

# Logique

## Logique propositionnelle : un langage formel

Jules Chouquet



2025

## Contexte

Rappel : la logique propositionnelle<sup>1</sup> a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- 
1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

## Contexte

Rappel : la logique propositionnelle<sup>1</sup> a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »

---

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

## Contexte

Rappel : la logique propositionnelle<sup>1</sup> a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »

---

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

## Contexte

Rappel : la logique propositionnelle<sup>1</sup> a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »
- « **si** neige **alors** **pas** bronzage **et** **pas** baignade **et** raquettes.

---

1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

## Contexte

Rappel : la logique propositionnelle<sup>1</sup> a été inventée dès l'antiquité (stoïciens) pour formaliser le *raisonnement*

Qu'est-ce que ça veut dire, « formaliser » ?

- « En cas de neige, on ira ni au bronzage ni à la baignade mais on fera des raquettes »
- « S'il neige, pas de bronzage ou de baignade, mais des raquettes »
- « **si** neige **alors** **pas** bronzage **et** **pas** baignade **et** raquettes.
- neige =  $p$ , bronzage =  $q$ , baignade =  $r$ , raquettes =  $s$   
$$p \rightarrow (\neg q \wedge \neg r \wedge s)$$

(Remarque : on utilise souvent  $p$  pour *proposition*, puis  $q, r, \dots$ )

- 
1. *Proposition* = phrase qui peut être vraie ou fausse.

# Avertissement

La définition et l'utilisation des connecteurs logiques données dans les prochaines pages sont à maîtriser **absolument** .

(on a terminé la partie « informelle » du cours)

→ vous aurez des memos sur Celene

# Un langage formel pour la logique des propositions

Pour les exemples, on va associer aux variables propositionnelles<sup>2</sup> les propositions suivantes :  $p$  = « j'ai faim »,  $q$  = « j'ai sommeil »

Symbol	Nom	Exemple	Signification	Alternative
$\wedge$	Conjonction	$p \wedge q$	J'ai faim et J'ai sommeil.	J'ai faim et sommeil.
$\vee$	Disjonction	$p \vee q$	J'ai faim ou sommeil <u>ou les deux</u>	J'ai soit faim, soit sommeil, <u>soit les deux</u>
$\rightarrow$	Implication	$p \rightarrow q$	Si j'ai faim, alors j'ai sommeil	À chaque fois que j'ai faim, j'ai aussi sommeil
$\neg$	Négation	$\neg p$	Je n'ai pas faim	Il est faux que j'ai faim

2. C'est juste le nom pour les lettres utilisées.

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

$$p \vee \neg p$$

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

$$p \vee \neg p$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

$$p \vee \neg p$$

j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

$$p \vee \neg p$$

j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

j'ai faim ou sommeil, mais pas faim et sommeil

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

$$p \vee \neg p$$

j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

j'ai faim ou sommeil, mais pas faim et sommeil

$$p \wedge \neg p$$

j'ai faim et je n'ai pas faim

$$q \rightarrow (p \wedge r)$$

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$$p \wedge \neg q$$

j'ai faim et/mais pas sommeil

$$p \vee \neg p$$

j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)

$$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

j'ai faim ou sommeil, mais pas faim et sommeil

$$p \wedge \neg p$$

j'ai faim et je n'ai pas faim

$$q \rightarrow (p \wedge r)$$

si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif
$(q \rightarrow p) \wedge r$	

# Associer, composer les connecteurs

Quelques exemples de formules (qui peuvent être vraies ou fausses)

Avec  $p = \text{« j'ai faim »}$ ,  $q = \text{« j'ai sommeil »}$ ,  $r = \text{« j'ai soif »}$  :

$p \wedge \neg q$	j'ai faim et/mais pas sommeil
$p \vee \neg p$	j'ai faim ou bien pas faim (ou les deux)
$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$	j'ai faim ou sommeil, mais pas faim <u>et</u> sommeil
$p \wedge \neg p$	j'ai faim et je n'ai pas faim
$q \rightarrow (p \wedge r)$	si/quand j'ai sommeil, j'ai faim et soif
$(q \rightarrow p) \wedge r$	quand j'ai sommeil j'ai faim, mais là j'ai soif

Comme en maths, le parenthésage change le sens de la formule !

