Logique

Comment l'on démontre (II) : Déduction naturelle

Jules Chouquet

UNIVERSITE D'ORLEANS

2025

Contexte

Où on en est

On commence à savoir démontrer des propriétés de la logique propositionnelle, à savoir comment une formule peut être remplacée par une autre, etc...

1. Dans une équation mathématique, les variables $(x, y, \ldots)$ peuvent représenter une infinité de nombres possibles ; on voudrait que la logique puisse parler de ce genre de choses...

Contexte

Où on en est

On commence à savoir démontrer des propriétés de la logique propositionnelle, à savoir comment une formule peut être remplacée par une autre, etc. . .

Pour nos démonstrations, on a utilisé les tables de vérité. C'est super, mais. . .

1. Dans une équation mathématique, les variables $(x, y, \ldots)$ peuvent représenter une infinité de nombres possibles ; on voudrait que la logique puisse parler de ce genre de choses. . .

Contexte

Où on en est

On commence à savoir démontrer des propriétés de la logique propositionnelle, à savoir comment une formule peut être remplacée par une autre, etc. . .

Pour nos démonstrations, on a utilisé les tables de vérité. C'est super, mais. . .

- Ça ne représente pas vraiment une démonstration comme on peut en faire en maths
- Ça peut être très long (rappelez-vous des 2^n lignes, et de l'extraction de toutes les sous-formules. . .)
- Si on veut une logique un peu plus intéressante, ou les variables peuvent prendre plus de deux valeurs, ça ne marche plus. [1]

1. Dans une équation mathématique, les variables $(x, y, \ldots)$ peuvent représenter une infinité de nombres possibles ; on voudrait que la logique puisse parler de ce genre de choses. . .

Dans ce cours

Un autre formalisme pour écrire des preuves

La **déduction naturelle**

La **déduction naturelle**

Exemple : prenons la formule suivante :

$$p \to (p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u))))$$

On peut raisonner "informellement" pour vérifier que la formule est vraie, mais détailler la table de vérité a l'air pénible.

La **déduction naturelle**

Exemple : prenons la formule suivante :

$$p \to (p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u))))$$

On peut raisonner "informellement" pour vérifier que la formule est vraie, mais détailler la table de vérité a l'air pénible.
Alors qu'en déduction naturelle, la preuve fera trois lignes, elle ressemblera à ça :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\,\text{ax}}{p \vdash p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u)))}\,\vee\text{i-g}}{\vdash p \to (p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u))))}\,\to\text{i}$$

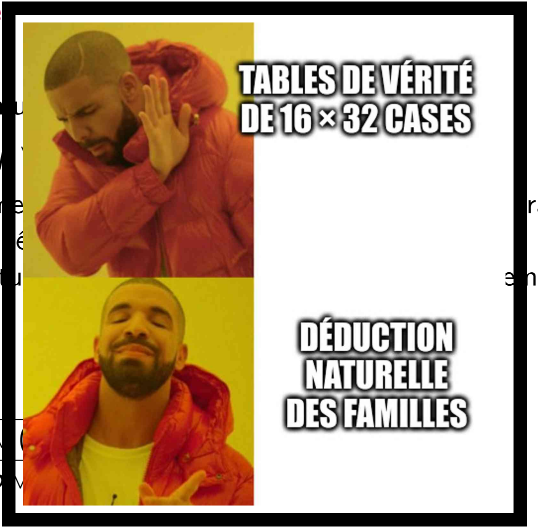
La **déduction naturelle**

Exemple : prenons la form

$$p \to ($$

On peut raisonner “informe raie,
mais détailler la table de vé
Alors qu'en déduction natu emblera
à ça :

En résumé :



$$\dfrac{\overline{p \vdash p \vee (}}{\vdash p \to (p \vee}$$

Qu'est-ce qu'une preuve ?

Exemple

Réécriture et simplification

- $y = 79$
- $x^2 = y + 2$
- $x = \sqrt{y + 2}$
- $x = \sqrt{79 + 2}$
- $x = \sqrt{81}$
- $x = 9$

Exemple

Rédaction d'un raisonnement en langue naturelle

Théorème IV. — *Si la fonction $f(x)$ est continue par rapport à la variable x entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, et que l'on désigne par b une quantité intermédiaire entre $f(x_0)$ et $f(\mathrm{X})$, on pourra toujours satisfaire à l'équation*

$$f(x) = b$$

par une ou plusieurs valeurs réelles de x comprises entre x_0 et X.

