{-1}L \middle| u \in L\right\} \\
\delta(u^{-1}L, x) &= (ux)^{-1}L \qquad\qquad \forall u \in A^*, x \in A \quad .
\end{aligned}
$$

Automate minimal

Définition Soit L un langage sur un alphabet A. L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ de L est l'automate (Q, A, δ, q_0, F) où :

$$
\begin{aligned}
Q &= \left\{u^{-1}L \middle| u \in A^*\right\} \\
q_0 &= \{L\} \\
F &= \left\{u^{-1}L \middle| u \in L\right\} \\
\delta(u^{-1}L, x) &= (ux)^{-1}L \qquad \forall u \in A^*, x \in A \quad .
\end{aligned}
$$

Lemme L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ reconnaît le langage L.

Minimalité

Soit (Q, A, δ, q_0, F) un AFD reconnaissant $L \subseteq A^*$.

Lemme Soient $u, v \in A^*$. Si $u^{-1}L \neq v^{-1}L$ alors $\delta^*(q_0, u) \neq \delta^*(q_0, v)$.

Minimalité

Soit (Q, A, δ, q_0, F) un AFD reconnaissant $L \subseteq A^*$.

Lemme Soient $u, v \in A^*$. Si $u^{-1}L \neq v^{-1}L$ alors $\delta^*(q_0, u) \neq \delta^*(q_0, v)$.

Lemme Soient $p, q \in Q$ et $x \in A$. Si $\delta(p, x) = q$ alors $L_q = x^{-1}L_p$.

Minimalité

Soit (Q, A, δ, q_0, F) un AFD reconnaissant $L \subseteq A^*$.

Lemme Soient $u, v \in A^*$. Si $u^{-1}L \neq v^{-1}L$ alors $\delta^*(q_0, u) \neq \delta^*(q_0, v)$.

Lemme Soient $p, q \in Q$ et $x \in A$. Si $\delta(p, x) = q$ alors $L_q = x^{-1}L_p$.

Proposition L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ d'un **langage reconnaissable** L est l'**unique** (à renommage des états) automate fini déterministe complet de **taille minimale** reconnaissant L.

Congruence et automate quotient

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition Une **congruence** sur $\mathcal{A}$ est une **relation d'équivalence** $\sim$ sur l'ensemble Q qui vérifie pour tous $p, q \in Q$ et $x \in A$:

(i) $p \sim q \Longrightarrow (p \in F \Leftrightarrow q \in F)$;

(ii) $p \sim q \Longrightarrow \delta(p, x) \sim \delta(q, x)$.

Congruence et automate quotient

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition Une **congruence** sur $\mathcal{A}$ est une **relation d'équivalence** $\sim$ sur l'ensemble Q qui vérifie pour tous $p, q \in Q$ et $x \in A$:

(i) $p \sim q \Longrightarrow (p \in F \Leftrightarrow q \in F)$;

(ii) $p \sim q \Longrightarrow \delta(p, x) \sim \delta(q, x)$.

On note $[q]$ la classe d'équivalence de q pour $\sim$.

Définition L'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ est l'**AFD complet** $(Q/\sim, A, \delta', [q_0], [F])$ où $\delta'([q], x) = [\delta(q, x)]$.

Congruence et automate quotient

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition Une **congruence** sur $\mathcal{A}$ est une **relation d'équivalence** $\sim$ sur l'ensemble Q qui vérifie pour tous $p, q \in Q$ et $x \in A$:

(i) $p \sim q \Longrightarrow (p \in F \Leftrightarrow q \in F)$;

(ii) $p \sim q \Longrightarrow \delta(p, x) \sim \delta(q, x)$.

On note $[q]$ la classe d'équivalence de q pour $\sim$.

Définition L'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ est l'**AFD complet** $(Q/\sim, A, \delta', [q_0], [F])$ où $\delta'([q], x) = [\delta(q, x)]$.

Lemme L'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ reconnaît le langage L.

