Une parallélisation du QuickSort

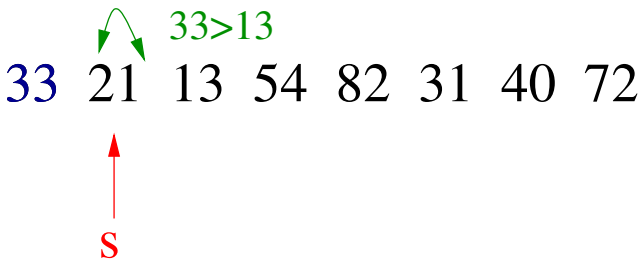
Sophie Robert

Dpt info

Quick Sort : séquentiel

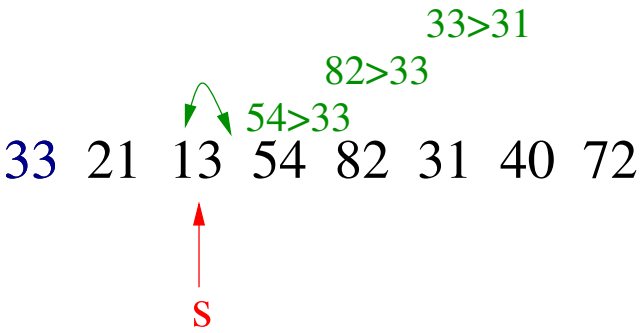

```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel



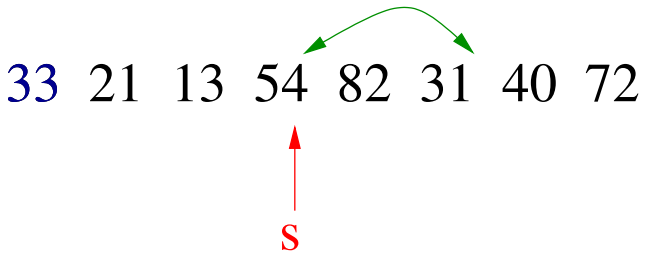

```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel



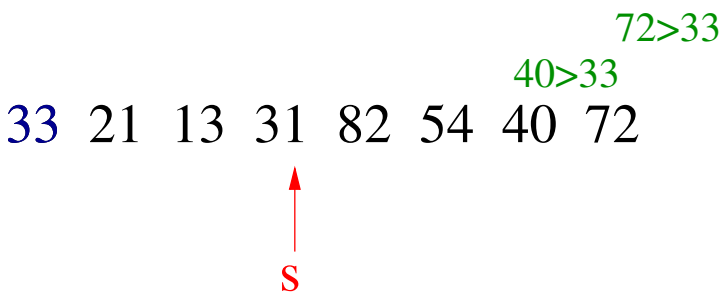

```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel



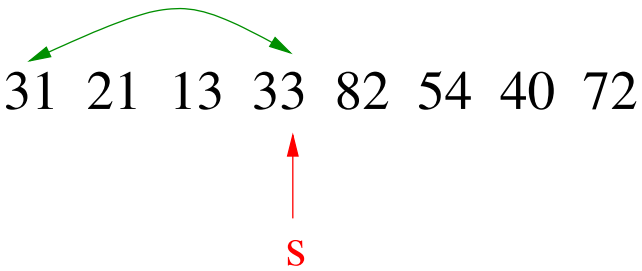

```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel




```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel




```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Quick Sort : séquentiel

31 21 13 3 82 54 40 72

```
QuickSort(A,q,r) {
  if q<r then
    pivot:=A[q];
    s:=q;
    for i from q+1 to r
      if pivot > A[i] then
        s:=s+1;
        swap(A[s],A[i])
      end if
    end for
    swap(A[q],A[s]);
    QuickSort(A,q,s);
    QuickSort(A,s+1,r);
  end if
}
```

Complexité

Si on suppose que le découpage est bien équilibré

$$T(n) = 2T(\frac{n}{2}) + O(n)$$

$$T(n) = 2^{log_2 n} + (log_2 n)O(n)$$

$$T(n) = O(nlog_2 n)$$

Si on suppose le pire cas

$$T(n) = T(n-1) + O(n)$$

$$T(n) = O(n^2)$$

Le découpage

La complexité vient du découpage : comment paralléliser le découpage ?

