Comportement viscoélastique linéaire

Pour le matériau non-vieillissant (c'est-à-dire ses propriétés mécaniques n'évoluent pas avec le temps), la fonction de retard et de relaxation sont exprimées sous la forme

$$J(t_0,t) = f(t-t_0) \qquad \text{ou} \qquad R(t_0,t) = r(t-t_0)$$

Les deux fonctions de retard *f* et de relaxation *r* vérifient :

$$f(0)r(0) = 1; \qquad f(\infty)r(\infty) = 1;$$

La superposition donne la solution:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(\tau,t)\sigma'(\tau)d\tau = \sigma(t)J(t,t) - \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)\frac{\partial J(\tau,t)}{\partial \tau}d\tau$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)f(0) + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)f'(t-\tau)d\tau$$

Le produit de convolution de Riemann:

$$\varepsilon = f' * \sigma \qquad \text{ou} \qquad \sigma = r' * \varepsilon$$

Comportement viscoélastique linéaire

Transformation de Laplace (s: variable dans l'espace de Laplace)

$$L\{g\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

La transformation de Laplace-Carson de la distribution g, noté g_{LC}, est la transformée de Laplace de la dérivée de g :

$$g_{LC}(s) = L\{g'\}(s) = s.L\{g\}(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

Une des propriétés essentielles de la transformation de Laplace et de Laplace-Carson concerne le changement du produit de convolution en produit :

$$L\{a*b\} = L\{a\}L\{b\}$$

$$(a*b')_{LC} = a_{LC}b_{LC}$$

Ainsi:

$$\varepsilon = f'*\sigma \quad \Rightarrow \quad \boxed{\varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s)}$$

Comportement viscoélastique linéaire

Théorème de correspondance

- Sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème statique avec les conditions aux limites invariables dans le temps d'un matériau dont le comportement évolue linéairement en fonction du temps s'écrit dans l'espace de Laplace-Carson est formellement identique à un problème d'équilibre élastique linéaire

- Si la solution explicite (analytique) du problème d'équilibre élastique linéaire existe, elle est directement appliquée pour déduire la solution du problème original d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson

- Une transformation inverse de Laplace-Carson permettra de déduire la solution cherchée dans l'espace temporel. Ce principe d'application de la solution du problème élastique linéaire pour déduire la solution du problème d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson est connu sous le nom de théorème de correspondance.

Comportement viscoélastique linéaire: extension dans le cas 3D

Théorème de correspondance

- sous les conditions aux limites S_U et S_T qui sont indépendantes de temps *t*

$$S_U \cap S_T = 0, \quad S_U \cup S_T = \partial\Omega$$

- les équations du problème d'équilibre mécanique dans l'espace de Laplace-Carson

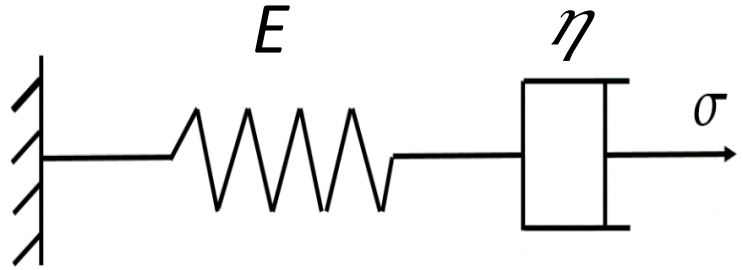
$$\mathrm{div}\underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) + \rho \underline{F_{LC}}(s) = 0$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s) = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi_{lC}}}(s) + {}^{t}\,\underline{\underline{\mathrm{grad}\,\xi_{lC}}}(s)\right]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon_{LC}}}(s) = \frac{1+\nu}{E_{LC}} : \underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) - \frac{\nu}{E_{LC}}\left[\mathrm{tr}\underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s)\right]\underline{\underline{\delta}}$$

Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

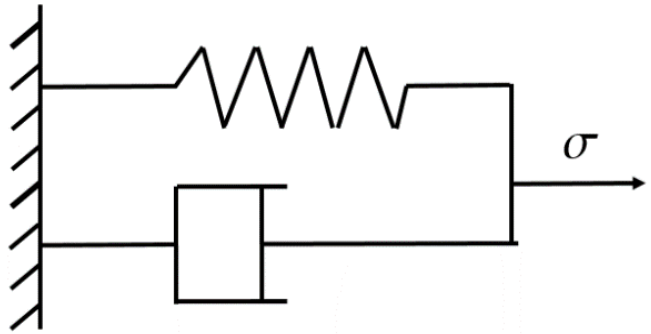
Modèle de Maxwell



$$\varepsilon_{LC} = \frac{\sigma_{LC}}{E} + \frac{\sigma_{LC}}{s.\eta} = \sigma_{LC}\left(\frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta}\right) = f_{LC}\sigma_{LC}$$

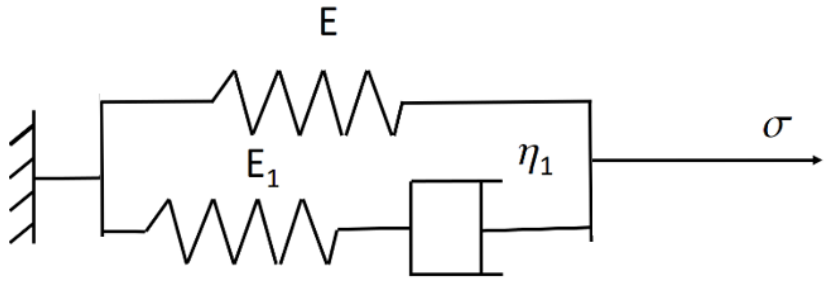
$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta} \qquad r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s.\eta}{\eta s + E}$$

Modèle de Kelvin



$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{1}{\eta s + E}, \qquad r_{LC} = E + \eta s$$

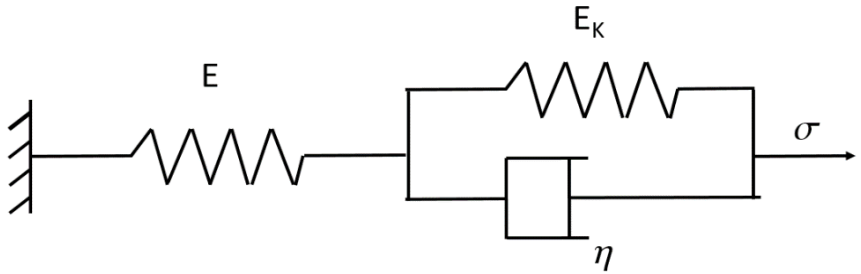
Modèle de Zener



$$r_{LC} = r_{LC}^{E} + r_{LC}^{M_1} = E + \frac{E_1 s \eta_1}{\eta_1 s + E_1}$$

$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{E_1 + \eta_1 s}{\eta_1 s(E + E_1) + E_1 E}$$

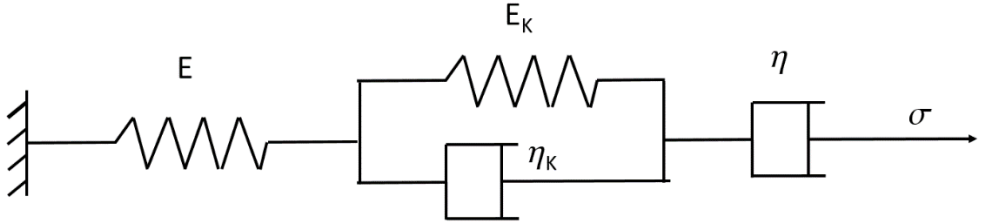
Modèle de Kelvin-Voigt



$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = E\frac{E_K + \eta.s}{E + E_K + \eta.s}$$

$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta.s}$$

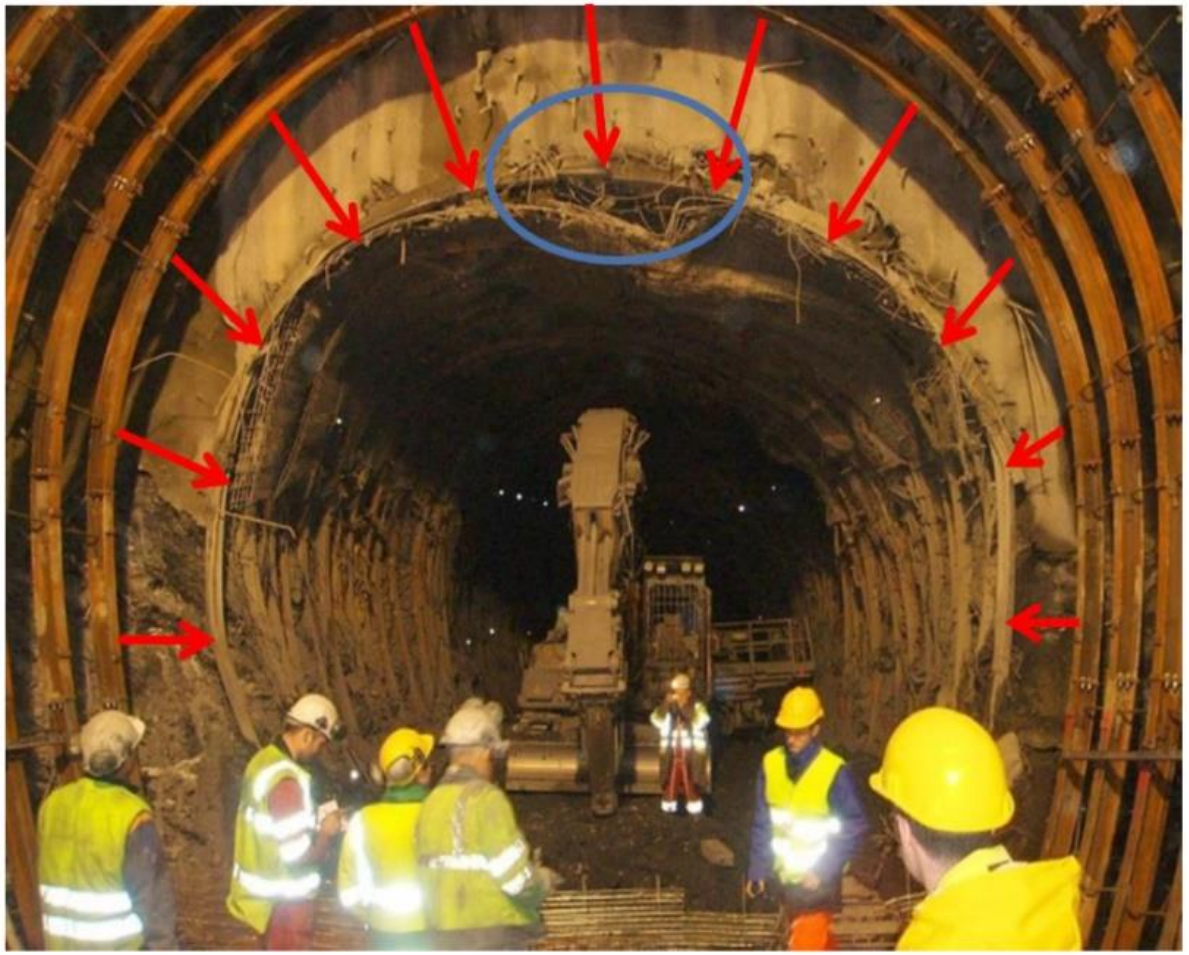
Modèle de Burger



$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta_K.s} + \frac{1}{\eta.s}$$