Démonstration. — Pour établir la proposition précédente, il suffit de faire voir que la courbe qui a pour équation

$$y = f(x)$$

rencontrera une ou plusieurs fois la droite qui a pour équation

$$y = b$$

dans l'intervalle compris entre les ordonnées qui correspondent aux abscisses x_0 et X; or c'est évidemment ce qui aura lieu dans l'hypothèse admise. En effet, la fonction $f(x)$ étant continue entre les limites $x = x_0$, $x = \mathrm{X}$, la courbe qui a pour équation $y = f(x)$ et qui passe

(Théorème des valeurs intermédiaires, Cauchy)

Qu'est-ce qui manque ?

Il y a toujours des règles implicites qui ne sont pas définies formellement (la substitution, les "évidemment", et autre...).

En logique, on veut formaliser le raisonnement, ce n'est donc pas assez précis. Pour passer d'une affirmation A à une affirmation B, **toutes** les règles seront écrites.

Et si elles dépendent d'un certain nombre d'hypothèses sous-jacentes, on sera obligé de les écrire aussi !

Quel est l'intérêt ?

D'un système de preuve formel

- Si on est d'accord sur les règles, on est obligés d'être d'accord sur la correction des preuves.
- On ne peut pas utiliser une hypothèse de façon *implicite, cachée*.
- On peut avoir de bonnes raisons (philosophiques, mathématiques, informatiques) de changer les règles, pour autoriser on non certains types de preuves [2].

2. On va voir un exemple à la fin de ce cours

Le raisonnement hypothétique

Dans une démonstration rigoureuse, on utilise souvent le raisonnement hypothétique, qui prend la forme suivante :

1. Je suppose qu'une proposition/propriété/formule A est vraie
2. Je fais des déductions, et j'ai le droit d'utiliser tout ce qui m'est donné par A. J'en conclus par exemple un théorème B
3. Je peux affirmer la **vraie** conclusion de mon raisonnement, à savoir : "B est vrai sous hypothèse A". Ou encore, $A \rightarrow B$.

Important

Dans les cas où A n'est pas vérifié, je ne me prononce pas sur B ! ! !
($A \rightarrow B$ reste vrai, comme on sait, donc ma conclusion est correcte)

Le raisonnement hypothétique (2)

Un exemple bébête :

1. Je suppose qu'une formule A est vraie.
2. Je déduis que A est vrai. J'ai le droit.
3. Je conclus que $A \to A$ [3]

3. Je n'ai pas utilisé les tables de vérité pour ce théorème.

Le raisonnement hypothétique (3)

Un exemple un peu moins bébête

1. Je suppose que tous les axiomes de la géométrie classique sont vrais, sauf le cinquième postulat d'Euclide [4]
2. Je regarde si je peux déduire les théorèmes standards de la géométrie.
3. Si c'est vrai, j'en déduis que la géométrie est cohérente, même sans le cinquième postulat.

4. Celui des droites parallèles, évoqué dans le premier cours

Le raisonnement hypothétique (3)

Un exemple un peu moins bébête

1. Je suppose que tous les axiomes de la géométrie classique sont vrais, sauf le cinquième postulat d'Euclide[4]
2. Je regarde si je peux déduire les théorèmes standards de la géométrie.
3. Si c'est vrai, j'en déduis que la géométrie est cohérente, même sans le cinquième postulat.

Dans la suite du cours

On va définir un système formel avec des règles précises, pour manipuler les hypothèses et les conclusions, et on va s'en servir pour prouver des théorèmes logiques.

4. Celui des droites parallèles, évoqué dans le premier cours

La déduction naturelle

Origines

Système de preuve développé par G. Gentzen en 1934.
Gentzen a aussi créé un autre système appelé *calcul des séquents*, qui est moins simple à utiliser mais a des propriétés théoriques intéressantes.

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

5. Attention : Il existe un système de preuves qui s'appelle le *calcul des séquents*, qui est différent de la déduction naturelle que nous voyons maintenant.

$$A_1, \ldots, A_n \vdash B$$

Lecture

À tout endroit d'une preuve, la formule à droite du *taquet* ("$\vdash$") est prouvée sous les hypothèses à gauche du taquet.