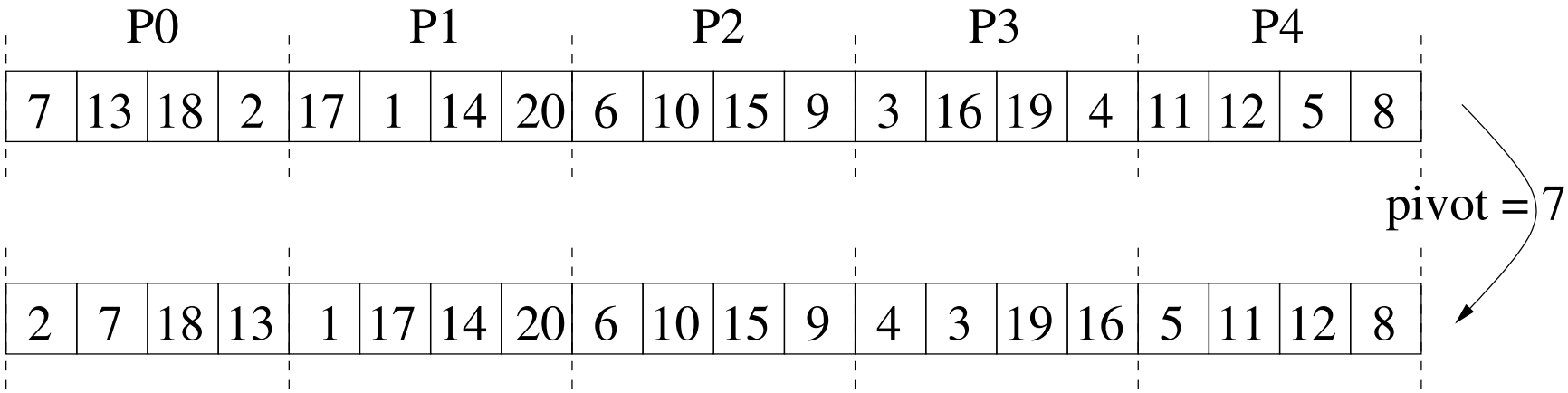
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Vers une version OpenMP

7	13	18	2	17	1	14	20	6	10	15	9	3	16	19	4	11	12	5	8

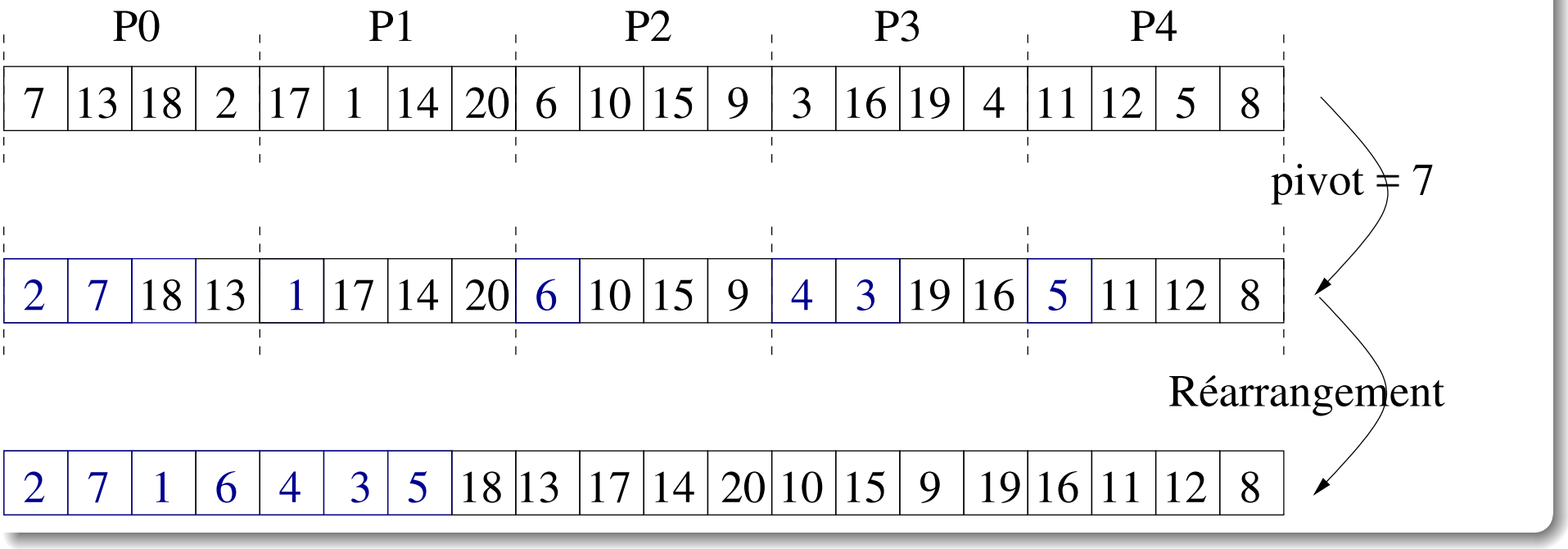
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Vers une version OpenMP