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s(E_K + \eta_K.s)}{E.s + (E_K + \eta_K.s)(E/\eta + s)}$$

Exemple d’application 1: convergence d’un tunnel



Exemple d'application 1: convergence d'un tunnel non-soutenu circulaire dans un massif rocheux viscoélastique linéaire et incompressible sous l'état de contrainte hydrostatique

- *Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)*

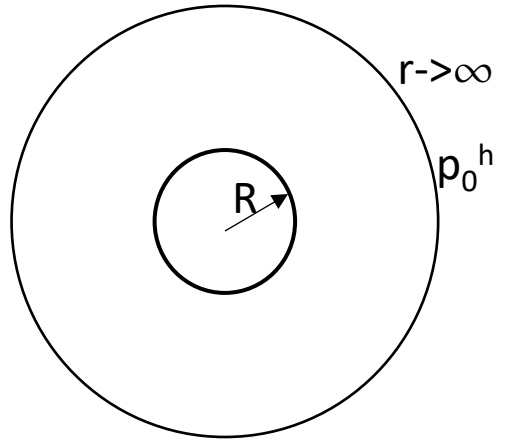


$$div\sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\theta\right)$$

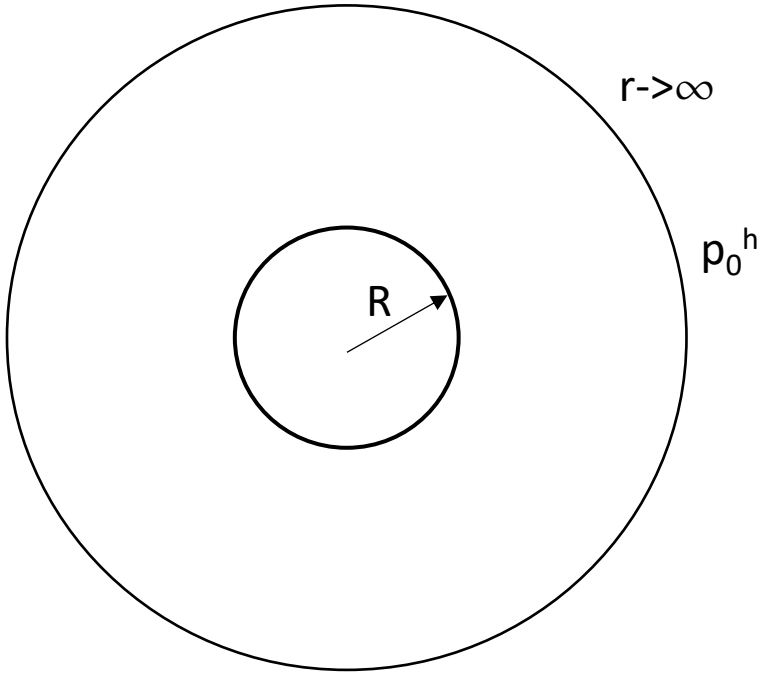
$$\sigma_\theta = \frac{E}{1+\nu}\left(\frac{1-\nu}{1-2\nu}\varepsilon_\theta + \frac{\nu}{1-2\nu}\varepsilon_r\right)$$





- Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

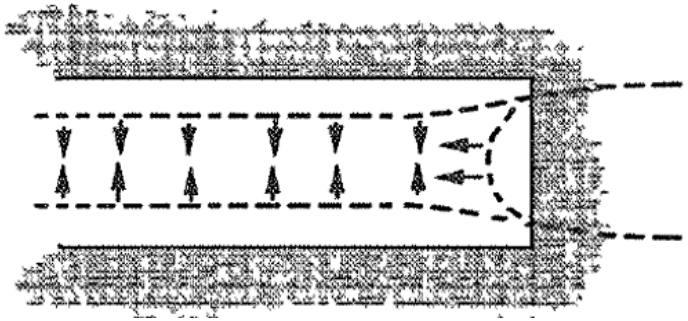


+ Conditions aux limites

$$\sigma_r\left(r = R\right) = 0, \quad \sigma_r\left(r \to \infty\right) = p_0^h$$

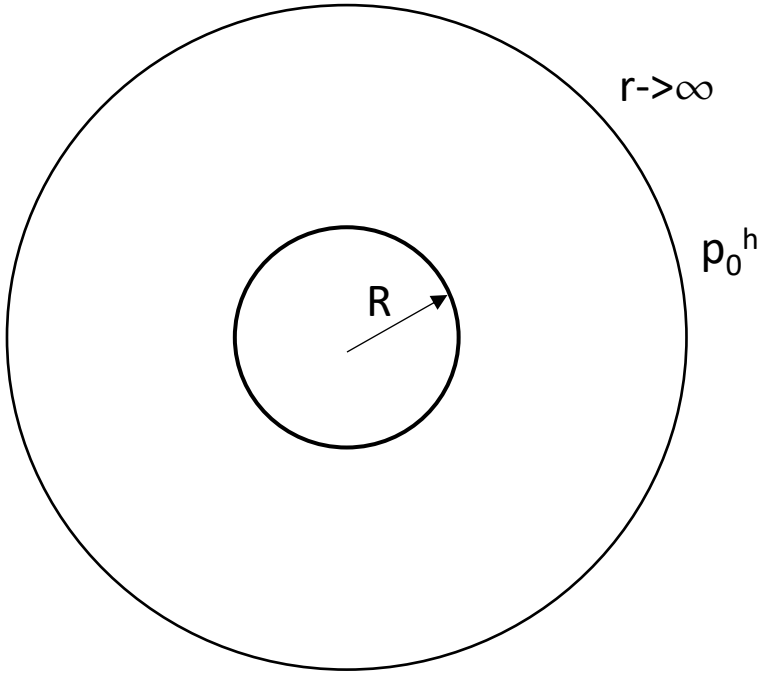
+ Solution du problème isotrope et sous la charge hydrostatique

$$u = a.r + \frac{b}{r}$$



- *Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)*

$$u = a.r + \frac{b}{r}$$



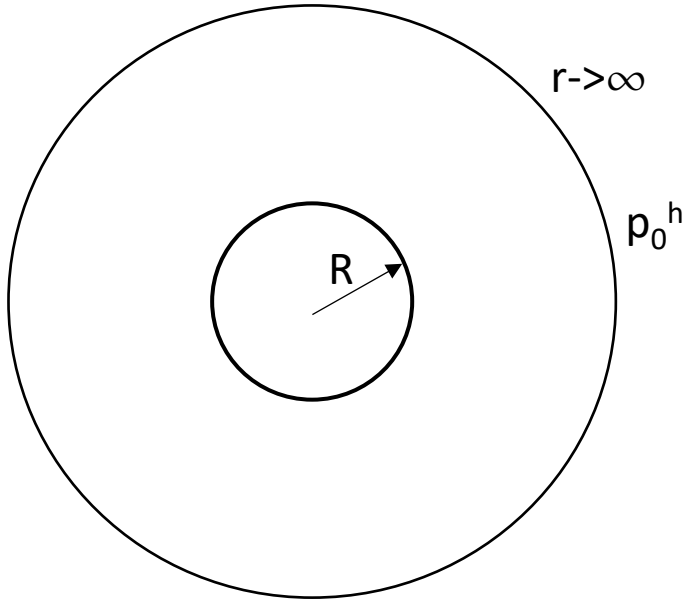
$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = a - \frac{b}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = a + \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\left(a - \frac{b}{r^2}\right) + \nu\left(a + \frac{b}{r^2}\right)\right)$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\left(a + \frac{b}{r^2}\right) + \nu\left(a - \frac{b}{r^2}\right)\right)$$

- *Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)*

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\left((1-\nu)\left(a-\frac{b}{r^2}\right)+\nu\left(a+\frac{b}{r^2}\right)\right)$$



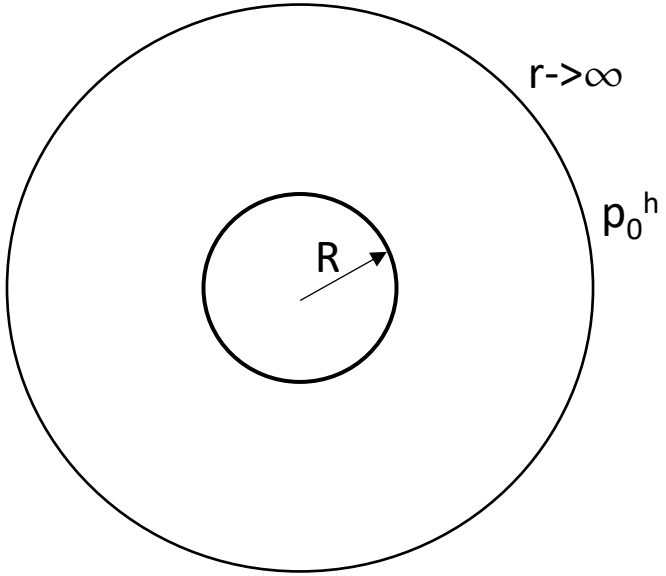
+ Conditions aux limites

$$\begin{cases} \sigma_r(r=R) = \dfrac{E\left(aR^2-b(1-2\nu)\right)}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0 \\ \sigma_r\left(r\to\infty\right) = \dfrac{aE}{(1+\nu)(1-2\nu)} = p_0^h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E}\,p_0^h \\ b = \dfrac{(1+\nu)R^2}{E}\,p_0^h \end{cases}$$

- *Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)*

$$\begin{cases} a = \dfrac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} p_0^h \\ b = \dfrac{(1+\nu) R^2}{E} p_0^h \end{cases}$$