## Dans cette section

Nous allons bientôt commencer à parler de vérité et de *fausseté* des formules.

### Mais précisément, qu'est-ce que c'est qu'une formule ?

C'est une suite de symboles pris dans l'ensemble suivant :

$\{\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, (, ), p, q, \dots\}$  et qui respecte quelques règles :

- Les variables propositionnelles  $p, q, \dots$  sont des formules à part entière
- Si on a déjà écrit une formule  $F$  (qui peut être composée), alors  $\neg F$  est une formule correcte.
- Si on a déjà écrit deux formules  $F_1$  et  $F_2$ , alors  $(F_1 \wedge F_2), (F_1 \vee F_2), (F_1 \rightarrow F_2)$  sont toutes les trois des formules correctes.

Les formules avec des connecteurs seront souvent appelées des *formules composées*.

## Un mot sur les parenthèses

Il est autorisé de supprimer les parenthèses externes pour une meilleure lisibilité **si elles ne rendent pas la formule ambiguë** : par exemple, la formule  $(p \wedge (q \vee r))$  peut être réécrite  $p \wedge (q \vee r)$ , mais pas  $p \wedge q \vee r$ .<sup>3</sup>

Précisément, quand une formule est correcte, et que son **premier** et **dernier** symboles sont des parenthèses, on peut les retirer.

---

3. On verra plus tard qu'il existe des règles de priorité permettant d'en supprimer davantage, mais pour l'instant c'est interdit

## Exemples de non-formules

Tous les exemples précédents du cours sont des formules correctes. En revanche, les suites de symboles suivantes ne sont pas des formules (on ne pourrait pas dire à quel énoncé du langage elles correspondent, elles ne *veulent rien dire*) :

- $q \ r$
- $\wedge p$
- $(p \rightarrow p($
- $p \wedge \vee q$
- $(p \vee \neg p \wedge q))$
- $p \rightarrow q \vee r$

# La structure des formules

## Connecteur principal et sous-formules

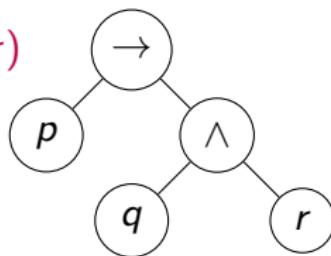
Une formule composée a toujours un connecteur principal, et une ou deux sous-formules immédiates.

- $p \rightarrow (q \wedge r)$
- $(p \rightarrow q) \wedge r$
- $\neg p \wedge q$
- $\neg(p \wedge q)$

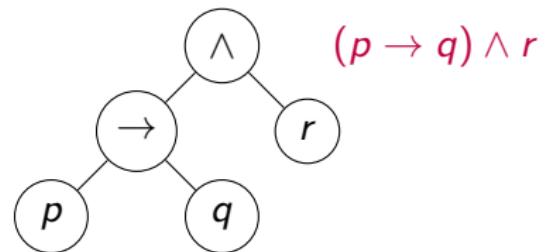
# Représenter les formules graphiquement

Un petit dessin vaut parfois mieux qu'un long discours

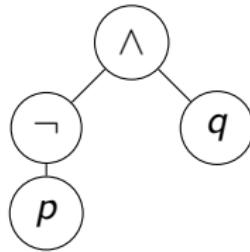
$$p \rightarrow (q \wedge r)$$



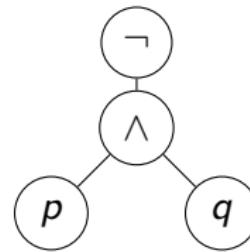
$$(p \rightarrow q) \wedge r$$



$$\neg p \wedge q$$



$$\neg(p \wedge q)$$



# Un mot sur la vérité

## Rien que la vérité

Une formule peut être vraie, ou fausse, mais pas les deux en même temps.

Les variables propositionnelles  $p, q, \dots$  peuvent être vraies ou fausses selon l' **interprétation** que l'on leur donne.

Par exemple, la variable  $p$  peut être associée à l'énoncé « la Terre est plate », ou à l'énoncé «  $2 + 2 = 4$  »...