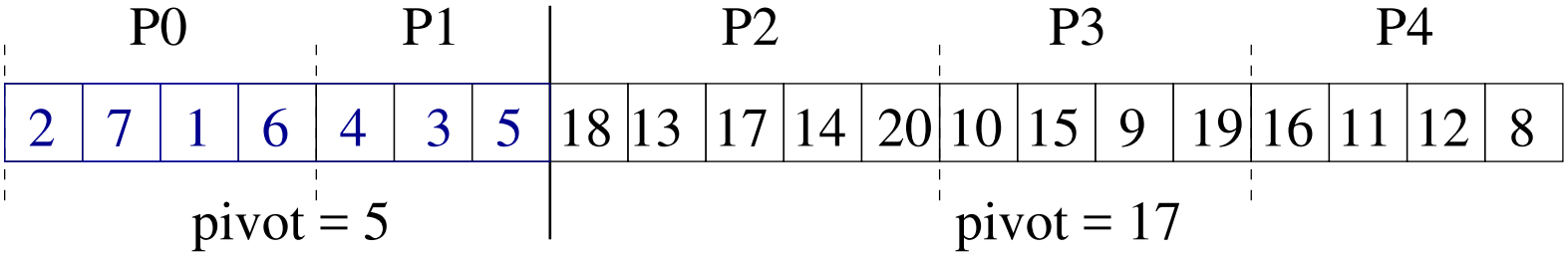
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Vers une version OpenMP



Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Vers une version OpenMP



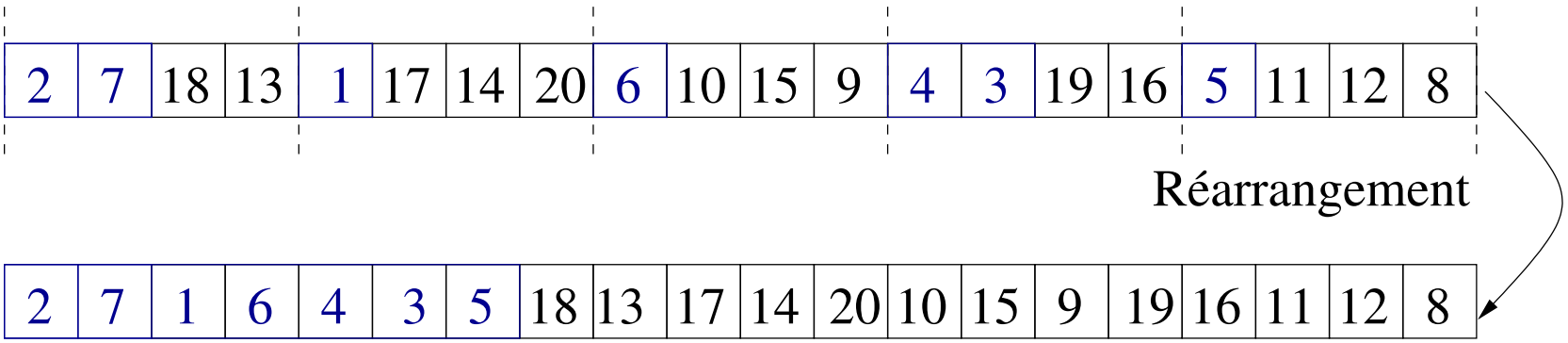
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Les étapes de l'algorithme avec t threads

- $log_2(t)$ étapes
  - partition pour un pivot donné
  - participation au réarrangement global (?)
- quick sort local

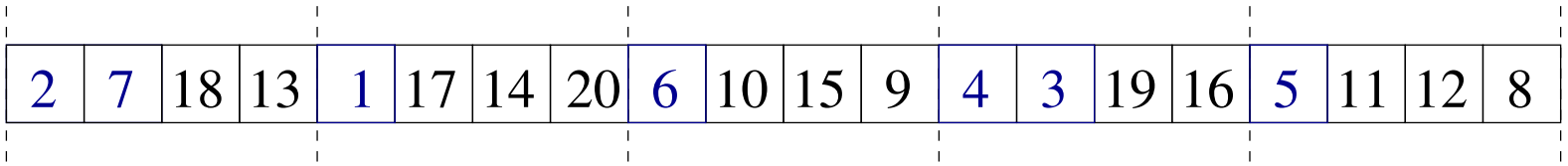
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Le réarrangement global



Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Le réarrangement global

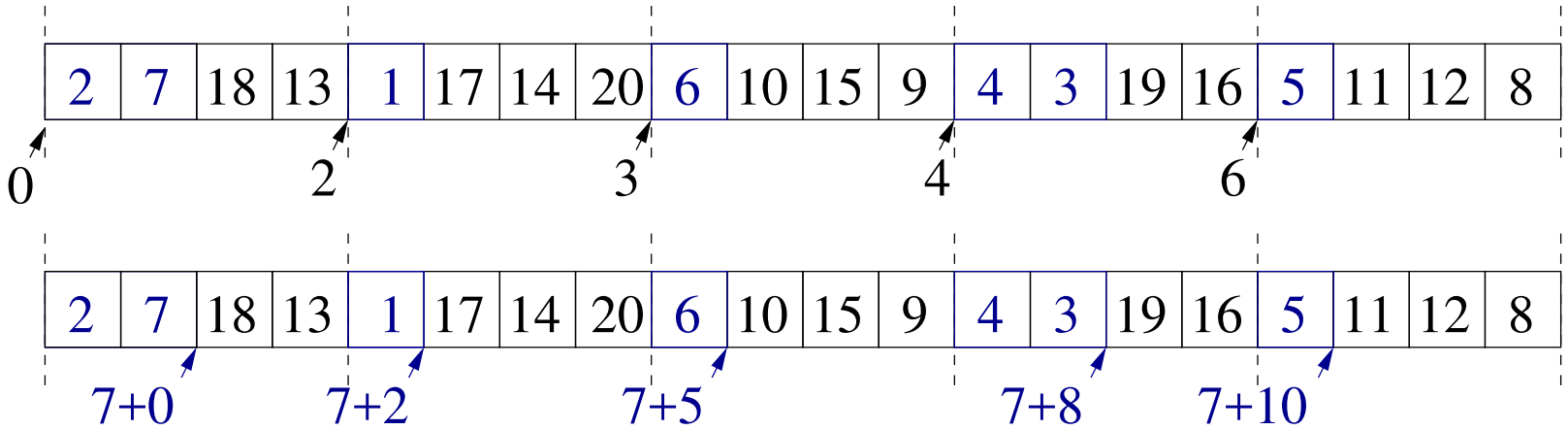


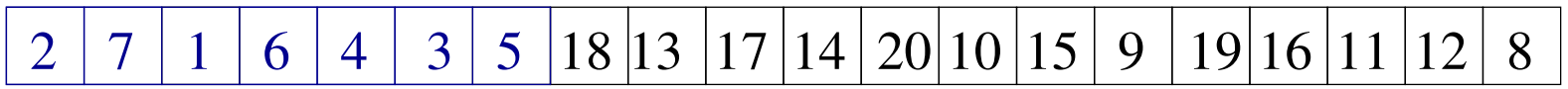
(Smaller :)|Si| : 2 1 1 2 1

2 3 3 2 3 |Li| (: Larger)

Somme des préfixes Q : 0 2 3 4 6 7 (gauche)

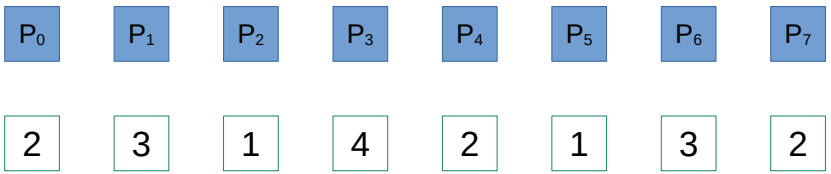
R : 0 2 5 8 10 13 (droit)





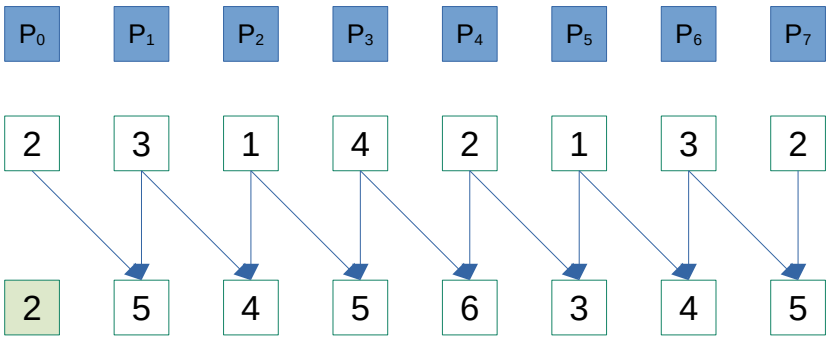
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



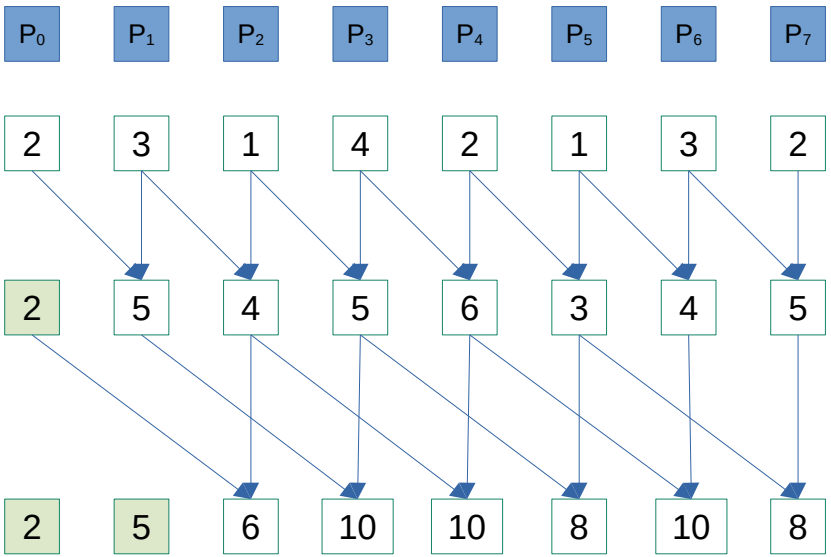
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