Congruence de Nerode

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition La **congruence de Nerode** de $\mathcal{A}$ est définie pour tous $p, q \in Q$ par

$$p \sim q \equiv_{\text{def}} \forall w \in A^* \quad \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$$

Congruence de Nerode

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition La **congruence de Nerode** de $\mathcal{A}$ est définie pour tous $p, q \in Q$ par

$$p \sim q \equiv_{\text{def}} \forall w \in A^* \quad \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$$

Proposition L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ est égal à l'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ où $\sim$ est la **congruence de Nerode**.

Congruence de Nerode

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition La **congruence de Nerode** de $\mathcal{A}$ est définie pour tous $p, q \in Q$ par

$$p \sim q \equiv_{\text{def}} \forall w \in A^* \quad \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$$

Proposition L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ est égal à l'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ où $\sim$ est la **congruence de Nerode**.

On peut donc construire l'automate minimal en fusionnant des états équivalents !

Congruence de Nerode

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

Définition La **congruence de Nerode** de $\mathcal{A}$ est définie pour tous $p, q \in Q$ par

$$p \sim q \equiv_{\text{def}} \forall w \in A^* \quad \delta^*(p, w) \in F \Leftrightarrow \delta^*(q, w) \in F$$

Proposition L'**automate minimal** $\mathcal{A}_L$ est égal à l'**automate quotient** $\mathcal{A}/\sim$ où $\sim$ est la **congruence de Nerode**.

On peut donc construire l'automate minimal en fusionnant des états équivalents !

Mais en pratique…comment faire ?

Méthode itérative de Moore

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

La suite $\sim_k$ de relations d'équivalences sur Q est définie récursivement par :

$$p \sim_0 q \equiv_{\text{def}} (p \in F \Leftrightarrow q \in F)$$
$$p \sim_{i+1} q \equiv_{\text{def}} p \sim_i q \wedge \forall x \in A \quad \delta(p, x) \sim_i \delta(q, x)$$

Méthode itérative de Moore

Soit $\mathcal{A}$ un **AFD complet** (Q, A, δ, q_0, F) et $L = L(\mathcal{A})$.

La suite $\sim_k$ de relations d'équivalences sur Q est définie récursivement par :

$$p \sim_0 q \equiv_{\text{def}} (p \in F \Leftrightarrow q \in F)$$
$$p \sim_{i+1} q \equiv_{\text{def}} p \sim_i q \wedge \forall x \in A \quad \delta(p, x) \sim_i \delta(q, x)$$

Proposition La suite $(\sim_i)$ atteint un point fixe $\sim_k$ pour un $k < |Q|$. Ce point fixe est égal à la **congruence de Nerode**.

Idée Définir $L_p^{(k)} = L_p \cap A^{\leqslant k}$. Montrer que $L_p^{(n-2)}$ caractérise L_p pour L.

Relations d'équivalence et partitions (rappels)

Les **classes d'équivalence** d'une **relation d'équivalence** sur un ensemble X forment une **partition** de X.

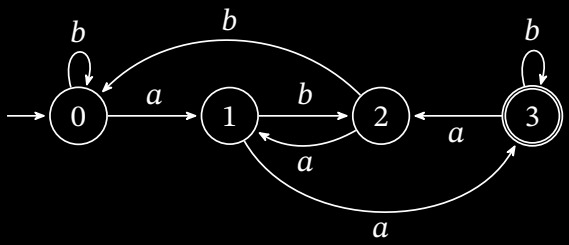
Une partition $\mathcal{P}$ d'un ensemble X est un ensemble de **parties non vides**, **disjointes** de X qui **couvrent** X.

$$\bigcup_{Y \in \mathcal{P}} Y = X \qquad Y \neq \emptyset \qquad Y \cap Y' = \emptyset \qquad \forall Y, Y' \in \mathcal{P}$$

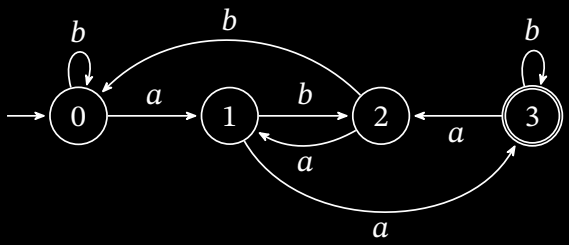
Les **éléments** d'une partition sont appelés des **classes** ou des **blocs**.