En logique, on ne s'intéresse pas forcément à ce que peut vouloir dire  $p$ , on considérera donc le plus souvent que les variables peuvent être vraies ou fausses, et on étudiera toutes les possibilités<sup>4</sup>

En revanche, pour les formules composées, c'est une autre histoire, car les connecteurs ont un *sens* fixé. . .

- 
4. C'est exactement ce à quoi serviront les tables de vérité que l'on verra plus tard.

## La conjonction en détail

Prenons deux formules quelconques  $F_1$  et  $F_2$ , et leur conjonction :

$$F_1 \wedge F_2$$

- la formule est vraie quand  $F_1$  et  $F_2$  sont vrais.
- elle est fausse quand au moins l'une des deux est fausse.

Exemple : si  $p = \text{« la Terre est plate »}$ , alors  $p \wedge F_2$  sera fausse quoi qu'il arrive (on n'a même pas besoin de savoir si  $F_2$  est vraie ou fausse, ça ne change rien)

Mais si  $p$  est vraie, alors il faut attendre de connaître la vérité de  $F_2$  pour savoir si la composée  $p \wedge F_2$  est vraie aussi.

## La négation en détail

Soit  $F$  une formule quelconque, et sa négation :

$$\neg F$$

→ la formule est vraie uniquement quand  $F$  n'est pas vraie.  
Si  $p = \text{« la Terre est plate »}$ , alors  $\neg p$  est vraie.

La vérité d'une négation dépend directement et uniquement de sa sous formule, elle la fait passer de vrai à faux ou de faux à vrai.

## La disjonction en détail

Prenons  $F_1$  et  $F_2$  deux formules quelconques, et leur conjonction :

$$F_1 \vee F_2$$

→ pour que la disjonction soit vraie, il suffit que l'une deux sous formules  $F_1$  ou  $F_2$  soit vraie. **Si les deux sont vraies, ça marche aussi.**

Autrement dit, pour qu'elle soit fausse, il faut que les deux formules soient fausses (dans tous les autres cas, elle est vraie).

Exemple : si  $p = \text{« la Terre est plate »}$ , alors  $\neg p \vee F_2$  sera vraie quoi qu'il arrive.

# L'implication en détail I

Prenons  $F_1$  et  $F_2$  quelconques et leur implication :

$$F_1 \rightarrow F_2$$

→ pour que l'implication soit vraie, il faut que quand  $F_1$  est vraie,  $F_2$  aussi.

## Difficulté

Quand l'antécédent <sup>a</sup> est faux, la formule reste vraie !

Si  $p = \text{« la Terre est plate »}$ ,  $p \rightarrow F_2$  sera toujours vraie...

---

a. Dans une implication,  $F_1$  est appelé *antécédent* et  $F_2$  est appelé *conséquent*.

En fait, il est plus facile de retenir le seul moment où une implication est fausse : c'est quand l'antécédent est vrai et le conséquent ( $F_2$ ) est faux, comme ici :  $p \rightarrow q$  si  $p = \text{« } 2 + 2 = 4 \text{ »}$  et  $q = \text{« } 2 + 2 = 8 \text{ »}$

Et dans tous les autres cas, la formule est vraie.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” → “l’herbe est mouillée”

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” → “l’herbe est mouillée”
- “je fais du ski” → “il y a de la neige”

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” → “l’herbe est mouillée”
- “je fais du ski” → “il y a de la neige”
- “ $x$  est impair” → “ $x$  n’est pas divisible par 4”

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j’ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" → "l'herbe est mouillée"
- "je fais du ski" → "il y a de la neige"
- "x est impair" → "x n'est pas divisible par 4"
- "Je suis à la fac" → "J'ai eu mon bac"<sup>5</sup>

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- "il pleut" → "l'herbe est mouillée"
- "je fais du ski" → "il y a de la neige"
- "x est impair" → "x n'est pas divisible par 4"
- "Je suis à la fac" → "J'ai eu mon bac"<sup>5</sup>

Mais contrairement à l'intuition, parfois l'antécédent et le conséquent n'ont rien à voir :

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j'ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” → “l’herbe est mouillée”
- “je fais du ski” → “il y a de la neige”
- “ $x$  est impair” → “ $x$  n’est pas divisible par 4”
- “Je suis à la fac” → “J’ai eu mon bac”<sup>5</sup>

Mais contrairement à l’intuition, parfois l’antécédent et le conséquent n’ont rien à voir :

- “Je suis une licorne” → “J’ai un bec jaune”

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j’ai forcément mon bac.