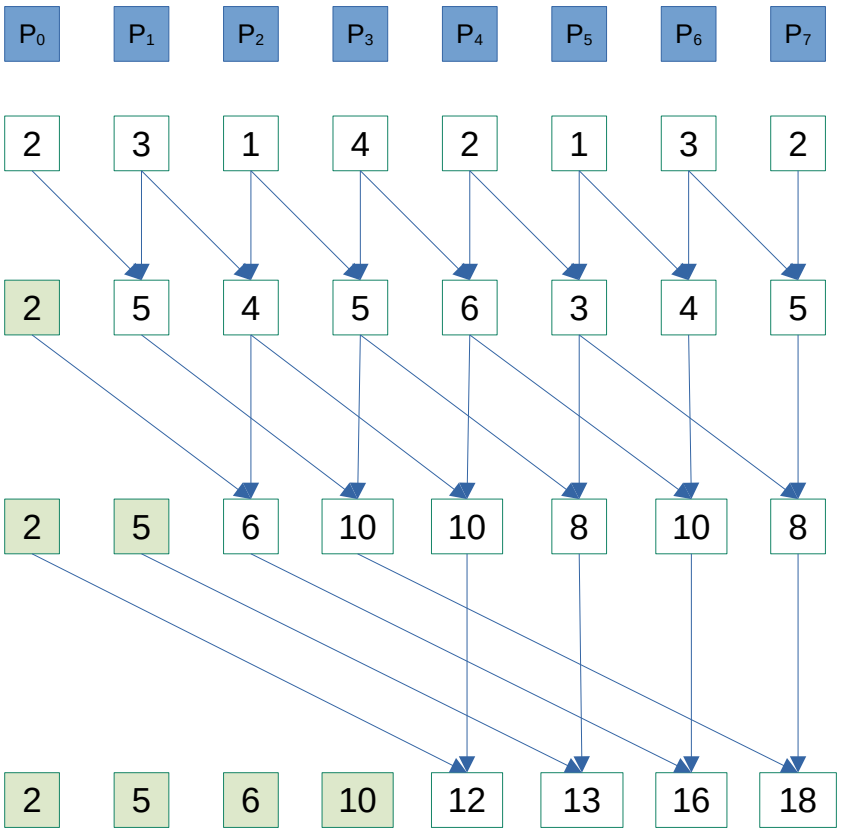
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



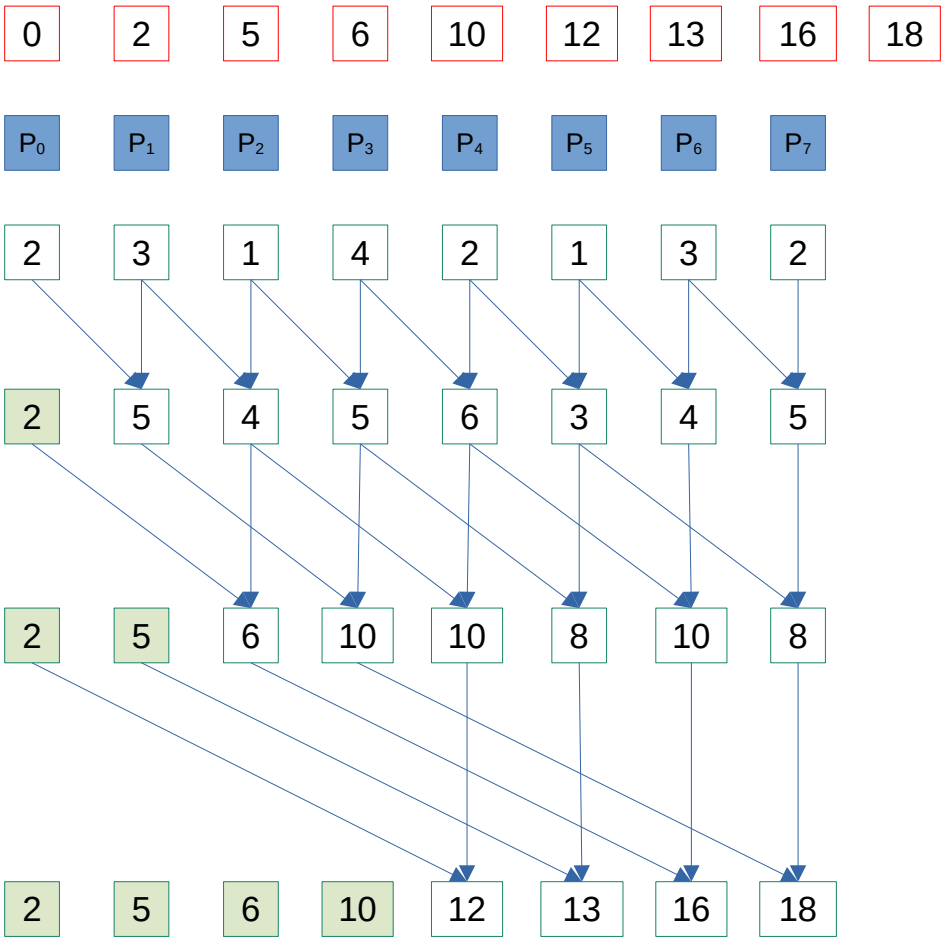
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