L'ensemble des partitions d'un ensemble forme un **treillis complet** pour la relation **plus fin**/**plus grossier** : une partition $\mathcal{P}$ est **plus fine** qu'une partition $\mathcal{P}'$ si les classes de $\mathcal{P}'$ sont des unions de classes de $\mathcal{P}$.

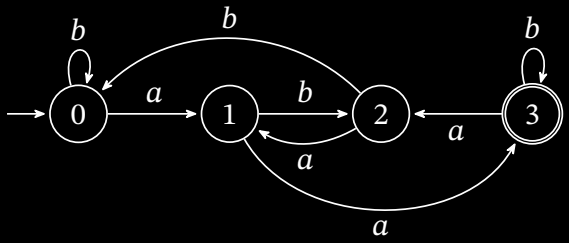
La **congruence de Nerode** est la congruence la plus grossière.



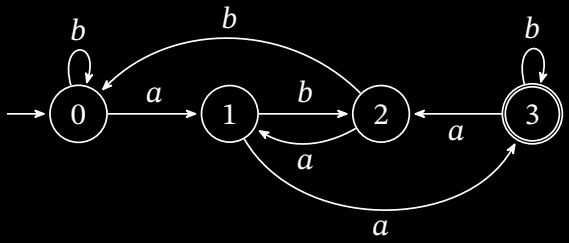
δ					
q	a	b			
$\rightarrow 0$	1	0			
1	3	2			
2	1	0			
$3 *$	2	3			



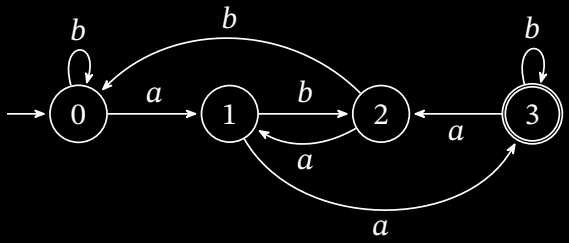
δ			$\sim_0$			
q	a	b	$[q]$			
$\to 0$	1	0	A			
1	3	2	A			
2	1	0	A			
$3*$	2	3	B			



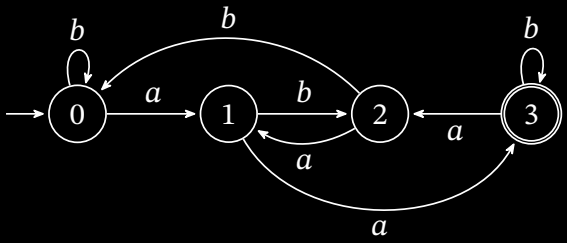
δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$			
q	a	b	$[q]$	a	b		
$\to 0$	1	0	A	A	A		
1	3	2	A	B	A		
2	1	0	A	A	A		
$3*$	2	3	B	A	B		



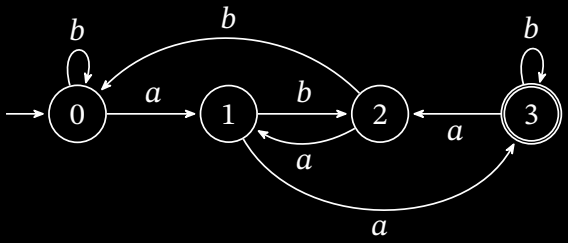
δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$		$\sim_1$	
q	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$	
$\rightarrow 0$	1	0	A	A	A	A	
1	3	2	A	B	A	B	
2	1	0	A	A	A	A	
$3*$	2	3	B	A	B	C	



δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$		$\sim_1$	$\delta/\sim_1$		
q	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$	a	b	
$\rightarrow 0$	1	0	A	A	A	A	B	A	
1	3	2	A	B	A	B	C	A	
2	1	0	A	A	A	A	B	A	
$3*$	2	3	B	A	B	C	A	C	