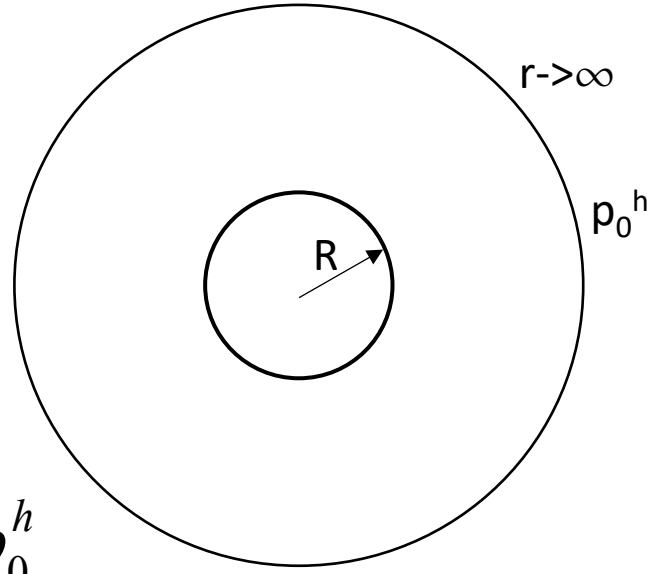


$$u = a.r + \frac{b}{r} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)\, p_0^h}{E} r + \frac{1+\nu}{E} \frac{R^2 p_0^h}{r} = \frac{p_0^h}{3K} r + \frac{R^2 p_0^h}{2G.r}$$

Module de compressibilité et module de cisaillement

$$K = \frac{E}{3(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

- *Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)*



Cas du matériau incompressible:

$$\nu = 0.5, \quad K \to \infty$$

$$u = \frac{p_0^h}{3K} r + \frac{R^2 p_0^h}{2G.r}$$

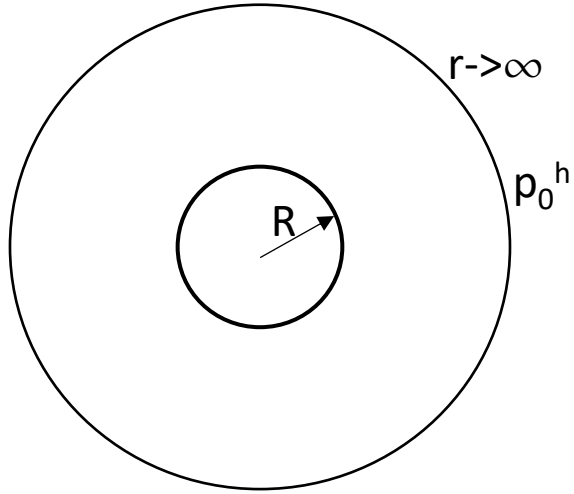
$$u_R^{elast}(r = R) = \frac{R p_0^h}{2G}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = (1 - \frac{R^2}{r^2}) p_0^h \\ \sigma_\theta = (1 + \frac{R^2}{r^2}) p_0^h \end{cases}$$

Attention: l'état de contrainte dans le massif n'évolue pas en fonction du temps.

*- Solution analytique dans le cas **viscoélastique linéaire** (problème de déformation plane)*

$$\begin{cases} \sigma_r = (1-\dfrac{R^2}{r^2})\,p_0^h \\ \sigma_\theta = (1+\dfrac{R^2}{r^2})\,p_0^h \end{cases}$$

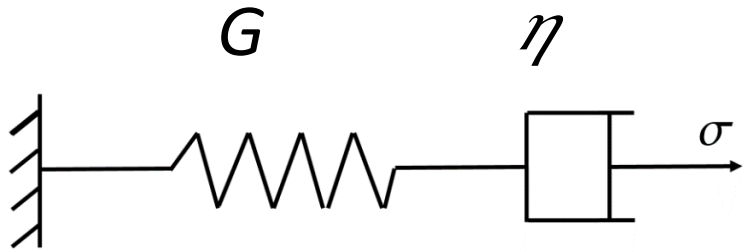


L'état de contrainte dans le massif n'évolue pas en fonction du temps: ainsi dans le cas du massif **viscoélastique linéaire on applique le théorème de correspondance** (le problème est équivalent au problème de fluage)

$$u_R^{elast} = \frac{Rp_0^h}{2G} \quad \Rightarrow \quad u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2}\frac{1}{G_{LC}}$$

- Modèle de Maxwell du massif rocheux

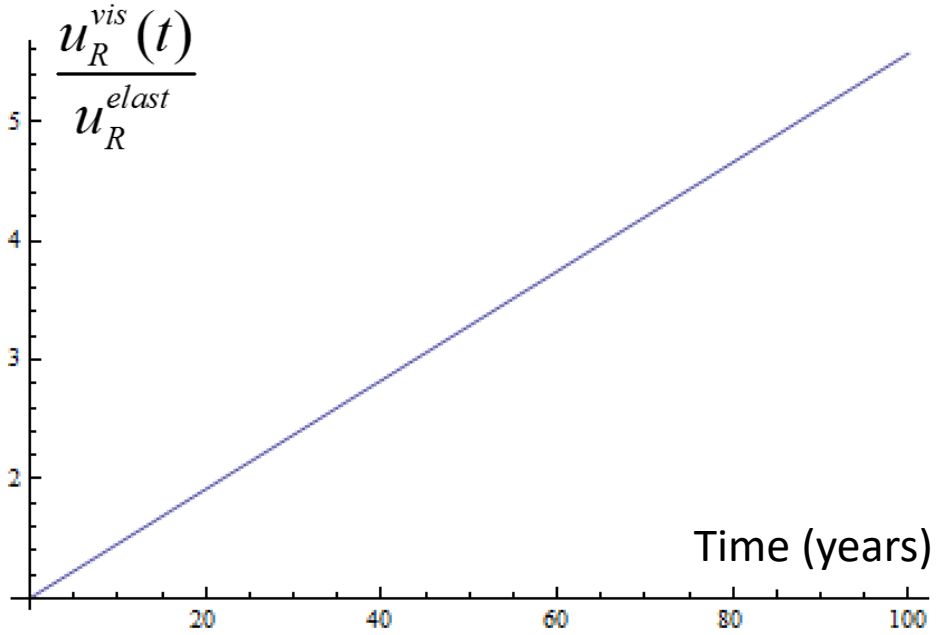
$$u_R^{elast} = \frac{Rp_0^h}{2G} \qquad G_{LC} = \frac{G.s.\eta}{\eta s + G}$$



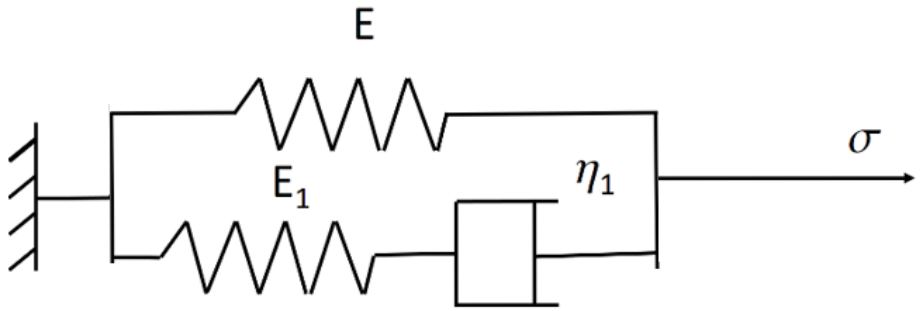
$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2}\frac{G + s.\eta}{G.s.\eta}$$

$$u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2}\left(\frac{1}{G} + \frac{t}{\eta}\right)$$

- Numerical application: G=6.0(GPa), η=4.14x10^9(GPa/s)



- *Modèle de Zener du massif rocheux*

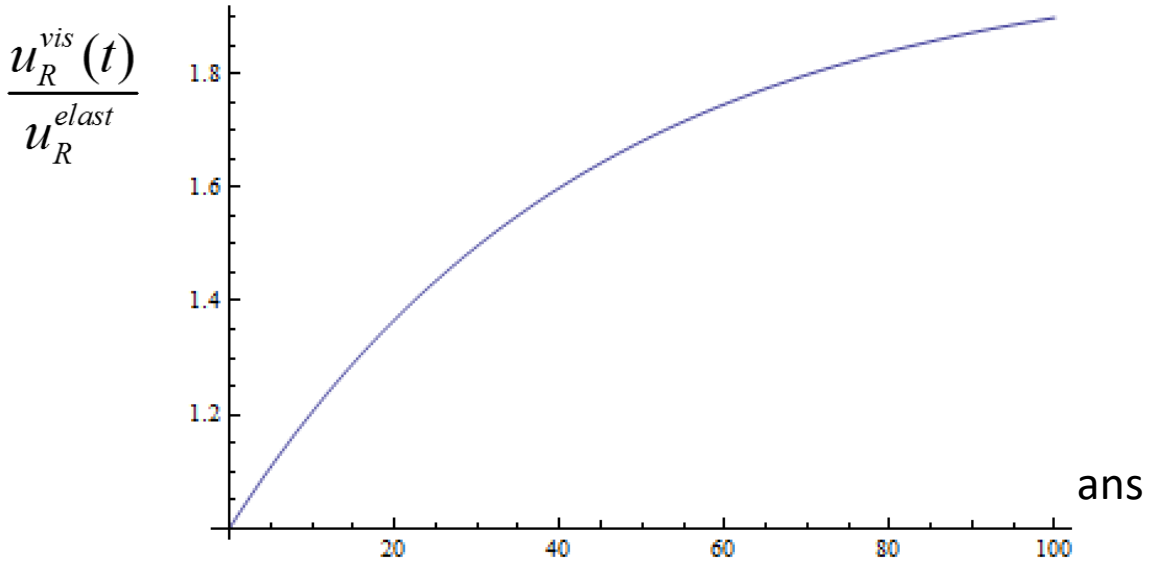


$$G_{LC} = G + \frac{G_1 \eta_1 s}{\eta_1 s + G_1}$$

$$u_{LC} = \frac{R p_0^h}{2} \frac{1}{\left(G + \frac{G_1 \eta_1 s}{\eta_1 s + G_1} \right)}$$