Une ligne sous cette forme s'appelle un *séquent*[5]

Notation

Pour un ensemble de formules, comme des hypothèses $A_1, \ldots, A_n$, on utilise souvent les lettres grecques majuscules Γ et Δ

5. Attention : Il existe un système de preuves qui s'appelle le *calcul des séquents*, qui est différent de la déduction naturelle que nous voyons maintenant.

À quoi ça ressemble (2)

Inférences et règles

On construit un séquent à partir d'autres séquents assemblés grâce à une règle[6]

$$\frac{\ldots \vdash \ldots \qquad \ldots \qquad \ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots}\text{[règle]}$$

6. On peut parler de règle d'inférence, de déduction, ou de dérivation, c'est la même chose.

On construit un séquent à partir d'autres séquents assemblés grâce à une règle [6]

$$\frac{\ldots \vdash \ldots \qquad \cdots \qquad \ldots \vdash \ldots}{\ldots \vdash \ldots}\,[\text{règle}]$$

Exemple

$$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B}\,\text{conj-int}$$

Les séquents au-dessus de la ligne sont appelés **prémisses** de la règle. (il pourra y en avoir 0,1,2 ou 3)

6. On peut parler de règle d'inférence, de déduction, ou de dérivation, c'est la même chose.

À quoi ça ressemble (3)

Arbres de preuve

Pour construire une preuve en entier, on part de la formule à prouver (et des hypothèses s'il y en a), et on assemble des règles. On parlera d' **arbre de preuve** .

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\ldots \vdash A_1}\,\mathrm{r} \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \vdash \ldots}\,\mathrm{r} \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \vdash A_n}\,\mathrm{r}}{\ldots \vdash F}\,\mathrm{r}$$

À quoi ça ressemble (3)

Arbres de preuve

Pour construire une preuve en entier, on part de la formule à prouver (et des hypothèses s'il y en a), et on assemble des règles. On parlera d' **arbre de preuve** .

$$\dfrac{\dfrac{\vdots}{\ldots \vdash A_1}\,\mathsf{r} \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \vdash \ldots}\,\mathsf{r} \qquad \dfrac{\vdots}{\ldots \vdash A_n}\,\mathsf{r}}{\ldots \vdash F}\,\mathsf{r}$$

Évidemment, il va falloir s'arrêter de remonter à un moment. . .

Les axiomes

Comme toute arbre, une preuve doit avoir des feuilles pour terminer les branches. Ce sont les **axiomes** , des règles sans prémisses.

Les axiomes

Comme toute arbre, une preuve doit avoir des feuilles pour terminer les branches. Ce sont les **axiomes** , des règles sans prémisses.

Ainsi, pour toute formule A, on peut utiliser la règle suivante :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathsf{ax}$$

Les axiomes

Comme toute arbre, une preuve doit avoir des feuilles pour terminer les branches. Ce sont les **axiomes**, des règles sans prémisses.

Ainsi, pour toute formule A, on peut utiliser la règle suivante :

$$\frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\mathsf{ax}$$

Important

L'utilisation de cette règle donne bien une **preuve** à part entière. C'est une preuve de A sous hypothèse A[a].

[a] Et éventuellement d'autres hypothèses si $\Gamma \neq \emptyset$, dont on peut avoir besoin plus tard

Ce n'est pas une preuve très intéressante, mais c'est la seule preuve logique que l'on peut faire sans prémisses, et donc nos arbres de preuve auront **toujours** des axiomes comme ceux-là pour feuilles.

Un autre axiome

Rappelez-vous que nous avons des constantes dans le langage. La formule constante toujours vraie peut également être utilisée comme axiome :

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$$

En effet, $\top$ est vraie sous n'importe quelles hypothèses. (On se sert rarement de cet axiome, car $\top$ n'est pas très intéressant en logique propositionnelle)

Pour $\bot$, on verra les règles plus loin, elles sont plus intéressantes.

Remarque

Il n'est plus question de vérité ou de fausseté des formules. On définit un système formel avec des règles.
En revanche :

- En logique propositionnelle, toute formule démontrable [7] en déduction naturelle standard [8] sera une tautologie au sens des tables de vérité.
- Inversement, toute tautologie sera démontrable en déduction naturelle.