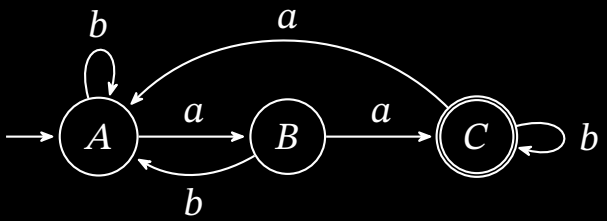


δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$		$\sim_1$	$\delta/\sim_1$		$\sim_2$
q	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$
$\rightarrow 0$	1	0	A	A	A	A	B	A	A
1	3	2	A	B	A	B	C	A	B
2	1	0	A	A	A	A	B	A	A
$3*$	2	3	B	A	B	C	A	C	C



δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$		$\sim_1$	$\delta/\sim_1$		$\sim_2$
q	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$
$\to 0$	1	0	A	A	A	A	B	A	A
1	3	2	A	B	A	B	C	A	B
2	1	0	A	A	A	A	B	A	A
$3*$	2	3	B	A	B	C	A	C	C

δ			$\sim_0$	$\delta/\sim_0$		$\sim_1$	$\delta/\sim_1$		$\sim_2$
q	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$	a	b	$[q]$
$\rightarrow 0$	1	0	A	A	A	A	B	A	A
1	3	2	A	B	A	B	C	A	B
2	1	0	A	A	A	A	B	A	A
$3*$	2	3	B	A	B	C	A	C	C



1: **function** MINIMIZE-MOORE($\{0, \dots, n-1\}, A, \delta, q_0, F$)
2: # *Cas dégénérés*
3: **if** $F = \emptyset$ **then**
4: **return** $(\{0\}, A, (0, x) \mapsto 0, 0, \emptyset)$
5: **if** $F = \{0, \dots, n-1\}$ **then**
6: **return** $(\{0\}, A, (0, x) \mapsto 0, 0, \{0\})$
7: # *Initialisation*
8: **for all** $p \in 0 \dots n-1$ **do**
9: $$\pi'(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p \notin F \\ 1 & \text{si } p \in F \end{cases}$$

10: # Calcul itératif

11: $\pi = \bot$

12: **while** $\pi \neq \pi'$ **do**

13: $\pi = \pi'$

14: # Calcule π' tel que $\pi'(p) = \pi'(q)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \pi(p) = \pi(q) \\ \pi(\delta(p,x)) = \pi(\delta(q,x)) \quad \text{pour tout } x \in A \end{cases}$$

15: $\pi' = \textsc{Refine-Moore}(\pi, n, A, \delta)$

16: **return** $(\{0, \dots, n-1\}, A, \delta, q_0, F)\,/\pi$

```
17: function REFINE-MOORE(π, n, {a_1, ..., a_k}, δ)
18:     for all p ∈ 0 ... n − 1 do
19:         V(p) = (π(p), π(δ(p, a_1)), ..., π(δ(p, a_k)))
20:     # Calcule une permutation qui trie selon V
21:     σ = RADIX-SORT(V)
22:     i = 0
23:     π′(σ(0)) = i
24:     for all p ∈ 1 ... n − 1 do
25:         if V(p) ≠ V(p − 1) then
26:             i = i + 1
27:         π(σ(p)) = i
28:     return π′
```

Analyse du temps d'exécution

Chaque étape de **raffinement** de l'algorithme de Moore s'exécute en temps $\Theta(kn)$ où $k = |A|$ et $n = |Q|$.

Le nombre d'étapes de raffinement est au plus $n - 2$, une valeur atteinte dans les pires cas. La **complexité au pire** de l'algorithme de minimisation de Moore est donc en $O(kn^2)$.

Analyse du temps d'exécution

Chaque étape de **raffinement** de l'algorithme de Moore s'exécute en temps $\Theta(kn)$ où $k = |A|$ et $n = |Q|$.

Le nombre d'étapes de raffinement est au plus $n - 2$, une valeur atteinte dans les pires cas. La **complexité au pire** de l'algorithme de minimisation de Moore est donc en $O(kn^2)$.