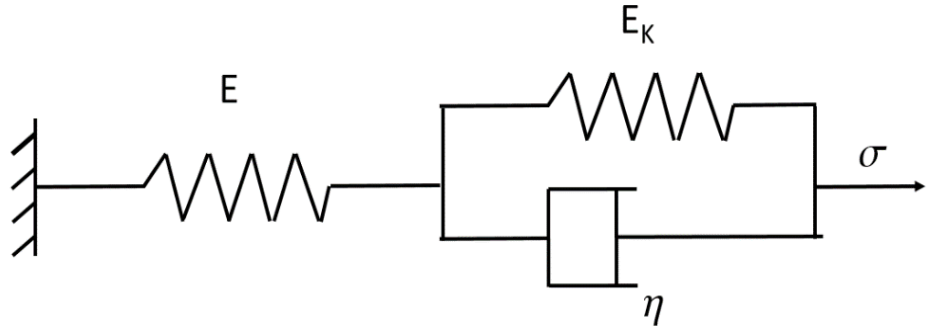
$$u_R^{vis}(t) = \frac{R p_0^h}{2} \left(\frac{1}{G} - \frac{G_1 e^{-\frac{G_1 G t}{(G+G_1)\eta_1}}}{G(G+G_1)} \right)$$

$$\frac{u_R^{vis}(t)}{u_R^{elast}} = \left(\frac{G+G_1}{G} - \frac{G_1 e^{-\frac{G_1 G t}{(G+G_1)\eta_1}}}{G} \right)$$



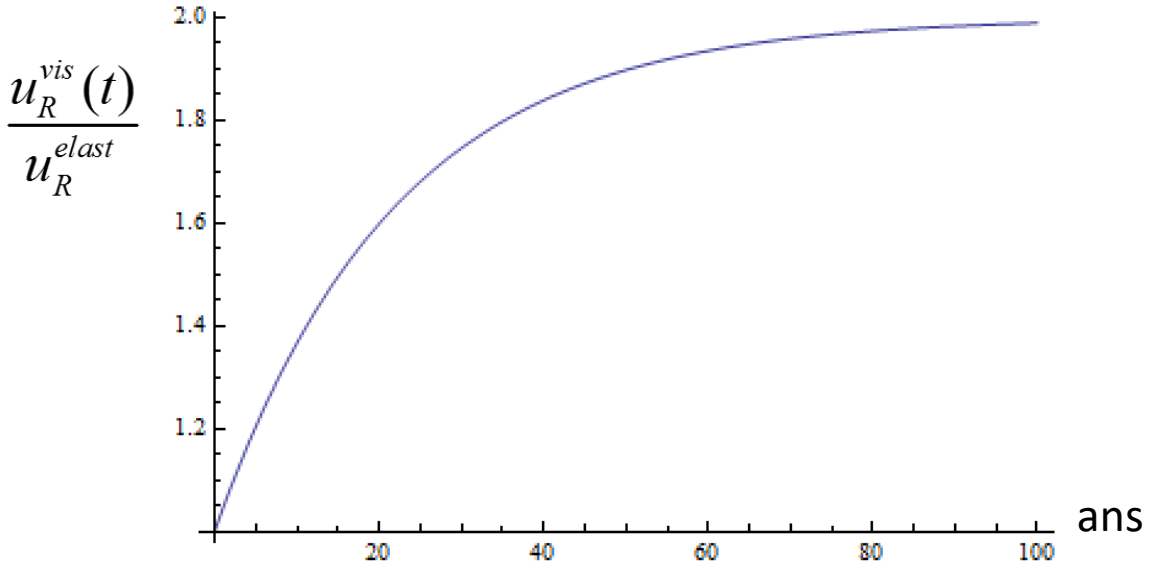
- Modèle de Kelvin-Voigt du massif rocheux

$$G_{LC} = G\frac{G_K + \eta s}{\eta s + G_K + G}$$



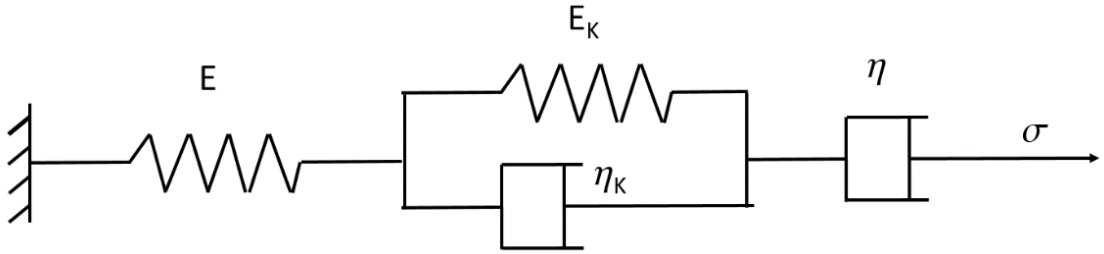
$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2}\frac{\left(G + G_K + \eta s\right)}{G\left(G_K + \eta s\right)} \quad \Rightarrow \quad u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2}\left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_K}\left(1 - e^{-\frac{G_K t}{\eta}}\right)\right)$$

$$\frac{u_R^{vis}(t)}{u_R^{elast}} = \left(\frac{G + G_K}{G_K} - \frac{Ge^{-\frac{G_K t}{\eta}}}{G_K}\right)$$



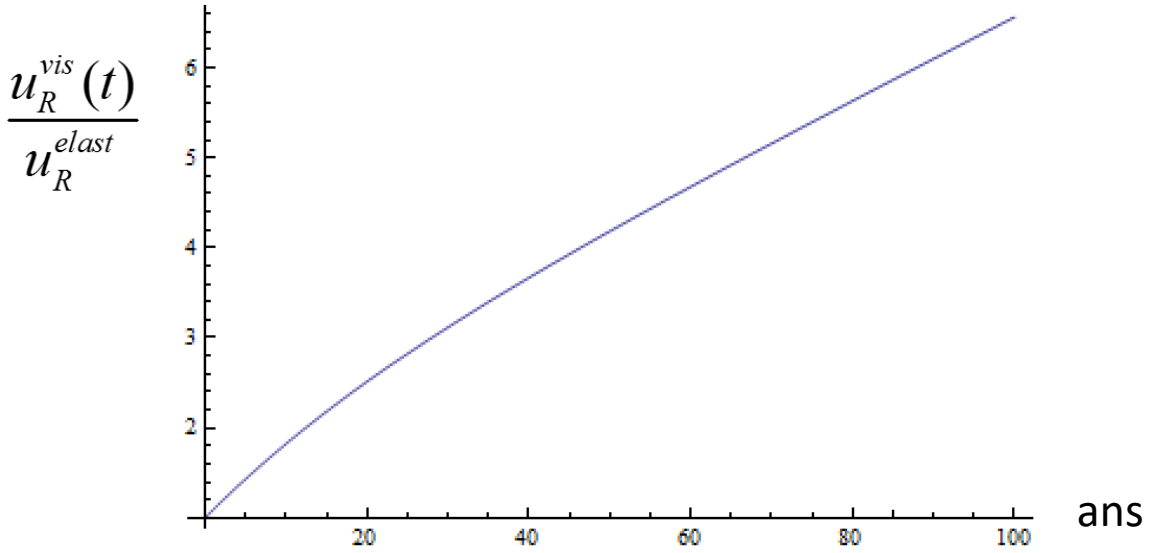
- *Modèle de Burger du massif rocheux*

$$G_{LC} = \frac{Gs(G_K + \eta_K s)}{Gs + (\eta_K s + G_K)(G/\eta + s)}$$

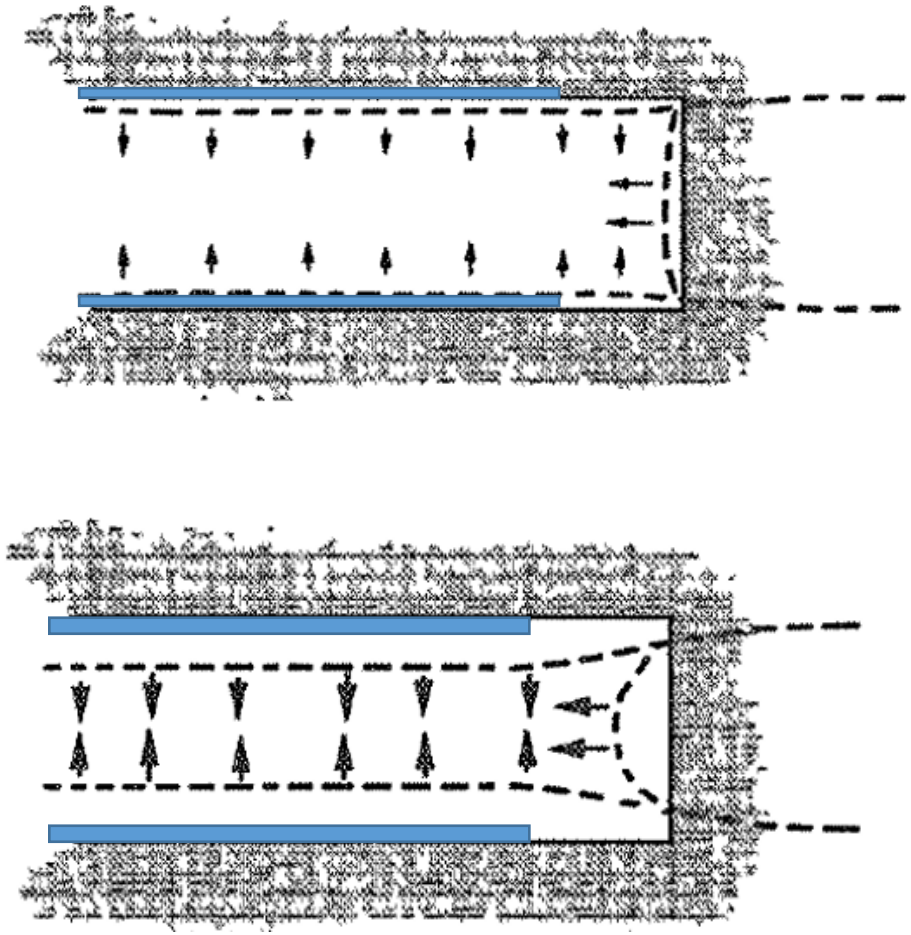


$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2} \frac{\left(Gs + \left(G_K + \eta_K s\right)(G/\eta + s)\right)}{Gs\left(G_K + \eta_K s\right)} \rightarrow u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2}\left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_K}(1 - e^{-\frac{G_K t}{\eta_K}}) + \frac{t}{\eta}\right)$$

$$\frac{u_R^{vis}(t)}{u_R^{elast}} = 1 + \frac{G\left(G_K t + \eta - \eta e^{-\frac{G_K t}{\eta_K}}\right)}{G_K \eta}$$