7. *i.e.* conclusion d'un arbre de preuve où il n'y a plus d'hypothèses.
8. Il peut y avoir des variantes

Remarque

Il n'est plus question de vérité ou de fausseté des formules. On définit un système formel avec des règles.
En revanche :

- En logique propositionnelle, toute formule démontrable [7] en déduction naturelle standard [8] sera une tautologie au sens des tables de vérité.
- Inversement, toute tautologie sera démontrable en déduction naturelle.

Qu'est-ce qu'on en conclut ?

La logique propositionnelle est **complète**, une formule F est vraie avec les tables de vérité <u>si et seulement si</u> elle est démontrable.
Cette logique est trop simple pour que le théorème de Gödel ne s'applique.

7. *i.e.* conclusion d'un arbre de preuve où il n'y a plus d'hypothèses.
8. Il peut y avoir des variantes

Comment lire une règle ?

Nous allons voir les différentes règles de déduction naturelle pour la logique propositionnelle.

Deux lectures possibles

- De haut en bas : on regarde comment construire la conclusion à partir des hypothèses.
- De bas en haut (plus fréquent pour la *recherche de preuves*) : on regarde ce que l'on veut prouver, et on voit au-dessus ce qu'il faut établir avant. Et ainsi de suite jusqu'aux axiomes.

Les règles d'introduction

Comment on construit une formule dans une preuve

Axiomes : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$

Les règles d'introduction

Comment on construit une formule dans une preuve

Axiomes : $\dfrac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \dfrac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$

Implication : $\dfrac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to i$

Les règles d'introduction

Comment on construit une formule dans une preuve

$$\text{Axiomes : } \frac{}{\Gamma, A \vdash A}\,\text{ax} \qquad \frac{}{\Gamma \vdash \top}\,\top$$

$$\text{Implication : } \frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \to B} \to i$$

$$\text{Négation : } \frac{\Gamma, A \vdash \bot}{\Gamma \vdash \neg A} \neg i$$

Rappel : $\neg A \leftrightarrow A \to \bot$

Les règles d'introduction (2)

Comment on construit une formule dans une preuve

$$\text{Conjonction : } \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \wedge\text{i}$$

Les règles d'introduction (2)

Comment on construit une formule dans une preuve

$$\text{Conjonction} : \frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \wedge\text{i}$$

$$\text{Disjonction} : \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash A \vee B} \vee\text{i-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma, \Delta \vdash B \vee A} \vee\text{i-d}$$

Implication :[9] $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \to e$$

9. Cette règle est centrale en logique, et est aussi appelée *Modus Ponens*

Les règles d'élimination

Comment on utilise une formule dans une preuve

Implication :[9] $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash A \to B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \to\mathrm{e}$$

Négation : $$\frac{\Gamma \vdash A \qquad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \bot} \neg\mathrm{e}$$

Remarque : c'est comme une utilisation du Modus Ponens avec $(\neg A) \leftrightarrow (A \to \bot)$

9. Cette règle est centrale en logique, et est aussi appelée *Modus Ponens*

Les règles d'élimination (2)

Comment on utilise une formule dans une preuve

Conjonction : $\dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{e-g} \qquad \dfrac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge\text{e-d}$

Les règles d'élimination (2)

Comment on utilise une formule dans une preuve

Conjonction : $$\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{e-g} \qquad \frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge\text{e-d}$$

Disjonction : $$\frac{\Gamma \vdash A \vee B \qquad \Delta, A \vdash C \qquad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C} \vee\text{e}$$

Remarque : Cette règle est aussi appelée "raisonnement par cas"

Les règles de l'absurde

"Absurde"="Faux"=$\bot$

$$\text{Faux}^{10} : \frac{\Gamma \vdash \bot}{\Gamma \vdash A}\, \bot$$

10. Aussi appelée *ex falso quodlibet*, du latin "depuis le faux on déduit n'importe quoi"

Les règles de l'absurde

"Absurde"="Faux"=$\perp$

$$\text{Faux}^{10} : \frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp$$

$$\text{Raisonnement par l'absurde} : \frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{abs}$$

10. Aussi appelée *ex falso quodlibet*, du latin "depuis le faux on déduit n'importe quoi"

L'ensemble des règles est disponible dans le mémo "déduction naturelle" sur la page Celene du cours.

Apprenez-les en vous entraînant à démontrer des formules.

