Examen deuxième session
4 juin 2024 — 1h30 minutes (tiers temps : 2h)

Logique L1 MI
Responsable : Jules Chouquet

Certaines réponses doivent être rédigées sur le sujet, rendez-le avec votre copie

Tout document ou appareil est **interdit**
De plus, toute communication entre étudiants pendant l'épreuve est susceptible de faire l'objet d'un **procès verbal de tentative de fraude**.

Nom et Prénom :

Exercice 1 (Formalisation) On considère les symboles de prédicats et relations suivants, avec leur traduction. On précise que l'on se place dans le cadre des nombres entiers.

— $P(x)$: x est premier
— $Q(x)$: x est impair
— $R(x, y)$: x est diviseur de y

Donnez une traduction des énoncés suivants en logique propositionnelle :

1. Il existe un nombre premier qui est pair.
2. Si tous les nombres premiers sont impairs, alors tous les nombres impairs sont premiers.
3. Tous les nombres sont diviseurs d'eux-même.
4. Si un nombre a un diviseur pair, alors il est pair.
5. Un nombre premier et impair n'est divisible par aucun nombre.

Exercice 2 (Formules propositionnelles)

1. Démontrez en utilisant la **déduction naturelle** :
   (a) la formule $(\neg p \vee q) \to (p \to q))$.
   (b) la formule $p \to (p \to \top)$
   (c) que les formules p et $\neg\neg p$ sont équivalentes
2. Démontrez en utilisant les **tables de vérité** que les formules :

$$p \to (q \wedge \neg r) \qquad \text{et} \qquad \neg(\neg q \vee r) \vee \neg p$$

   sont équivalentes. Respectez les conventions vues en cours.

Exercice 3 (Calcul des prédicats) On se donne les symboles de prédicats P, Q et R.

1. Considérons la formule suivante :

$$\exists z\big(\forall x\,(P(x) \to Q(y)) \wedge \forall z(Q(z) \vee Q(x) \vee Q(y)) \wedge (R(x) \wedge R(y) \wedge R(z))\,\big)$$

   Si la formule a des variables libres, **Entourez-les sur le sujet**, sinon écrivez "pas de variable libre"

2. Rappelez la définition d'une interprétation pour le calcul des prédicats.
3. Donnez une interprétation dans laquelle la formule $\forall x P(x) \vee \forall y(P(y) \to Q(y))$ est <u>vraie</u>. Expliquez pourquoi.
4. Donnez une interprétation dans laquelle la formule $\forall x \forall y(Q(x) \vee (P(x) \to Q(y))$ est <u>fausse</u>. Expliquez pourquoi.

Exercice 4 (Coq) Considérons que je sois au milieu d'une preuve en Coq, avec comme but $C \to (A \to (B \vee C))$ et comme seule hypothèse $H : (A \vee \neg B)$.

1. Décrivez dans le tableau ci-dessous l'évolution du (ou des) but(s) (**uniquement les buts, pas les hypothèses)** après les tactiques suivantes, exécutées l'une après l'autre :

`intro H1.`	`intro H2.`	`right.`	`case H.`	`intro H3.`	`assumption.`

2. Pensez-vous que cette preuve puisse être complétée ? Si oui, décrivez comment, si non, expliquez pourquoi.

Rappel des règles (classées par connecteur)

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\ \text{ax} \qquad\qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\ \top$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B}\ \to\text{i} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B}\ \to\text{e}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\ \wedge\text{i} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A}\ \wedge\text{e-g} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B}\ \wedge\text{e-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C}\ \vee\text{e} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B}\ \vee\text{i-g} \qquad\qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A}\ \vee\text{i-d}$$

$$\frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\bot \qquad \frac{\Gamma, \neg A \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\,\mathsf{abs} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \bot}\,\neg\mathsf{e} \qquad \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A}\,\neg\mathsf{i}$$