Logique

Quelques théorèmes et propriétés de la logique propositionnelle

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2025

Contexte

Précédemment

On a vu comment montrer que deux formules étaient équivalentes en utilisant les tables de vérité.

Dans ce cours

On va s'intéresser à certaines équivalences en particulier, qui vont nous apprendre des choses sur les connecteurs

Une précision sur l'équivalence

Notation

Qand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abbréviation !

Une précision sur l'équivalence

Notation

Qand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \wedge (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abbréviation !

Une précision sur l'équivalence

Notation

Qand deux formules F_1 et F_2 sont équivalentes, on note $F_1 \leftrightarrow F_2$.

p	q	$p \to q$	$q \to p$	$(p \to q) \land (q \to p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Theorème

Quand $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $(F_1 \to F_2) \land (F_2 \to F_1)$ est une tautologie.

D'ailleurs, il est fréquent d'utiliser $F_1 \leftrightarrow F_2$ comme une abréviation de $(F_1 \to F_2) \land (F_2 \to F_1)$.[1]

1. Mais ce n'est pas un connecteur, c'est bien une abréviation !

Parenthèse : la **substitution**

Quelque chose qu'on a utilisé sans le dire...

Les tables de vérité commencent avec les variables propositionnelles.
Mais , les théorèmes que l'on obtient (tautologies, équivalences,...) sont beaucoup plus généraux :

Exemple

$p \vee \neg p$ est une tautologie, mais également $F \vee \neg F$,
Quelle que soit la formule F

Parenthèse : la **substitution**

Quelque chose qu'on a utilisé sans le dire...

Les tables de vérité commencent avec les variables propositionnelles.
Mais , les théorèmes que l'on obtient (tautologies, équivalences,...) sont beaucoup plus généraux :

Exemple

$p \vee \neg p$ est une tautologie, mais également $F \vee \neg F$,
Quelle que soit la formule F

Définition : Substitution

Soient F et G deux formules propositionnelles. $F[G/p]$ est la formule obtenue en substituant G à **chaque occurrence** de la variable propositionnelle p.

Exemples de substitutions

Soient $F = (p \vee (q \to p))$ et $G = (r \wedge s)$ [2]
La formule obtenue par substitution $F[G/p]$ est égale à :

$$((r \wedge s) \vee (q \to (r \wedge s)))$$

Remarques

- Si p n'apparaît pas dans G, alors p n'apparaît plus dans $F[G/p]$ (il a été remplacé).
- Si p n'apparaît pas dans F, alors on a quand même le droit d'écrire $F[G/p]$, mais il n'y a aucun remplacement à faire, et on a donc $F[G/p] = F$ dans ce cas.

2. En général, on évite d'utiliser des variables propositionnelles en commun dans F et G.

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F.

Propriétés des substitutions

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

Pourquoi ?

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F.

Propriétés des substitutions

Théorème de la substitution

Si F est une tautologie, alors $F[G/p]$ est une tautologie, quelles que soient G ou p

Conséquence : Si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors $F_1[G/p] \leftrightarrow F_2[G/p]$.

Pourquoi ?
$\rightarrow$ car si $F_1 \leftrightarrow F_2$, alors la formule $(F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1)$ est une tautologie, et que :

- $((F_1 \rightarrow F_2) \wedge (F_2 \rightarrow F_1))\,[G/p]$
- $(F_1[G/p] \rightarrow F_2[G/p]) \wedge (F_2[G/p] \rightarrow F_1[G/p])$

Sont exactement la même chose [3]. Et la première est bien une tautologie, par conséquence du théorème.

3. on remplace dans les deux cas tous les p par F.

Attention

L'inverse ne marche pas

Il est faux que si $F[G/p]$ est une tautologie, alors F est forcément une tautologie.

Exemple

$p \vee q$ n'est pas une tautologie, mais $(p \vee q)[(r \vee \neg r)/p]$ en est une, car elle est égale à $((r \vee \neg r) \vee q)$, qui est toujours vrai.

Considérez les deux phrases suivantes :

- Il est faux que j'ai faim ou soif
- Je n'ai ni faim ni soif

Ainsi que ces deux-là :

- Jacques n'est pas 'jeune et beau'
- Jacques est soit 'pas jeune', soit 'pas beau'

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont équivalentes

Lois de De Morgan

Une exemple d'équivalence générale entre formules

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont équivalentes

Il suffit de vérifier que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, et que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

$\neg(F_1 \vee F_2)$ et $\neg F_1 \wedge \neg F_2$ sont équivalentes

$\neg(F_1 \wedge F_2)$ et $\neg F_1 \vee \neg F_2$ sont équivalentes

Il suffit de vérifier que $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, et que $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Remarque

C'est pour cette raison que l'on peut dire que la conjonction et la disjonction sont des connecteurs **duaux**

En logique propositionnelle, on peut rajouter, en plus des variables propositionnelles, des **constantes propositionnelles**. Elles ont toujours la même valeur[4].

Deux valeurs possibles $\Rightarrow$ deux constantes. Une toujours vraie : $\top$, et une toujours fausse : $\bot$[5] (en particulier, $\neg\top \leftrightarrow \bot$ et $\neg\bot \leftrightarrow \top$)

Comme elle ne varie pas, une constante ne rajoute pas de lignes à une table de vérité :

p	$(p \wedge \top)$	$(p \wedge \top) \rightarrow \bot$
V	V	F
F	F	V

4. Si vous connaissez la différence entre une variable et une constante, vous ne devriez pas être surpris

5. Elles fonctionnent comme `true` et `false` en informatique

Quelques équivalences intéressantes

Pour finir (à relire chez vous)

$\neg\neg p$	p
$p \rightarrow q$	$\neg p \vee q$
$\neg(p \rightarrow q)$	$p \wedge \neg q$
$p \wedge (q \vee r)$	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
$p \vee (q \vee r)$	$(p \vee q) \vee r$
$p \wedge (q \wedge r)$	$(p \wedge q) \wedge r$
$p \wedge q$	$q \wedge p$
$p \vee q$	$q \vee p$
$p \wedge \top$	p
$p \vee \top$	$\top$
$p \wedge \bot$	$\bot$
$p \vee \bot$	p