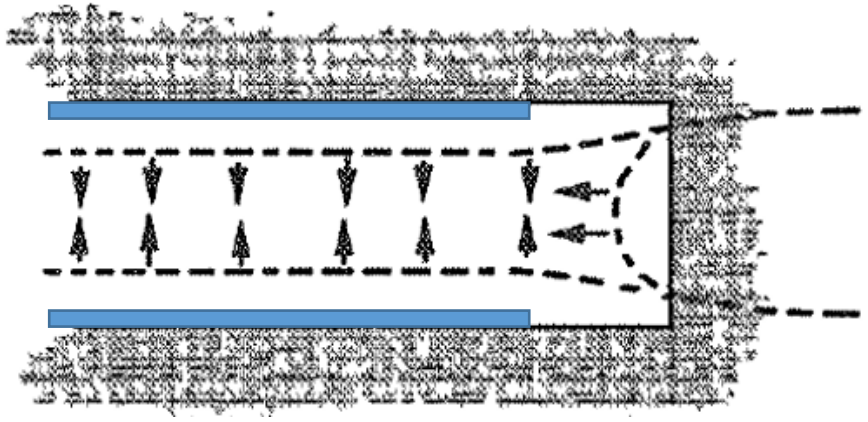
Influence du comportement différé du massif rocheux à la conception du revêtement (béton, acier)

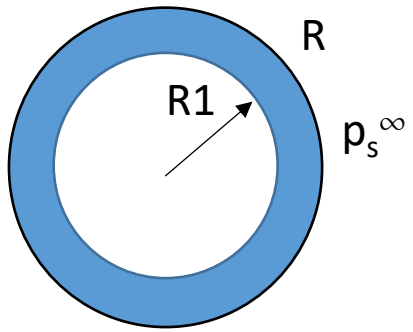






Influence du comportement différé du massif rocheux à la conception du revêtement (béton, acier)





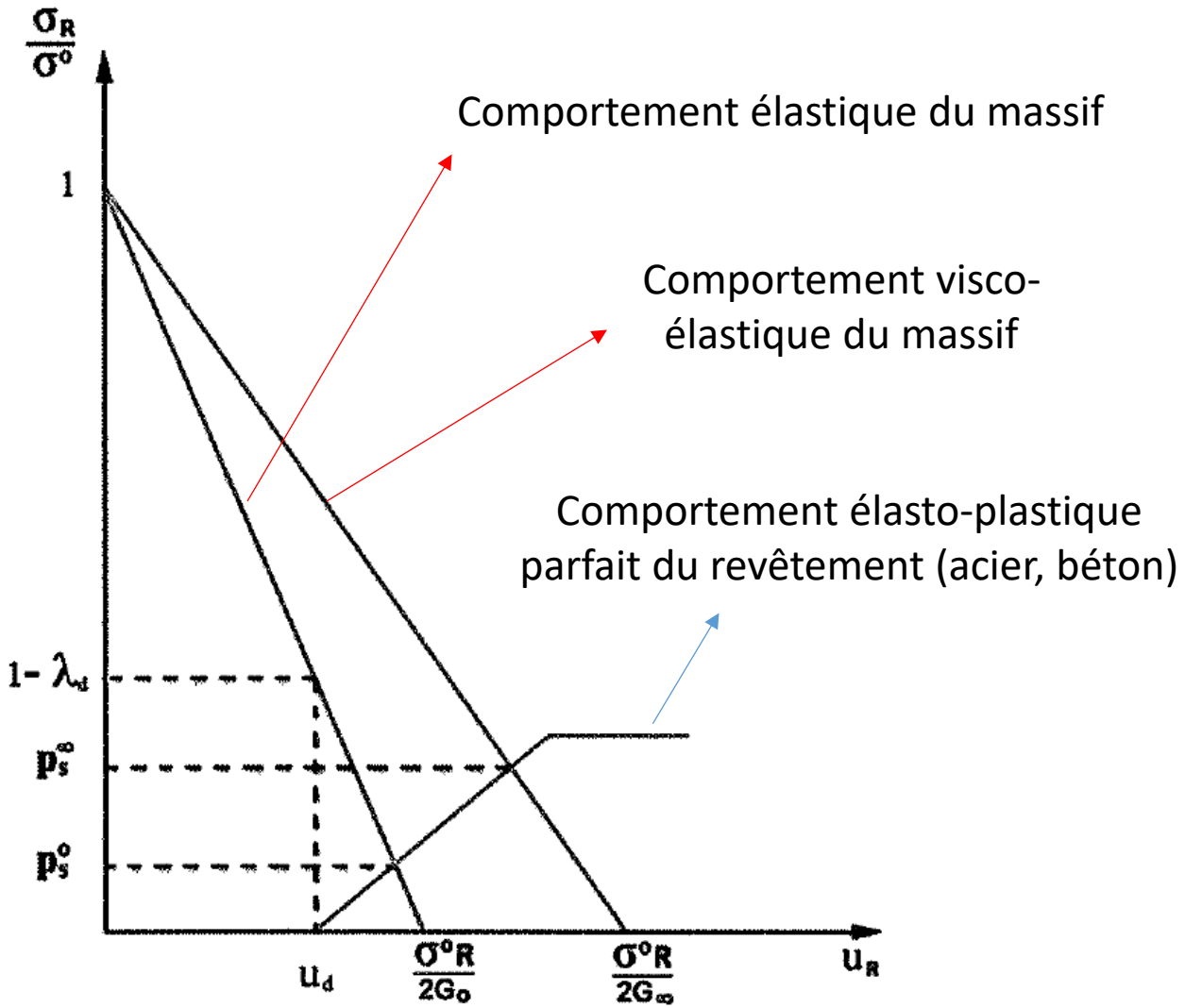
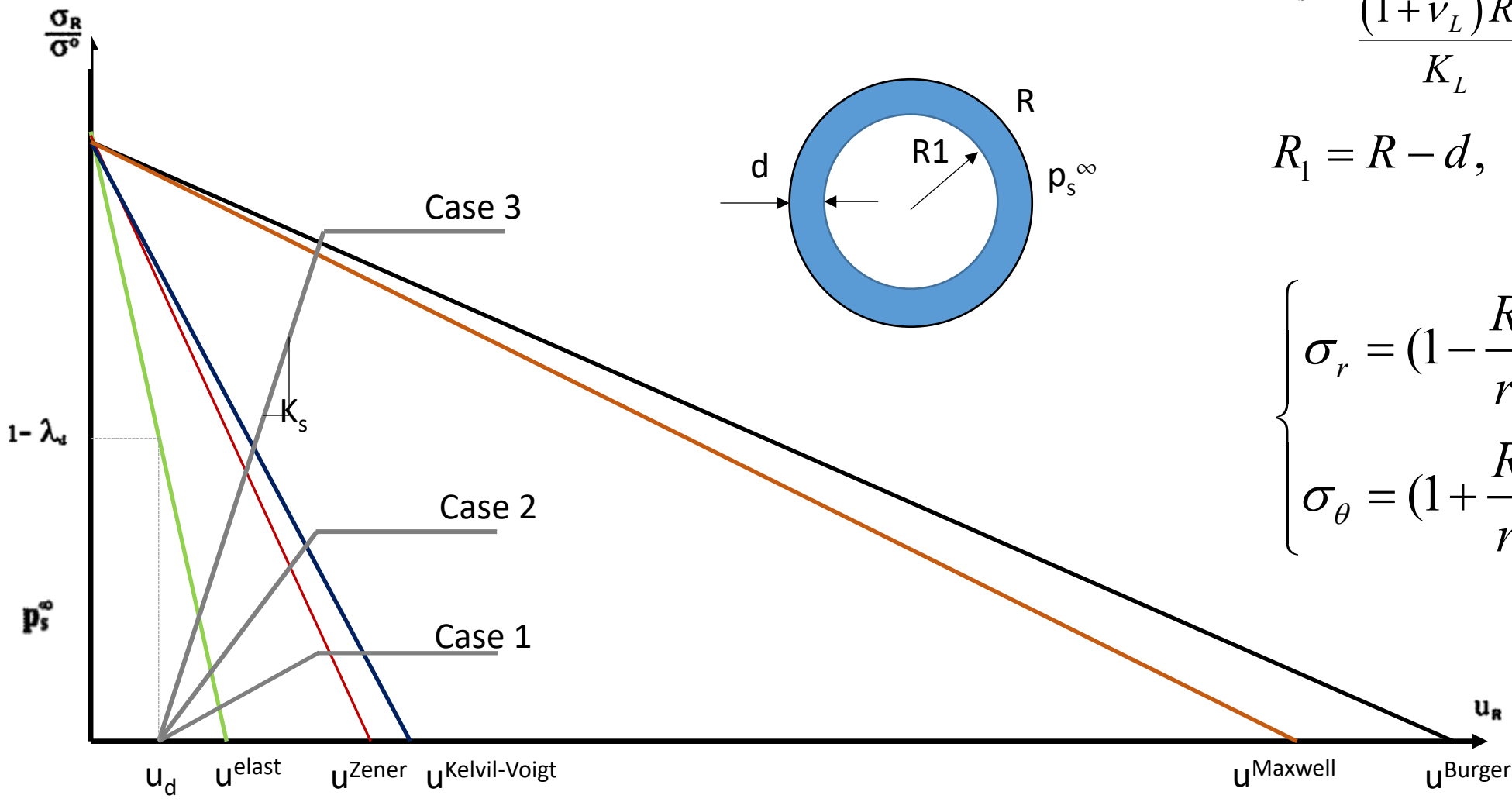


Figure 15 - Représentation graphique de la méthode convergence confinement dans le cas exisymétrique - massif viscoélastique

- Comportement élastique linéaire du revêtement (béton, acier)