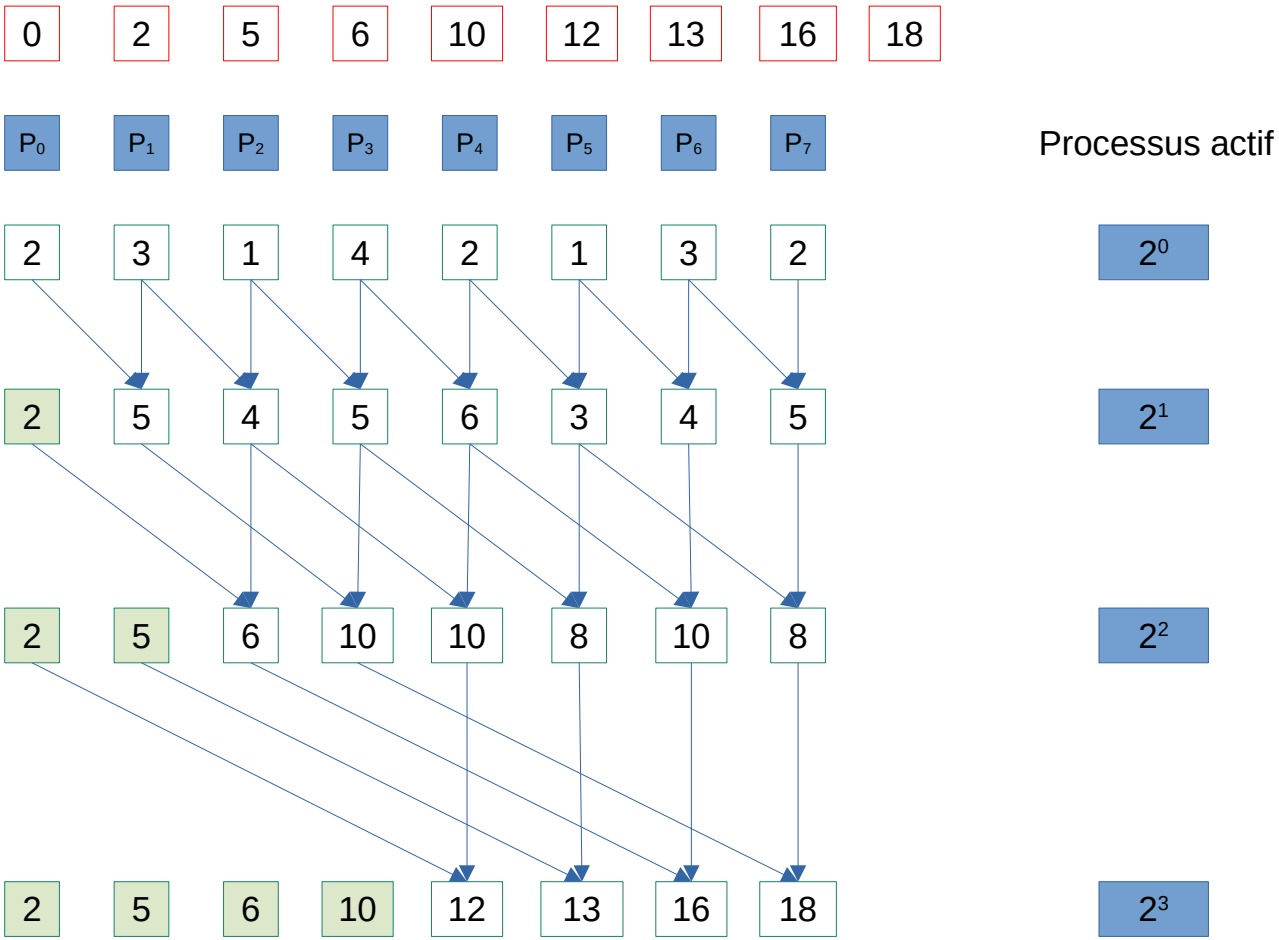
Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