Peut-on espérer mieux ?

Avancer à petits pas

Soit (Q, A, δ, q_0, F) un **automate fini déterministe émondé** et **complété**.

Définition Soient $B, C \subseteq Q$ et $x \in A$. On observe les transitions $\delta^*(B, x)$ qui aboutissent en C :

(1) La partie B est **stable** pour (C, x) si $\delta^*(B, x) \subseteq C$ ou si $\delta^*(B, x) \cap C = \emptyset$.

(2) Sinon la paire (C, x) **coupe** la partie B en deux parties $B_1 = \{q \in B | \delta(q, x) \in C\}$ et $B_2 = \{q \in B | \delta(q, x) \notin C\}$.

Une partition de Q est **stable** pour (C, x) si chacune de ses classe le sont.

Avancer à petits pas

Soit (Q, A, δ, q_0, F) un **automate fini déterministe émondé** et **complété**.

Définition Soient $B, C \subseteq Q$ et $x \in A$. On observe les transitions $\delta^*(B, x)$ qui aboutissent en C :

(1) La partie B est **stable** pour (C, x) si $\delta^*(B, x) \subseteq C$ ou si $\delta^*(B, x) \cap C = \emptyset$.

(2) Sinon la paire (C, x) **coupe** la partie B en deux parties $B_1 = \{q \in B | \delta(q, x) \in C\}$ et $B_2 = \{q \in B | \delta(q, x) \notin C\}$.

Une partition de Q est **stable** pour (C, x) si chacune de ses classe le sont.

Proposition Une partition de Q est une **congruence** si et seulement si elle est **compatible** avec F et **stable** pour chaque (Y, x) où Y est une de ses parties et x parcourt A.

```
1:  function MINIMIZE-MOORE-BIS(Q, A, δ, q_0, F)
2:      P = {F, Q \ F}
3:      S = ∅
4:      for all x ∈ A do
5:          ajouter (F, x) et (Q \ F, x) à S
6:      while S ≠ ∅ do
7:          (C, x) = POP(S)
8:          C' = {q ∈ Q | δ(q, x) ∈ C}
9:          for all B ∈ P do
10:             REFINE-MOORE-BIS(C', B, P, S, A)
```

```
11: function REFINE-MOORE-BIS(C', B, P, S, A)
12:     B_1 = B ∩ C'
13:     B_2 = B \ B_1
14:     # Est-ce que ça coupe ?
15:     if B_1 ≠ ∅ ∧ B_2 ≠ ∅ then
16:         remplacer B par B_1 et B_2 dans P
17:         for all x ∈ A do
18:             if (B, x) ∈ S then
19:                 remplacer (B, x) par (B_1, x) et (B_2, x) dans S
20:             else
21:                 ajouter (B_1, x) et (B_2, x) à S
```

Algorithme d'Hopcroft

Lemme Soit $x \in A$. Si $B \subseteq Q$ et $C = C_1 \cup C_2$ avec $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ alors :

(1) Si B est **stable** pour (C_1, x) et (C_2, x) alors B est **stable** pour (C, x) ;

(2) Si B est **stable** pour (C_1, x) et (C, x) alors B est **stable** pour (C_2, x).

Ce lemme est la clé de l'algorithme d'Hopcroft qui permet de diminuer la quantité de travail à faire pour le raffinement et d'atteindre une complexité au pire en $O(kn \log n)$.

```
1:  function MINIMIZE-HOPCROFT(Q, A, δ, q_0, F)
2:      P = {F, Q \ F}
3:      S = ∅
4:      for all x ∈ A do
5:          ajouter (min(F, Q \ F), x) à S
6:      while S ≠ ∅ do
7:          (C, x) = POP(S)
8:          C' = {q ∈ Q | δ(q, x) ∈ C}
9:          for all B ∈ P do
10:             REFINE-HOPCROFT(C', B, P, S, A)
```

```
11: function REFINE-HOPCROFT(C', B, P, S, A)
12:     B_1 = B ∩ C'
13:     B_2 = B \ B_1
14:     # Est-ce que ça coupe ?
15:     if B_1 ≠ ∅ ∧ B_2 ≠ ∅ then
16:         remplacer B par B_1 et B_2 dans P
17:         for all x ∈ A do
18:             if (B, x) ∈ S then
19:                 remplacer (B, x) par (B_1, x) et (B_2, x) dans S
20:             else
21:                 ajouter (min(B_1, B_2), x) à S
```