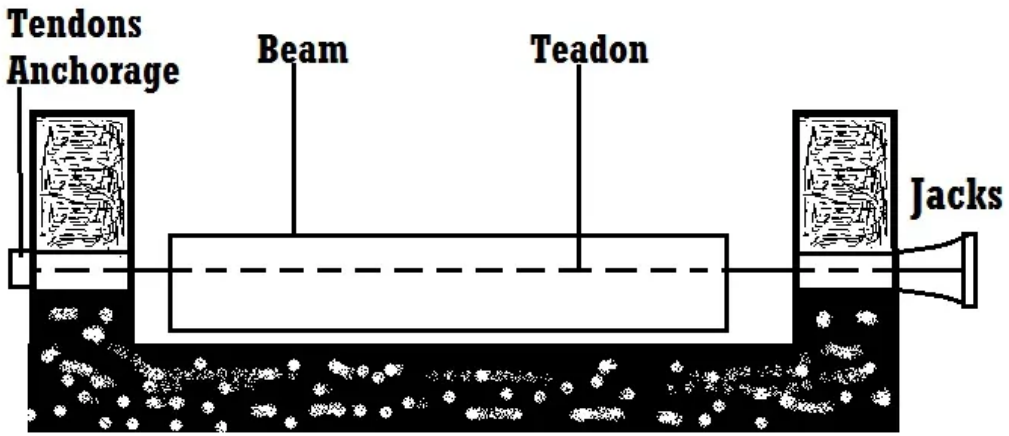


$$K_s = \frac{R^2 - R_1^2}{\frac{(1+\nu_L)R^2}{K_L} + \frac{R_1^2}{2G_L}},$$

$$R_1 = R - d,$$

$$\begin{cases} \sigma_r = (1 - \frac{R_1^2}{r^2}) p_s^\infty \\ \sigma_\theta = (1 + \frac{R_1^2}{r^2}) p_s^\infty \end{cases}$$

Exemple d’application 2: précontrainte en compression

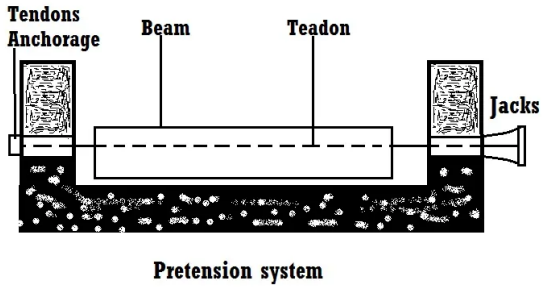


Pretension system



Exemple d'application 2: précontrainte en compression

- Précontrainte le béton dont le comportement est viscoélastique linéaire par les armatures élastique (tendue et ancrée sur les deux plaques)



Pretension system



- La contrainte tendue des armatures à l'instant initial t_0 est σ_0

+ En notant la contrainte dans les armatures $\sigma_1(t)$ et dans le béton $\sigma_2(t)$.

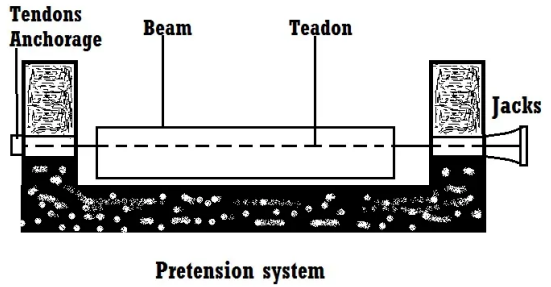
$$\sigma_1(t_0) = \sigma_0, \quad \sigma_2(t_0) = -\sigma_0$$

+ Le comportement instantané ($t=t_0$)

$$\varepsilon_1(t_0) = \frac{\sigma_0}{E_s}, \quad \varepsilon_2(t_0) = -f(t_0)\sigma_0$$

E_s: module élastique d'armature, f(t): fonction de retard du béton

Exemple d'application 2: précontrainte en compression



Pretension system



- En fonction du temps: le comportement viscoélastique du béton crée une déformation en compression (dans le béton et aussi dans l'armature) et une diminution de la contrainte dans chaque élément (béton, acier)

+ il n'y a pas de chargement extérieure du système, nous avons:

$$\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = 0$$

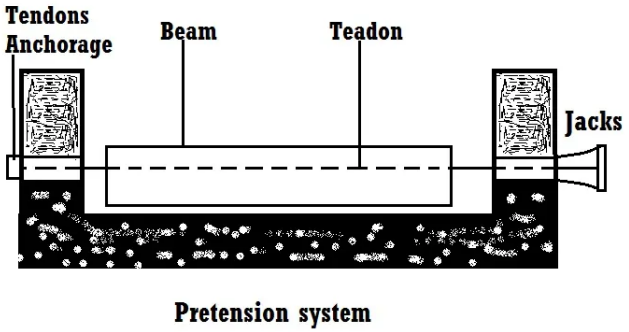
$$\sigma_2(t) = -\sigma_1(t)$$

+ la liaison entre béton et acier conditionne le même raccourcissement dans ces deux matériaux: $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(t_0) = \varepsilon_2(t) - \varepsilon_2(t_0)$

Exemple d'application 2: précontrainte en compression

$$\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(t_0) = \varepsilon_2(t) - \varepsilon_2(t_0)$$

$$\frac{\sigma_1(t) - \sigma_1(t_0)}{E_s} = f\,'^{*}\,\sigma_2 - f(t_0)\sigma_2(t_0)$$



Pretension system

avec: $\sigma_2(t_0) = -\sigma_1(t_0) = -\sigma_0$

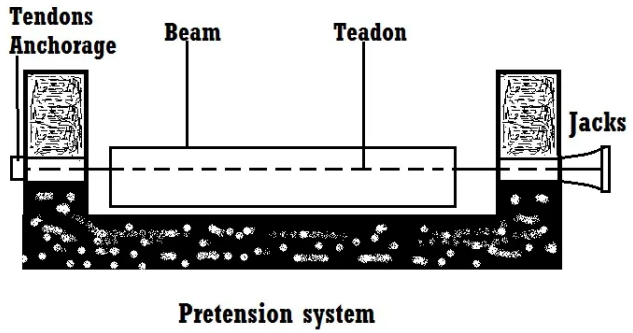
$\sigma_2(t) = -\sigma_1(t)$



$$(f(t) + \frac{1}{E_s})'^{*}\,\sigma_2 = -\left(\frac{1}{E_s} + f(t_0)\right)\sigma_0$$

Exemple d'application 2: précontrainte en compression

$$g'^{*}\sigma_2 = -g(t_0)\sigma_0, \quad g(t) = f(t) + \frac{1}{E_s}$$



Pretension system

$$g_{LC}\left(\sigma_2\right)_{LC} = -g(t_0)\sigma_0$$

$$\left(\sigma_2\right)_{LC} = -g(t_0)\sigma_0 R_{LC}, \quad R_{LC}g_{LC} = 1$$



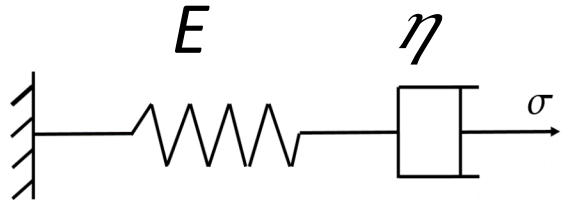
$$\sigma_2(t) = -\sigma_0 \frac{R(t)}{R(t_0)} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right|$$

Exemple d'application 2: précontrainte en compression

- *Modèle Maxwell du béton*



$$f(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta} \quad \Rightarrow \quad g(t) = f(t) + \frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_s} + \frac{t}{\eta}$$



$$g_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_s} + \frac{1}{\eta s} \quad \Rightarrow \quad R_{LC} = \frac{1}{g_{LC}}$$

$$R(t) = \frac{E_s E}{E_s + E} e^{-\frac{E_s E}{E_s + E}\frac{t}{\eta}} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = e^{-\frac{E_s E}{E_s + E}\frac{t}{\eta}}$$

Exemple d'application 2: précontrainte en compression

- *Modèle Maxwell du béton*

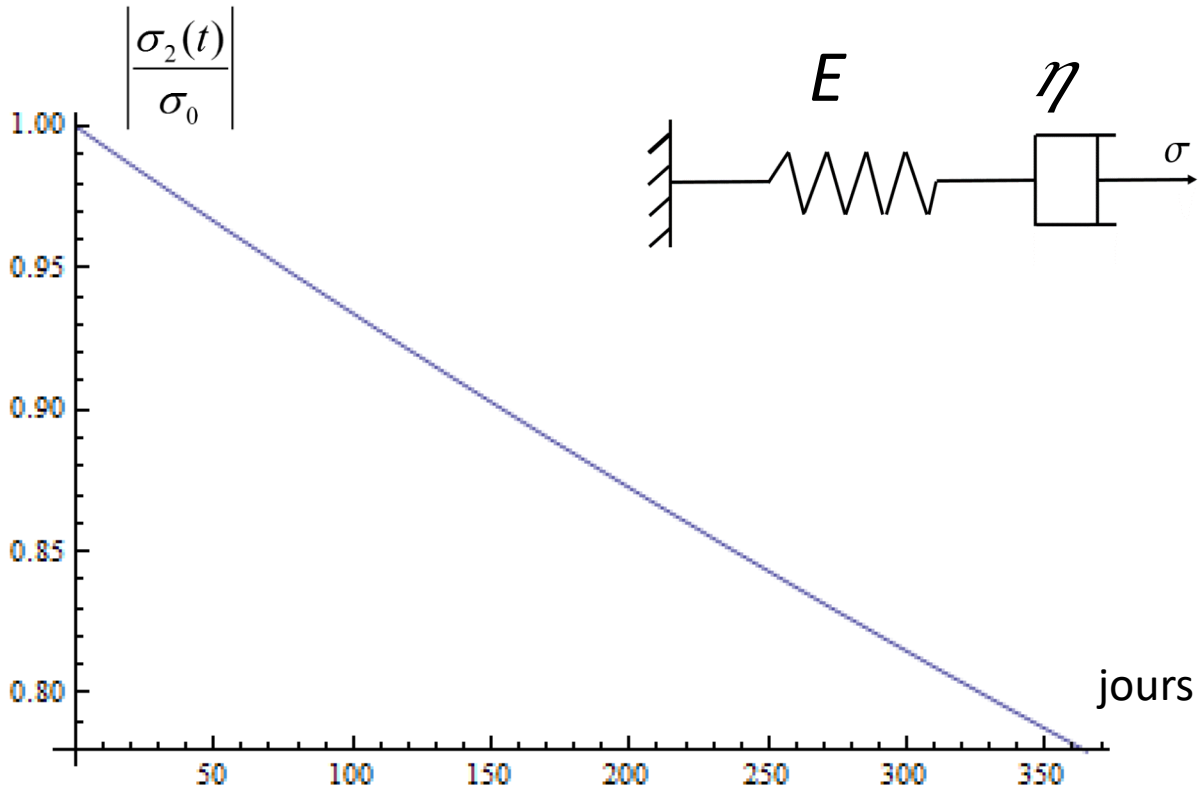
$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = e^{-\frac{E_s E}{E_s + E}\frac{t}{\eta}}$$



+ Application numérique:

E_s=200(GPa), E=39.1(GPa),

η=4.14x10^9(GPa/.s)