# L'implication en détail II

Des exemples de formules implicatives **vraies**

L'implication peut décrire une *causalité* :

- “il pleut” → “l’herbe est mouillée”
- “je fais du ski” → “il y a de la neige”
- “ $x$  est impair” → “ $x$  n’est pas divisible par 4”
- “Je suis à la fac” → “J’ai eu mon bac”<sup>5</sup>

Mais contrairement à l’intuition, parfois l’antécédent et le conséquent n’ont rien à voir :

- “Je suis une licorne” → “J’ai un bec jaune”
- “Ma famille habite dans le Loir-et-Cher” → “ $\sqrt{2}$  est irrationnel”

---

5. On ne suit pas forcément la temporalité, mais **si** je suis à la fac, **alors** j’ai forcément mon bac.

# L'implication en détail III

## Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- “il pleut” → “je sors mon parapluie”<sup>6</sup>
- “ $x$  est un nombre premier” → “ $x$  est un nombre impair”<sup>7</sup>

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

---

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.

7. 2 est premier

# L'implication en détail III

## Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- “il pleut” → “je sors mon parapluie”<sup>6</sup>
- “ $x$  est un nombre premier” → “ $x$  est un nombre impair”<sup>7</sup>

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

- “Orléans est la préfecture du Loiret” → “ $2 + 2 = 5$ ”

---

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.

7. 2 est premier

# L'implication en détail III

## Des exemples de formules implicatives **fausses**

De la même façon, une implication fausse peut venir d'une *causalité* fausse :

- “il pleut” → “je sors mon parapluie”<sup>6</sup>
- “ $x$  est un nombre premier” → “ $x$  est un nombre impair”<sup>7</sup>

ou juste d'une formule vraie suivie d'une fausse, sans rapport :

- “Orléans est la préfecture du Loiret” → “ $2 + 2 = 5$ ”
- “ $2 + 2 = 4$ ” → “Jargeau est la préfecture de l’Indre”

---

6. S'il m'arrive de ne pas avoir de parapluie alors qu'il pleut quand même, cette implication est fausse.

7. 2 est premier

## Qu'est-ce que l'on fait avec tout ça ?

Par la suite, on ne s'intéressera plus vraiment aux préfectures, à la météo, etc. . .

- On voudra formaliser des propriétés mathématiques, mais pour parler de nombre, il faut attendre de maîtriser le calcul des prédictats.
- On va voir comment démontrer des formules de la logique des propositions avec des outils précis.
- On va étudier les propriétés *logiques* des connecteurs propositionnels.

## Exemple : une propriété de la conjonction

Que dire des deux formules suivantes ?

$$(p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \wedge q) \wedge r)$$

## Exemple : une propriété de la conjonction

Que dire des deux formules suivantes ?

$$(p \wedge (q \wedge r))$$

$$((p \wedge q) \wedge r)$$

### Réponse

Elles sont **logiquement équivalentes** .

Qu'est-ce que ça veut dire ?

→ quelles que soient les interprétations de  $p, q, r$ , elles ont toujours la même valeur de vérité<sup>a</sup>.

---

a. Soit toutes les deux sont vraies, soit toutes les deux sont fausses

Intuitivement : Ok, car il faut que  $p, q$  et  $r$  soient vrais pour que les conjonctions soient vraies. Si l'une des variables est fausse, les deux formules sont fausses.

L'intuition c'est important

Mais ça ne suffit pas

Est-ce que les deux formules suivantes sont logiquement équivalentes ?

$$(p \rightarrow (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \quad (\neg p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$

# L'intuition c'est important

Mais ça ne suffit pas

Est-ce que les deux formules suivantes sont logiquement équivalentes ?

$$(p \rightarrow (q \vee \neg p)) \wedge (r \vee p) \quad (\neg p \vee (p \rightarrow q)) \wedge \neg(\neg r \wedge \neg p)$$

(Oui)

## La suite

Dans la prochaine section, on va étudier les tables de vérité, qui sont une méthode sûre pour vérifier ce genre de choses.