Quick Sort : Machine à mémoire partagée

La somme des préfixes



Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ +
   `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

La répartition des `QuickSortElt`

$$\begin{array}{|cc} n & p \\ |S| & \frac{|S|p}{n} \end{array}$$

$$A = \lceil |S| \frac{p}{n} + 0.5 \rceil$$

Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ +
   `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

Complexité

- Nombre d'étapes

$$log_2(t)(\ldots)$$

Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ +
   `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

Complexité

- Partition

$$log_2(t)(O(\frac{n}{t}) + ...)$$

Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ + `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

Complexité

- Réarrangement : somme des préfixes

$$log_2(t)(O(\frac{n}{t}) + O(log_2(t)) + ...)$$

Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ + `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

Complexité

- Réarrangement : copie

$$log_2(t)(O(\frac{n}{t}) + O(log_2(t)) + O(\frac{n}{t}))$$

Quick Sort : Machine à mémoire partagée

Algorithme final sur t threads

Si on note `QuickSortElt`$(P_i, \ldots, P_j, q, r)$ une étape élémentaire

1. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots, P_{p-1}, 0, n-1)$
2. `QuickSortElt`$(P_0, \ldots P_A, 0, Q[p])$ + `QuickSortElt`$(P_{A+1}, \ldots P_p, Q[p+1], n)$
3. ...
4. Si `QuickSortElt`(P_i, q, r) alors QuickSort séquentiel et exit.

Complexité

- Quick sort séquentiel

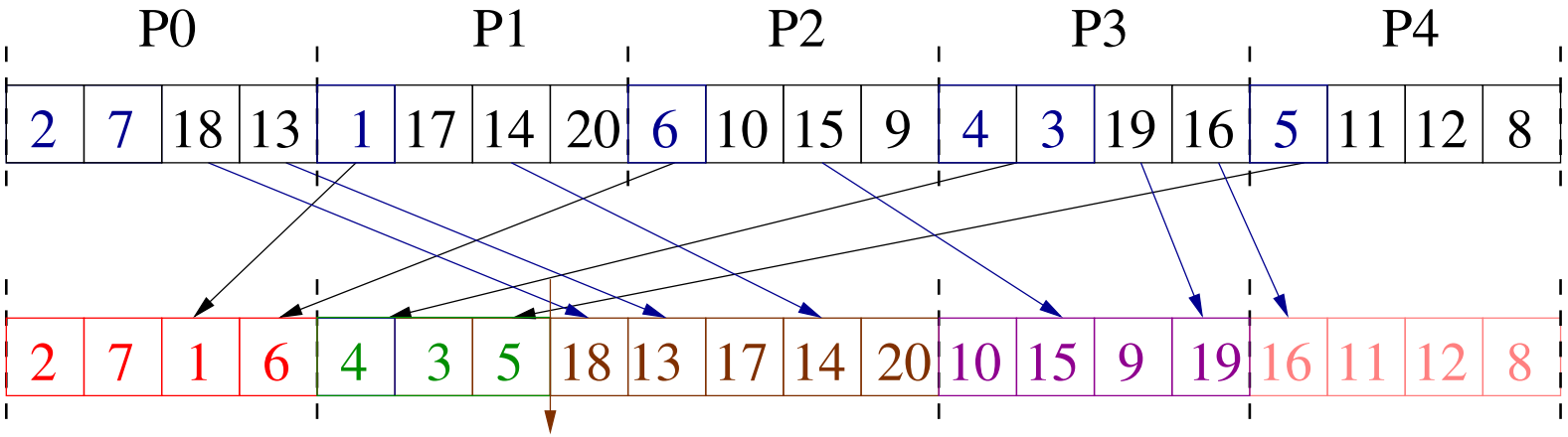
$$log_2(t)(O(\frac{n}{t}) + O(\frac{n}{t}) + O(log_2(t))) + O(\frac{n}{t} log_2(\frac{n}{t}))$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Mémoire partagée versus mémoire distribuée