Mise en œuvre

Attention ! L'algorithme d'Hopcroft possède une bonne complexité… seulement si les structures de données utilisées ont elles aussi la bonne complexité !

En pratique, cet algorithme est subtil à mettre en œuvre. On trouve d'ailleurs plusieurs articles dans la littérature qui expliquent comment faire cette mise en œuvre.

Bonne nouvelle ! En 2024, on peut faire plus simple et efficace.

La recherche en marche

L'informatique est une discipline scientifique **jeune** et **active** !

Les connaissances continuent de progresser, y compris en algorithmique, y compris sur de vieux problèmes comme celui de la minimisation (les travaux d'Hopcroft datent de 1971).

On ne connaît toujours pas la **complexité du problème de minimisation**.

Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science 2009 (Freiburg), pp. 123–134
www.stacs-conf.org

ON THE AVERAGE COMPLEXITY OF MOORE'S STATE MINIMIZATION ALGORITHM

FRÉDÉRIQUE BASSINO [1] AND JULIEN DAVID [2] AND CYRIL NICAUD [2]

[1] LIPN UMR 7030, Université Paris 13 - CNRS, 99, avenue Jean-Baptiste Clément, 93430 Villetaneuse, France.
E-mail address: Frederique.Bassino@lipn.univ-paris13.fr

[2] Institut Gaspard Monge, Université Paris Est, 77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France
E-mail address: Julien.David@univ-paris-est.fr,Cyril.Nicaud@univ-paris-est.fr

ABSTRACT. We prove that, for any arbitrary finite alphabet and for the uniform distribution over deterministic and accessible automata with n states, the average complexity of Moore's state minimization algorithm is in $\emptyset(n \log n)$. Moreover this bound is tight in the case of unary automata.

The Average Complexity of Moore's State Minimization Algorithm is $\mathcal{O}(n \log \log n)$ *

Julien David

Institut Gaspard Monge, Université Paris Est
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France.

Abstract. We prove that the average complexity, for the uniform distribution on complete deterministic automata, of Moore's state minimization algorithm is $\mathcal{O}(n \log \log n)$, where n is the number of states in the input automata.

Minimizing incomplete automata

Marie-Pierre Béal[1] and Maxime Crochemore[21]

[1] Université Paris-Est, Institut Gaspard-Monge
77454 Marne-la-Vallée Cedex 2, France, beal@univ-mlv.fr
[2] King's College London, Strand, London WC2R 2LS, UK
maxime.crochemore@kcl.ac.uk

Abstract. We develop a $O(m \log n)$-time and $O(k+n+m)$-space algorithm for minimizing incomplete deterministic automata, where n is the number of states, m the number of edges, and k the size of the alphabet. Minimization reduces to the partial functional coarsest partition problem. Our algorithm is a slight variant of Hopcroft's algorithm for minimizing deterministic complete automata.
Keywords: algorithms, automata, minimization, partitioning.

Information Processing Letters 112 (2012) 213–217

Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Information Processing Letters

www.elsevier.com/locate/ipl

Fast brief practical DFA minimization

Antti Valmari

Tampere University of Technology, Department of Software Systems, PO Box 553, FI-33101 Tampere, Finland

ARTICLE INFO

Article history:
Received 27 May 2011
Received in revised form 2 December 2011
Accepted 5 December 2011
Available online 7 December 2011
Communicated by J. Torán

Keywords:
Algorithms
Formal languages
Data structures
Deterministic finite automata
Partition refinement

ABSTRACT

Minimization of deterministic finite automata has traditionally required complicated programs and correctness proofs, and taken $O(nk \log n)$ time, where n is the number of states and k the size of the alphabet. Here a short, memory-efficient program is presented that runs in $O(n + m \log m)$, or even in $O(n + m \log n)$, time, where m is the number of transitions. The program is complete with input, output, and the removal of irrelevant parts of the automaton. Its invariant-style correctness proof is relatively short.

