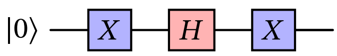
TD5 — De la téléportation et une pincée de ZX-Calcul

1 Entraînement : petits circuits quantiques

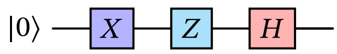
Ex1 L'objectif de cet exercice est d'étudier et de concevoir certains petits circuits quantiques utiles dans les applications. Pour ce faire nous allons utiliser les portes H, X (également appelée NOT), CX (également appelée $CNOT$), ainsi que la porte Z qui agit sur un seul qubit, comme suit :

$$Z : \begin{array}{ccc} |0\rangle & \longmapsto & |0\rangle \\ |1\rangle & \longmapsto & -|1\rangle \end{array}$$

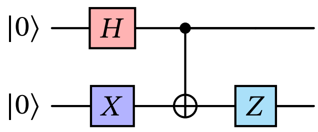
(a) Montrer que le circuit ci-contre produit l'état $\frac{|1\rangle - |0\rangle}{\sqrt{2}} = -|-\rangle$:



(b) Montrer le circuit ci-contre est équivalent au précédent :



(c) Calculer l'état produit par ce circuit :

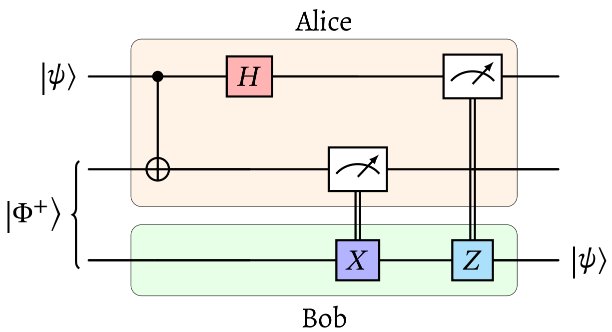


Identifier l'état final comme l'un des quatre états de Bell

$$|\Phi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle \pm |11\rangle), \qquad |\Psi^{\pm}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle \pm |10\rangle).$$

2 Protocole de téléportation quantique

Ex2 Le protocole de téléportation quantique permet à Alice de transmettre un qubit arbitraire $|\psi\rangle$ à Bob *sans l'envoyer physiquement*, en utilisant : (i) une paire de Bell partagée à l'avance ; (ii) 2 bits classiques envoyés d'Alice vers Bob. Il est décrit par le circuit suivant :



où $|\psi\rangle$ est le qubit $\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ qu'Alice veut transmettre à Bob et $|\Phi^+\rangle$ désigne la paire de Bell préparée au préalable par Alice et Bob sur le principe de l'exercice précédent. Les deux mesures d'Alice produisent deux bits classiques a et b qu'elle transmet à Bob pour contrôler la correction $X^b Z^a$ qu'il applique sur son qubit, issu de la paire de Bell.

(a) Écrire l'état initial $|\psi_0\rangle$ du circuit sur l'entrée $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$.

(b) Calculer l'état $|\psi_1\rangle$ après la porte CNOT.

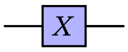
(c) Calculer l'état $|\psi_2\rangle$ après la porte H qui suit et réorganiser l'expression selon la valeur des deux premiers qubits : $|\psi_2\rangle = \sum_{x,y} |xy\rangle |\varphi_{xy}\rangle$.

(d) En déduire l'état du qubit de Bob en fonction des résultats des deux mesures.

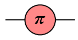
(e) Expliquer pourquoi le circuit de Bob permet d'obtenir $|\psi\rangle$ en sortie.

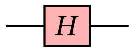
3 Une pincée de ZX-calcul[1]

Le ZX-calcul est un formalisme graphique rigoureux qui permet de décrire des états quantiques et de les manipuler, par exemple pour établir l'égalité entre différentes représentation d'un même état. Il est décrit par un ensemble de règles pour construire et manipuler des diagrammes. L'universalité et la complètude ont été établies ces dernières années. Ici, nous nous contenterons d'un premier contact, en partie guidé par l'intuition. Voici comment recoder les portes de nos circuits sous forme de ZX-diagrammes :

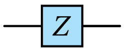


$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

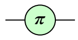


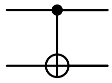


$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$

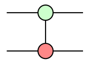


$Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

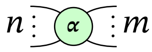




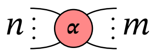
$CX = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$



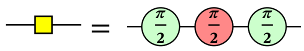
Les diagrammes se composent comme les circuits quantiques. Un diagramme représente une application linéaire (pas nécessairement unitaire) et les diagrammes se composent par produit de matrice et produit tensoriel. Les nœuds des diagrammes sont des araignées :



$$= |0, \ldots, 0\rangle \langle 0, \ldots, 0| + e^{i\alpha} |1, \ldots, 1\rangle \langle 1, \ldots, 1|$$

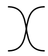


$$= |+, \ldots, +\rangle \langle +, \ldots, +| + e^{i\alpha} |-, \ldots, -\rangle \langle -, \ldots, -|$$



Dans les diagrammes, les fils peuvent être déplacés selon les besoins du calcul. Les fils ont aussi une interprétation matricielle :

$= |0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 1|$

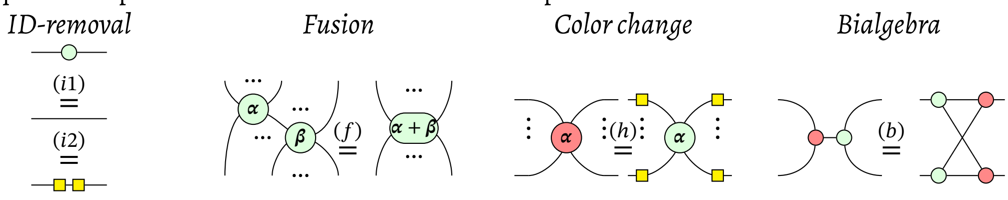


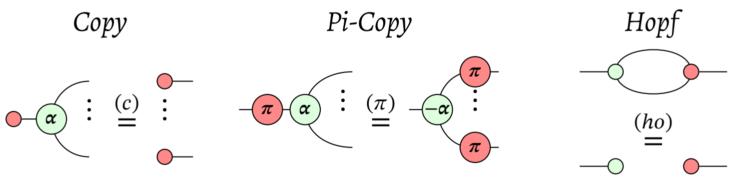
$= |00\rangle\langle 00| + |01\rangle\langle 10| + |10\rangle\langle 01| + |11\rangle\langle 11|$

$= |00\rangle + |11\rangle$

$= \langle 00| + \langle 11|$

Enfin, des règles de réécriture permettent de passer d'un diagramme à un diagramme équivalent. En voici quelques unes pour le cas des circuits à un scalaire près :





Ex3 Explorons ensemble le ZX-calcul :

- **(a)** Que représentent les araignées avec un unique fil ?
- **(b)** Montrer que la composition de deux CNOT calcule l'identité !
- **(c)** Simplifier le circuit qui calcule l'état de Bell $|\Phi^+\rangle$.
- **(d)** Recommencer avec $|\mathrm{GHZ}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|000\rangle + |111\rangle)$.
- **(e)** Il est temps de s'attaquer à la téléportation quantique !

1. la plupart des figures de ZX-calcul ci-dessous proviennent de l'article arXiv:2509.20663 partagé sous CC-BY-4.0