- La diffusion du pivot
- Le réarrangement global

Définir les processus destinataires



Quick Sort : Message Passing Paradigm

Mémoire partagée versus mémoire distribuée

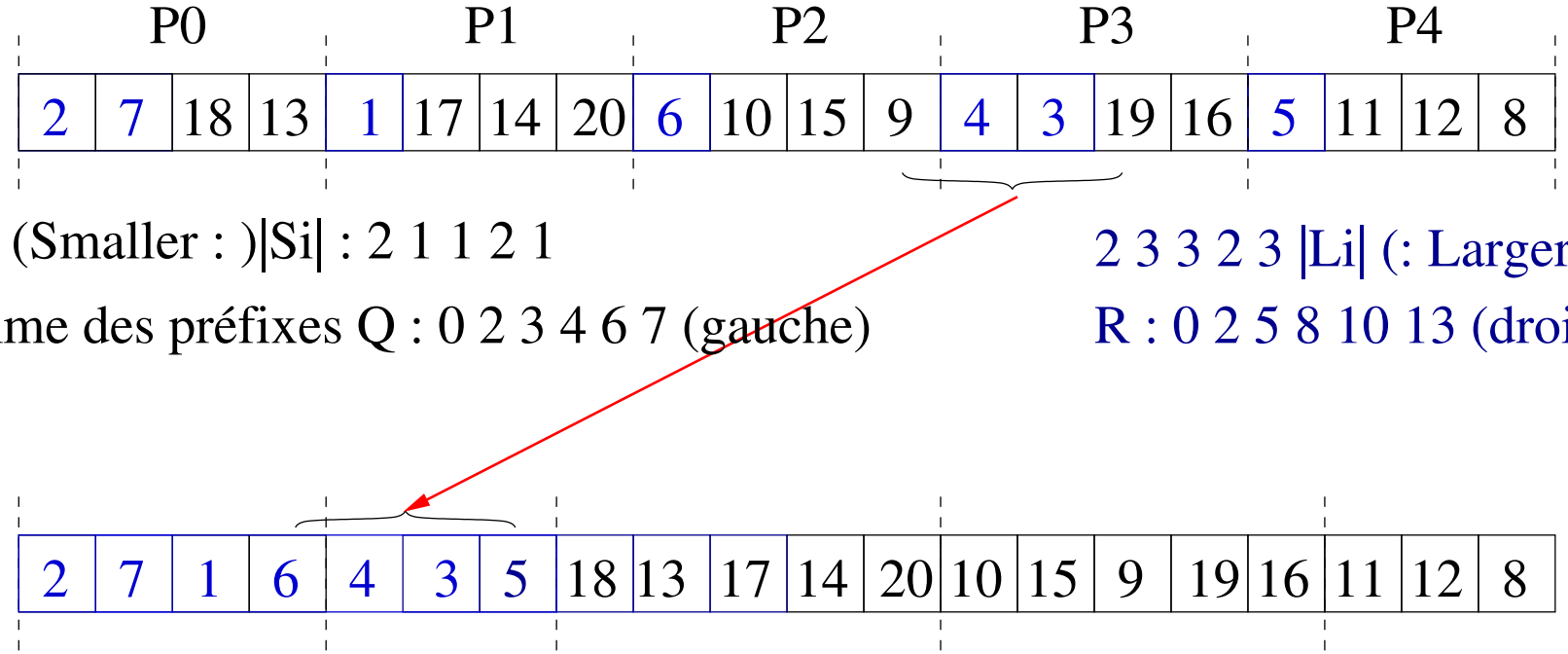
- La diffusion du pivot
- Le réarrangement global

Définir les processus destinataires

- Définir une règle à partir de S et Q pour distribuer les éléments plus petits que le pivot
- Définir une règle à partir de L et R pour distribuer les éléments plus grands que le pivot

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Définir les processus destinataires



- 3 ou 4 éléments par processeurs ($\lceil Q[5]/2 \rceil$)
- 2 éléments à distribuer ($S[3]$)
- 4 éléments déjà distribués ($Q[3] - S[3]$)
  - e_4 et e_5 sur le processeur **1** (4/4 et 5/4).

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Définir les processus destinataires

P_i	S	Q	les éléments	distribution
P_0	2	0	e_0 e_1	e_0 e_1 e_2 e_3
P_1	1	2	e_2	e_4 e_5 e_6
P_2	1	3	e_3	
P_3	2	4	e_4 e_5	
P_4	1	6	e_6	
		7		

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Nombre d'étapes

$$log_2(p)(...)$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Diffusion du pivot

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + ...)$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Partition en locale

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p}) + ...)$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Réarrangement : calcul des préfixes

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p}) + O(log_2(p)) + ...)$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Réarrangement : envoi/réception

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p}) + O(log_2(p)) + ?)$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

- Quick sort séquentiel

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p}) + O(log_2(p))+?) + O(\frac{n}{p} log_2(\frac{n}{p})))$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

Pire cas :

$$log_2(p)(O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p}) + O(log_2(p)) + O(\frac{n}{p})) + O(\frac{n}{p} log_2(\frac{n}{p}))$$

Quick Sort : Message Passing Paradigm

Complexité

Même ordre de grandeur que pour la mémoire partagée