Algorithme de Valmari

Idée Partitionner les états et les transitions

L'algorithme de Valmari fonctionne pour des **automates finis déterministes partiels**.

Sa complexité est $O(n + m \log n)$ où n est le nombre d'états et m le nombre de transitions (donc $m \leqslant kn$ où k est le nombre de lettres).

Pour distinguer les deux partitions, on utilise le vocabulaire de **blocs** et de **cordes** pour les classes respectives des partitions des états et des transitions.

À l'initialisation les blocs sont partitionnés selon F et les cordes selon les étiquettes des transitions.

```
1:  function MINIMIZE-VALMARI(Q, T, F)
2:      P = INITIAL-BLOCK-PARTITION(Q, F)
3:      T = INITIAL-CORD-PARTITION(T)
4:      while T contient une corde non traitée C do
5:          marquer C comme traitée
6:          SPLIT-BLOCKS(P, C)
7:          while P contient un bloc non traité B do
8:              marquer B comme traité
9:              SPLIT-CORDS(T, T, B)
10:     return (Q, T, F)/P
```

```
11: function SPLIT-BLOCKS(𝒫, C)
12:     CLEAR-MARKS(𝒫)
13:     for all p -a-> q ∈ C do
14:         MARK(𝒫, p)
15:     SPLIT-WITH-MARKS(𝒫)

16: function SPLIT-CORDS(𝒯, T, B)
17:     CLEAR-MARKS(𝒯)
18:     for all q ∈ B do
19:         for all p -a-> q ∈ T do
20:             MARK(𝒯, p -a-> q)
21:     SPLIT-WITH-MARKS(𝒯)
```

```
22: function SPLIT-WITH-MARKS(𝒫)
23:     for all Y ∈ 𝒫 do
24:         Y_1 = MARKED-ELEMENTS(𝒫)
25:         Y_2 = UNMARKED-ELEMENTS(𝒫)
26:         if Y_1 ≠ ∅ ∧ Y_2 ≠ ∅ then
27:             remplacer Y par max(Y_1, Y_2) dans 𝒫
28:             ajouter min(Y_1, Y_2), non traité, à 𝒫
```

Démonstration

Lemme Si p et q sont dans **deux blocs différents** alors $L_p \neq L_q$.

Lemme Si $p \xrightarrow{x} q$ et $p' \xrightarrow{y} q'$ sont dans **deux cordes différentes** alors ou bien $x \neq y$ ou bien $L_q \neq L'_q$.

Lemme Soient p et q deux états d'un **même bloc**. Si p et q ont une transition pour une **même lettre** x dans deux **cordes distinctes** C et C' alors C ou C' n'est **pas traitée**. Si p a une transition pour une lettre x mais pas q alors la transition est dans une corde **non traitée**.

Lemme Soient $p \xrightarrow{x} q$ et $p' \xrightarrow{y} q'$ deux transitions d'une **même corde**. Si p et p' sont dans des **blocs distincts** B et B' alors B ou B' n'est **pas traité**.

Structure de données pour les partitions

La clé pour obtenir la bonne complexité avec l'algorithme de Valmari est une structure de donnée pour les **partitions raffinables**. Valmari propose une solution reposant uniquement sur l'utilisation de tableaux.

La mise en œuvre est **très facile** !

La complexité est **aussi bonne que Hopcroft** !

Les **constantes** sont **meilleures** !

Algorithmes à connaître

(1) émondage et complétion

(2) déterminisation (automate des parties)

(3) élimination des ε-transitions

(4) algorithme de Brzozowski et McCluskey (AFN $\rightarrow$ regexp)

(5) algorithme de Glushkov (regexp $\rightarrow$ AFN)

(6) algorithme de minimisation de Moore