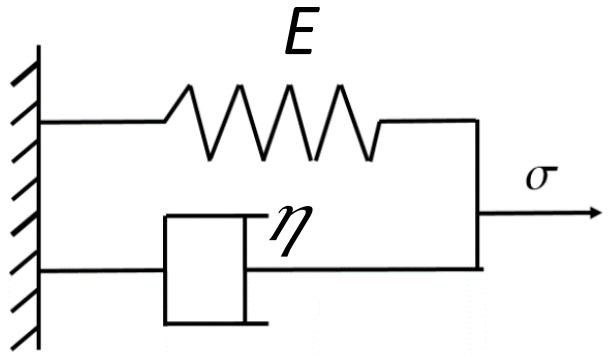


Exemple d'application 2: précontrainte en compression

- Modèle de Kelvin du béton



$$f(t)=\frac{1}{E}(1-e^{-\frac{E}{\eta}t}) \Rightarrow g(t)=f(t)+\frac{1}{E_s}=\frac{1}{E}(1-e^{-\frac{E}{\eta}t})+\frac{1}{E_s}$$



$$g_{LC}=\frac{1}{E+\eta s}+\frac{1}{E_s} \Rightarrow R_{LC}=\frac{1}{g_{LC}}$$

$$R(t)=\frac{E_s E}{E_s+E}+\frac{E_s^2}{E_s+E}e^{-\frac{E_s+E}{\eta}t} \Rightarrow \left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right|=\left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right|=\frac{E+E_s e^{-\frac{E_s+E}{\eta}t}}{E+E_s}$$

Exemple d'application 2: précontrainte en compression

- *Modèle de Kelvin du béton*

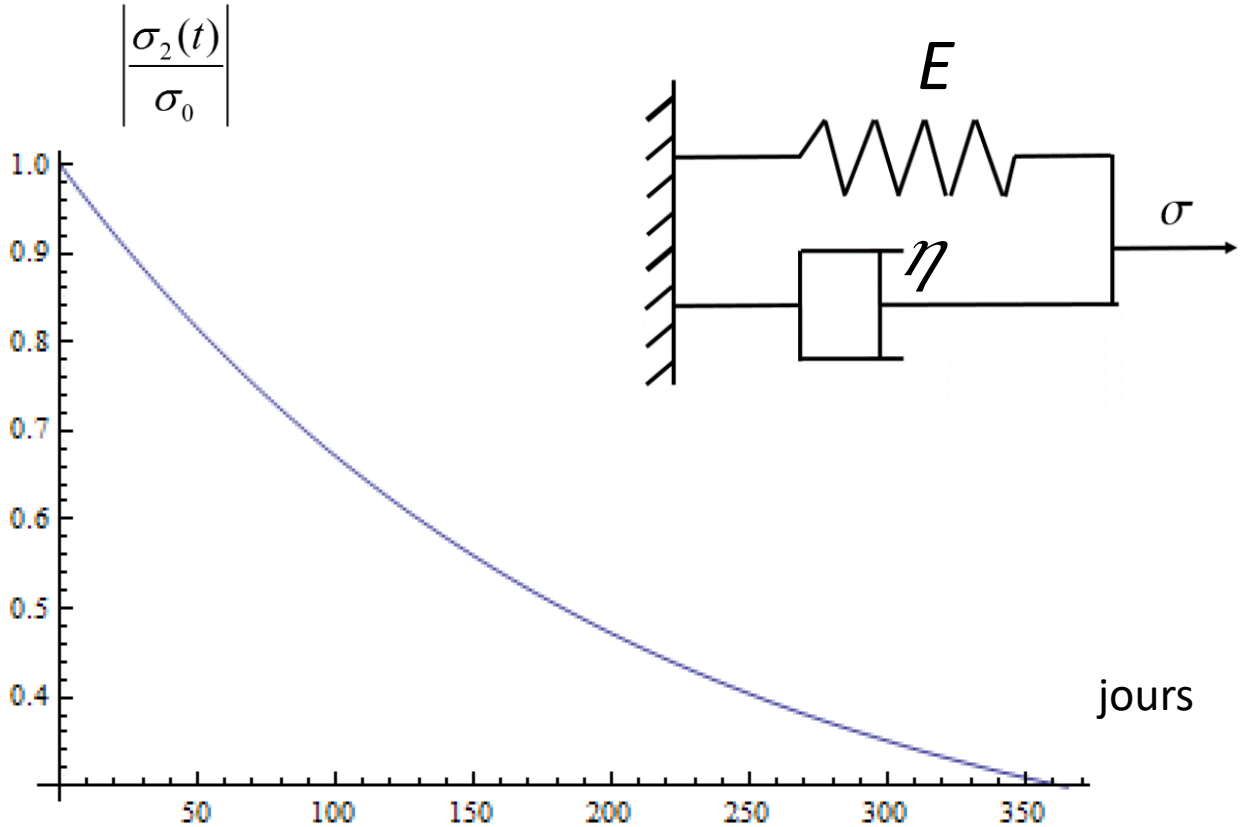
$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = \frac{E + E_s e^{-\frac{E_s+E}{\eta}t}}{E + E_s}$$



+ Application numérique:

E_s=200(GPa), E=39.1(GPa),

η=4.14x10^9(GPa/.s)

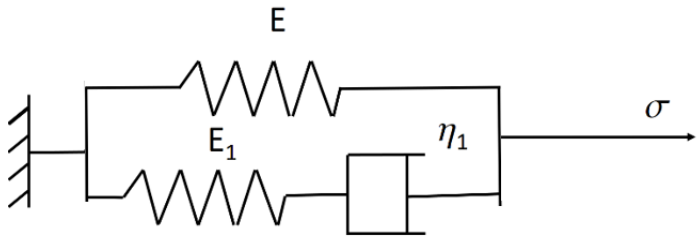


Exemple d'application 2: précontrainte en compression

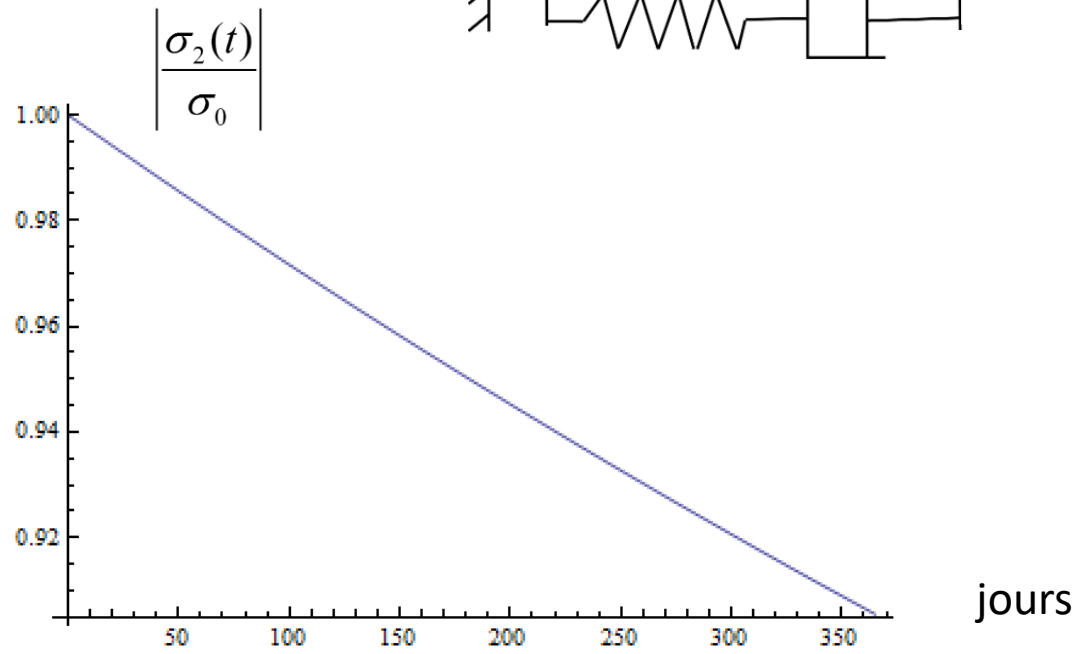
- *Modèle de Zener du béton*

$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = \frac{E(E+E_1+E_s)+E_1E_s e^{-\frac{E_1(E_s+E)}{E+E_1+E_s}\frac{t}{\eta_1}}}{(E+E_s)(E+E_1)}$$





+ Application numérique:
E_s=200(GPa), $E=E_1$= 39.1(GPa),
η_1=4.14x10^9(GPa/.s)

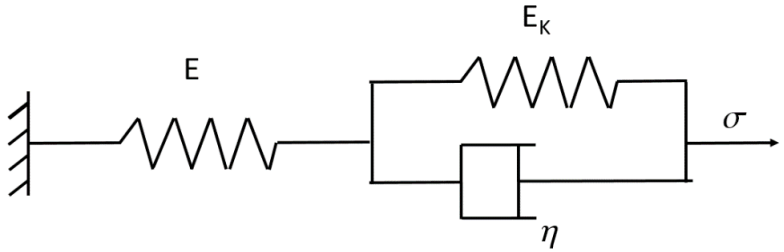


Exemple d'application 2: précontrainte en compression

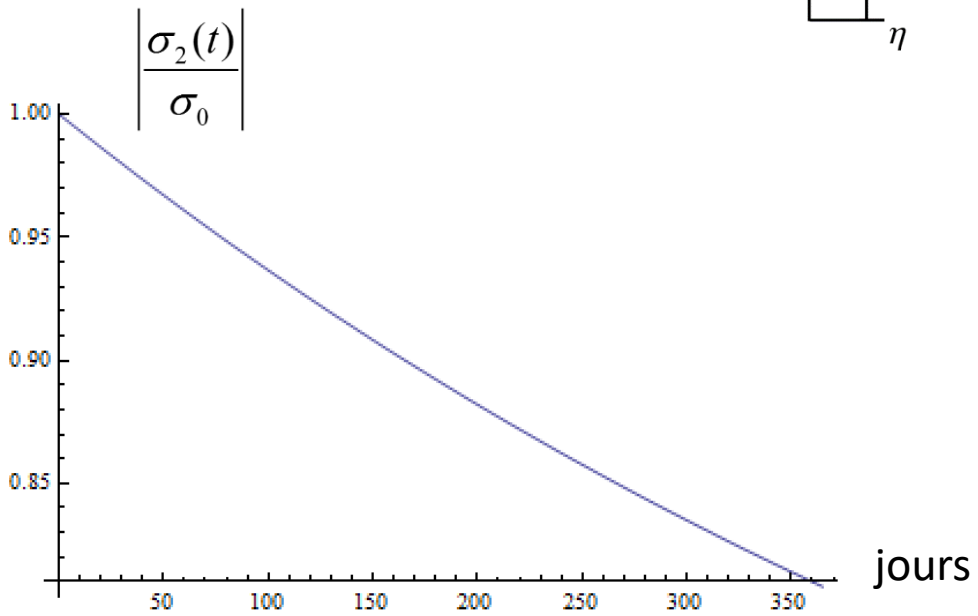
- *Modèle de Kelvin-Voigt du béton*

$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = \frac{E_K(E+E_s)+E_sEe^{-\frac{E_sE+E_K(E+E_s)}{E+E_s}\frac{t}{\eta}}}{E_sE+E_K(E+E_s)}$$



