

TD3 : déduction naturelle

Attention, en déduction naturelle, chaque règle a un nombre de prémisses fixe.
 Donc il faut mettre les parenthèses autour des connecteurs binaires.
 Les formules comme $p \wedge q \wedge r$ sont interdites dans les preuves.

Exercice 1 Pour s'échauffer Donnez une preuve en déduction naturelle des formules suivantes :

1. $p \rightarrow (q \rightarrow p)$
2. $(r \rightarrow \neg(q \rightarrow s)) \rightarrow (p \rightarrow p)$
3. $((p \wedge q) \wedge r) \rightarrow (q \wedge r)$
4. $(p \wedge q) \rightarrow ((p \vee s) \wedge (q \vee s))$

Exercice 2 Raisonnements par cas Même exercice. Il faut utiliser le raisonnement par cas, c'est-à-dire la règle $\vee\text{-e}$.

1. $(p \vee q) \rightarrow (p \vee (q \vee r))$
2. $(p \vee \perp) \rightarrow p$
3. Démontrez la commutativité de la disjonction
4. Démontrez l'associativité de la disjonction

Exercice 3 Raisonnement par l'absurde

1. $\neg\neg p \rightarrow p$
2. (* difficile *) Loi de Peirce : $((p \rightarrow q) \rightarrow p) \rightarrow p$

Exercice 4 Propriétés des connecteurs

1. $(p \wedge \top) \rightarrow p$
2. Démontrez que la conjonction est distributive sur la disjonction, et que la disjonction est distributive sur la conjonction.

Rappel des règles

| | |
|---|---|
| $\frac{}{\Gamma, A \vdash A} \text{ax}$ | $\frac{}{\Gamma \vdash \top} \top$ |
| $\frac{\Gamma, A \vdash B}{\Gamma \vdash A \rightarrow B} \rightarrow\text{i}$ | $\frac{\Gamma, A \vdash \perp}{\Gamma \vdash \neg A} \neg\text{i}$ |
| $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash B}{\Gamma, \Delta \vdash A \wedge B} \wedge\text{i}$ | |
| $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash A \vee B} \vee\text{i-g}$ | $\frac{\Gamma \vdash A}{\Gamma \vdash B \vee A} \vee\text{i-d}$ |
| $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash A \rightarrow B}{\Gamma, \Delta \vdash B} \rightarrow\text{e}$ | $\frac{\Gamma \vdash A \quad \Delta \vdash \neg A}{\Gamma, \Delta \vdash \perp} \neg\text{e}$ |
| $\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash A} \wedge\text{e-g}$ | $\frac{\Gamma \vdash A \wedge B}{\Gamma \vdash B} \wedge\text{e-d}$ |
| $\frac{\Gamma \vdash A \vee B \quad \Delta, A \vdash C \quad \Delta', B \vdash C}{\Gamma, \Delta, \Delta' \vdash C} \vee\text{e}$ | |
| $\frac{\Gamma \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \perp$ | $\frac{\Gamma, \neg A \vdash \perp}{\Gamma \vdash A} \text{abs}$ |