L'exemple du début du cours :

$$\dfrac{}{\vdash p \rightarrow (p \vee ((\neg q \wedge r) \rightarrow (s \wedge (t \wedge u))))}$$

L'exemple du début du cours :

$$\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p \lor ((\neg q \land r) \to (s \land (t \land u)))}}{\vdash p \to (p \lor ((\neg q \land r) \to (s \land (t \land u))))} \to\mathrm{i}$$

L'exemple du début du cours :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}}{p \vdash p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u)))}\ \vee\text{i-g}}{\vdash p \to (p \vee ((\neg q \wedge r) \to (s \wedge (t \wedge u))))}\ \to\text{i}$$

L'exemple du début du cours :

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{p \vdash p}\ \text{ax}}{p \vdash p \lor ((\neg q \land r) \to (s \land (t \land u)))}\ \lor\text{i-g}}{\vdash p \to (p \lor ((\neg q \land r) \to (s \land (t \land u))))}\ \to\text{i}$$

Exemples (2)

Le tiers exclus

J'ai menti. Parfois, la preuve en déduction naturelle est *un peu* plus compliquée que la table de vérité

Exemples (2)

Le tiers exclus

J'ai menti. Parfois, la preuve en déduction naturelle est *un peu* plus compliquée que la table de vérité

Pour A une formule quelconque :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\vee$i-g}
\UnaryInfC{$A \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$i}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\vee$i-d}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot$}
\RightLabel{abs}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
$$

J'ai menti. Parfois, la preuve en déduction naturelle est *un peu* plus compliquée que la table de vérité

Pour A une formule quelconque :

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$A \vdash A$}
\RightLabel{$\vee$i-g}
\UnaryInfC{$A \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee \neg A), A \vdash \bot$}
\RightLabel{$\neg$i}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg A$}
\RightLabel{$\vee$i-d}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash A \vee \neg A$}
\AxiomC{}
\RightLabel{ax}
\UnaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \neg(A \vee \neg A)$}
\RightLabel{$\neg$e}
\BinaryInfC{$\neg(A \vee \neg A) \vdash \bot$}
\RightLabel{abs}
\UnaryInfC{$\vdash A \vee \neg A$}
\end{prooftree}
$$

$\rightarrow$ C'est quand même intéressant, on remarque qu'un truc évident n'est pas toujours évident à démontrer.

Un mot sur l'intuitionnisme

Fin XIXème siècle, pour des raisons philosophiques, certains mathématiciens refusent le raisonnement par l'absurde [11]

Qu'est-ce que ça signifie ?

Si l'on enlève la règle de raisonnement par l'absurde, on obtient un système de règles plus restreint, appelé **intuitionniste** .

Qu'est-ce que ça implique ?

Par exemple, on ne peut plus démontrer $A \vee \neg A$ ni $\neg\neg A \rightarrow A$ (essayez. . .).
Ça a l'air bizarre, mais en fait c'est le but recherché :
Ces logiciens veulent que quand on prouve une formule $A \vee B$, on soit capable de prouver A ou de prouver B.
Ça s'appelle aussi les mathématiques ou logiques **constructives** , et elles permettent aussi de faire de l'informatique.

11. On parle de l'interprétation des mathématiques BHK : pour Brouwer, Heyting et Kolmogorov.

En logique intuitionniste, on ne peut donc pas prouver $A \vee B$ si l'on ne sait ni prouver A ni prouver B.

Pourquoi ça intéresse les informaticiens ?

Les preuves formelles et les programmes sont très liés [a].
À son exécution, un programme doit bien *choisir* une branche (pensez à "ou" comme une porte logique).
On ne peut rien *faire* avec une preuve de $A \vee \neg A$ en général.

a. Ça s'appelle la correspondance de Curry-Howard

Logique intuitionniste et informatique

Assistants de preuve

En logique intuitionniste, on ne peut donc pas prouver $A \vee B$ si l'on ne sait ni prouver A ni prouver B.

Pourquoi ça intéresse les informaticiens ?

Les preuves formelles et les programmes sont très liés[a].
À son exécution, un programme doit bien *choisir* une branche (pensez à "ou" comme une porte logique).
On ne peut rien *faire* avec une preuve de $A \vee \neg A$ en général.

a. Ça s'appelle la correspondance de Curry-Howard

Pour nous

C'est important aussi : l'assistant de preuve des TP (Coq) ne fonctionne que pour la logique **intuitionniste**

Remarque : la logique que l'on a étudiée, sans l'interdiction du raisonnement par l'absurde, est appelée logique **classique**.