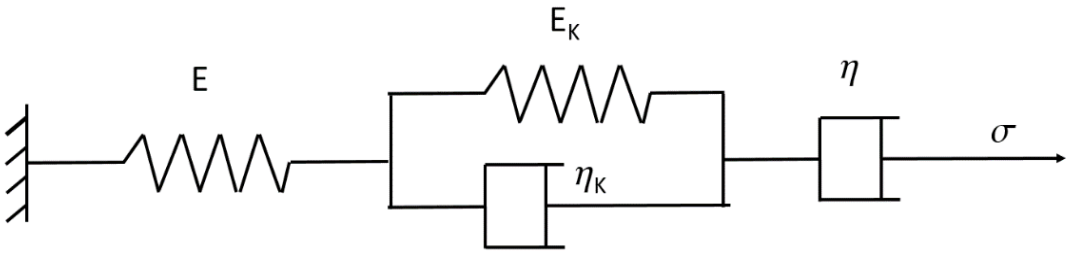


+ Application numérique:
E_s=200(GPa), $E=E_K$= 39.1(GPa),
η_1=4.14x10^9(GPa/.s)



Exemple d'application 2: précontrainte en compression

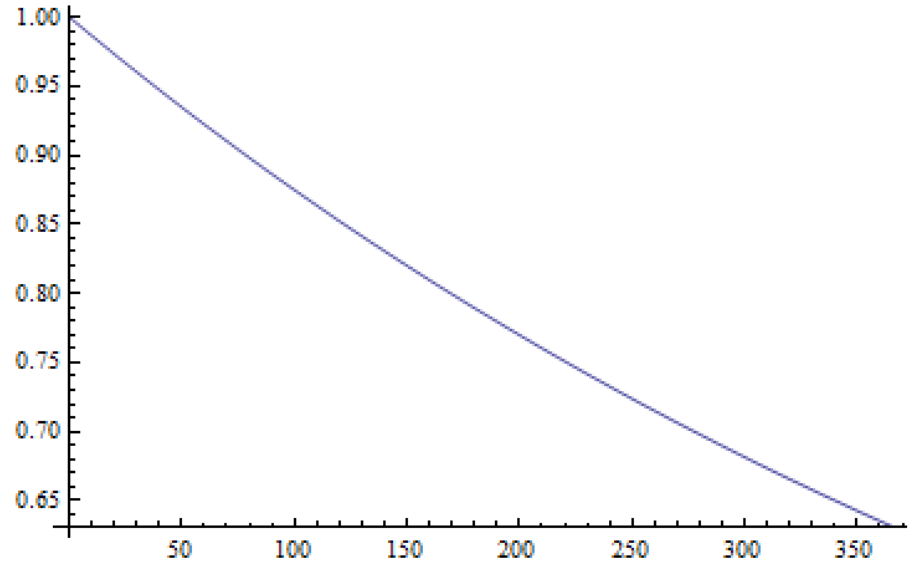
- *Modèle de Burger du béton*





+ Application numérique:
E_s=200(GPa), $E=E_K$= 39.1(GPa),
$\eta = \eta_K$=4.14x10^9(GPa/.s)

$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right|$$



DM (à rendre au 17/10 à 23h55):

Exercice 1: Comportement différé du revêtement en béton d'un tunnel profond

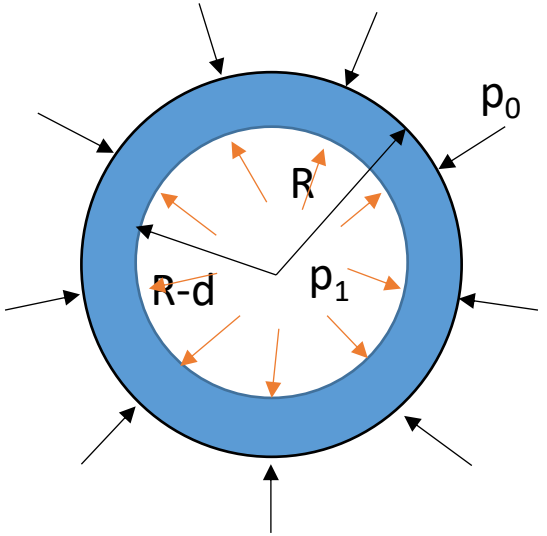
Soit le revêtement en béton d'un tunnel profond de rayon R. L'épaisseur du revêtement est *d*. Le comportement du béton est viscoélastique linéaire. Le chargement transmit du massif rocheux du tunnel au revêtement p0 est uniforme. A l'intérieur, le revêtement est imposé une charge hydrostatique p1.

En utilisant la solution analytique, comparez le déplacement radial (u_R) et la déformation ortho-radiale ($\epsilon_{\theta\theta}$) à l'intrados et à l'intrados du revêtement (c'est-à-dire au point de rayon r=R et r=R-d) à 100 ans du revêtement en considérant: le modèle de l'EC2 et les modèles rhéologiques (Maxwell, Kelvin, Kelvin-Voigt, Burger) pour caractériser le comportement différé du béton C40/50.

Données: p0=1.5(MPa), p1=0.5(MPa), R=5m, d=0.5m, $E=E_M=E_K=E_c$, $\eta=\eta_M=\eta_K=4.14x10^9$(GPa/.s)





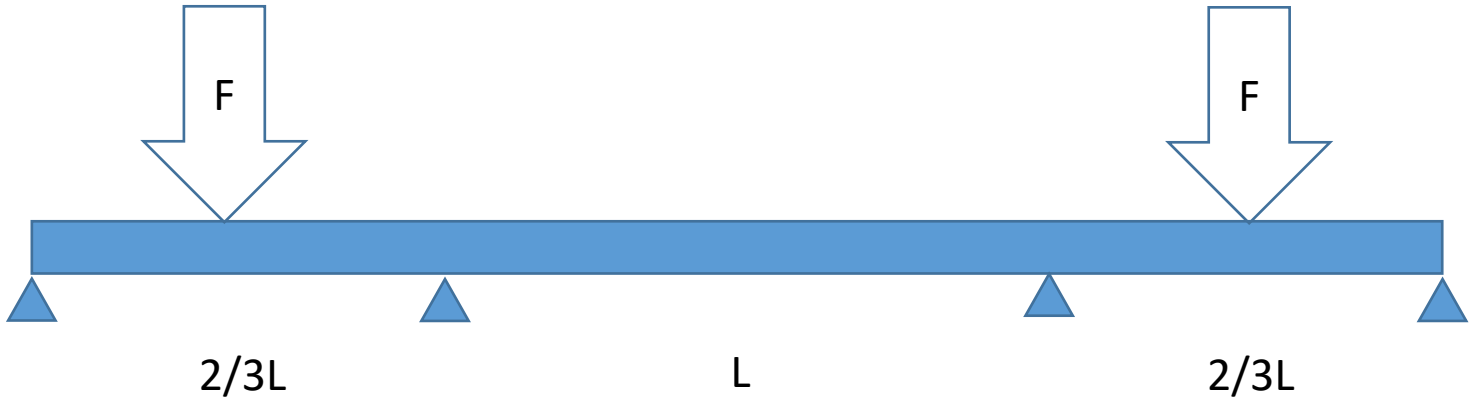


DM (à rendre au 17/10 à 23h55):

Exercice 2: Comportement différé d'une poutre continue en béton

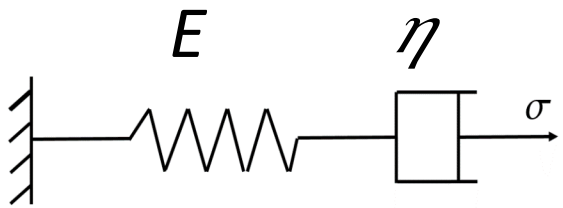
En utilisant le logiciel Robobat, comparez la flèche à 80 ans d'une poutre continue ***sous la charge ponctuelle et son poids propre*** *en considérant: l'EC2 et les modèles rhéologiques (Maxwell, Kelvin, Kelvin-Voigt, Burger) pour caractériser le comportement différé du béton C25/30*

Données: F=45(kN), L=24m, E $=E_M=E_K=E_c$, $\eta=\eta_M=\eta_K=4.14x10^9$(GPa/.s). La section droite de la poutre rectangulaire: b x h= 0.75m x 1.2m

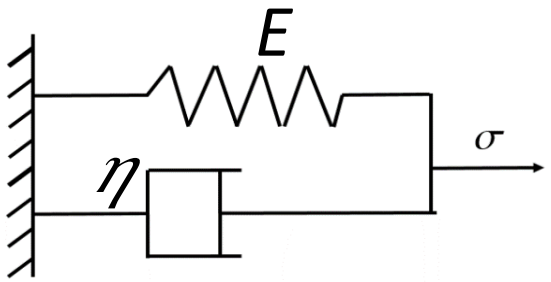


+ EC2: $$E_{c,eff}(t) = \frac{E_c(t_0)}{1+\varphi(t,t_0)} \qquad E_c = 22000\left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0.3}$$

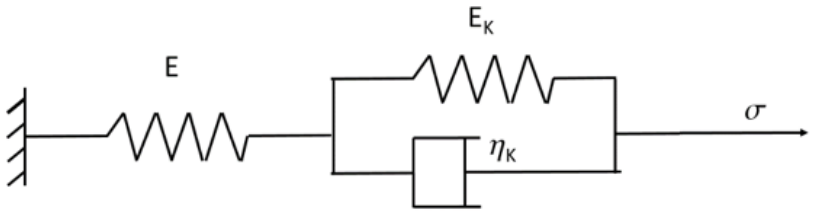
+ *Modèle Maxwell*



+ *Modèle de Kelvin*



+ *Modèle de Kelvin-Voigt*



+ *Modèle de Burger*

