# Comportement viscoélastique linéaire

Pour le matériau non-vieillissant (c'est-à-dire ses propriétés mécaniques n'évoluent pas avec le temps), la fonction de retard et de relaxation sont exprimées sous la forme

$$J(t_0,t) = f(t-t_0)$$
 ou  $R(t_0,t) = r(t-t_0)$ 

Les deux fonctions de retard f et de relaxation r vérifient :

$$f(0)r(0) = 1;$$
  $f(\infty)r(\infty) = 1;$ 

La superposition donne la solution:

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t} J(\tau, t) \sigma'(\tau) d\tau = \sigma(t) J(t, t) - \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau) \frac{\partial J(\tau, t)}{\partial \tau} d\tau$$

$$\varepsilon(t) = \sigma(t)f(0) + \int_{-\infty}^{t} \sigma(\tau)f'(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(\tau)f'(t-\tau)d\tau$$

Le produit de convolution de Riemann:

$$\varepsilon = f'^* \sigma$$
 ou  $\sigma = r'^* \varepsilon$ 

# Comportement viscoélastique linéaire

Transformation de Laplace (s: variable dans l'espace de Laplace)

$$L\{g\}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

La transformation de Laplace-Carson de la distribution g, noté  $g_{LC}$ , est la transformée de Laplace de la dérivée de g :

$$g_{LC}(s) = L\{g'\}(s) = s.L\{g\}(s) = s\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-st}dt$$

Une des propriétés essentielles de la transformation de Laplace et de Laplace-Carson concerne le changement du produit de convolution en produit :

$$L\{a*b\} = L\{a\}L\{b\}$$
$$(a*b')_{LC} = a_{LC}b_{LC}$$

Ainsi:

$$\varepsilon = f' * \sigma$$

$$\varepsilon_{LC}(s) = f_{LC}(s)\sigma_{LC}(s)$$

#### Comportement viscoélastique linéaire

#### Théorème de correspondance

- Sous l'hypothèse des petites perturbations, le problème statique avec les conditions aux limites invariables dans le temps d'un matériau dont le comportement évolue linéairement en fonction du temps s'écrit dans l'espace de Laplace-Carson est formellement identique à un problème d'équilibre élastique linéaire
- Si la solution explicite (analytique) du problème d'équilibre élastique linéaire existe, elle est directement appliquée pour déduire la solution du problème original d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson
- Une transformation inverse de Laplace-Carson permettra de déduire la solution cherchée dans l'espace temporel. Ce principe d'application de la solution du problème élastique linéaire pour déduire la solution du problème d'évolution dans l'espace de Laplace-Carson est connu sous le nom de théorème de correspondance.

# Comportement viscoélastique linéaire: extension dans le cas 3D

#### Théorème de correspondance

- sous les conditions aux limites  $S_U$  et  $S_T$  qui sont indépendantes de temps t

 les équations du problème d'équilibre mécanique dans l'espace de Laplace-Carson

$$S_U \cap S_T = 0$$
,  $S_U \cup S_T = \partial \Omega$ 

$$\operatorname{div}_{\underline{\underline{\sigma}_{LC}}}(s) + \rho \underline{F_{LC}}(s) = 0$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}_{LC}}}(s) = \frac{1}{2} \left[ \underbrace{\underline{\mathrm{grad}} \xi_{lC}}_{lC}(s) + \underbrace{\mathrm{grad}} \xi_{lC}(s) \right]$$

$$\underline{\underline{\mathcal{E}_{LC}}}(s) = \frac{1+\nu}{E_{LC}} : \underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) - \frac{\nu}{E_{LC}} \left[ \text{tr} \underline{\underline{\sigma_{LC}}}(s) \right] \underline{\underline{\delta}}$$

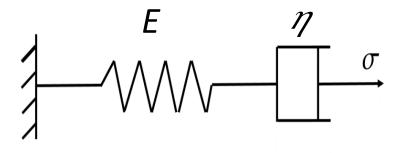
# Modèle rhéologique pour présenter le comportement viscoélastique du matériau

#### Modèle de Maxwell

$$\varepsilon_{LC} = \frac{\sigma_{LC}}{E} + \frac{\sigma_{LC}}{s.\eta} = \sigma_{LC} \left( \frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta} \right) = f_{LC} \sigma_{LC}$$

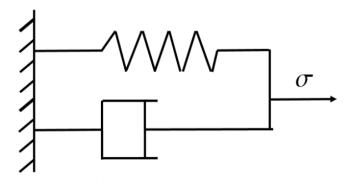
$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{s.\eta}$$

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s.\eta}{\eta s + E}$$

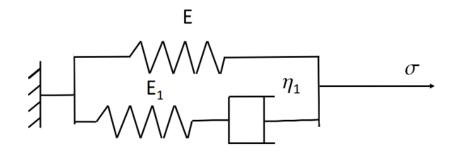


#### Modèle de Kelvin

$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{1}{\eta s + E}, \qquad r_{LC} = E + \eta s$$



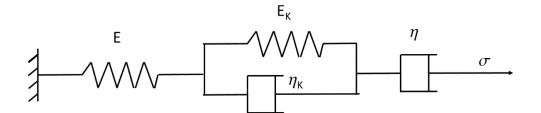
#### Modèle de Zener



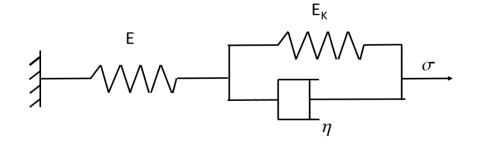
$$r_{LC} = r_{LC}^{E} + r_{LC}^{M_1} = E + \frac{E_1 s \eta_1}{\eta_1 s + E_1}$$

$$f_{LC} = \frac{1}{r_{LC}} = \frac{E_1 + \eta_1 s}{\eta_1 s (E + E_1) + E_1 E}$$

#### Modèle de Burger



#### Modèle de Kelvin-Voigt



$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = E \frac{E_K + \eta.s}{E + E_K + \eta.s}$$

$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta.s}$$

$$f_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_K + \eta_K . s} + \frac{1}{\eta . s}$$

$$r_{LC} = \frac{1}{f_{LC}} = \frac{E.s(E_K + \eta_K.s)}{E.s + (E_K + \eta_K.s)(E/\eta + s)}$$

Exemple d'application 1: convergence d'un tunnel non-soutenu circulaire dans un massif rocheux viscoélastique linéaire et incompressible sous l'état de contrainte hydrostatique

- Solution analytique dans le cas élastique linéaire (problème de déformation plane)

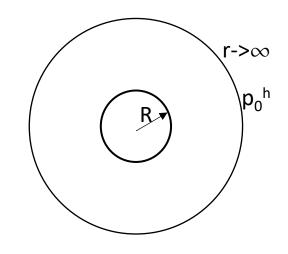
$$div\sigma = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_r + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_\theta \right)$$

$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{1+\nu} \left( \frac{1-\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{\theta} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{r} \right)$$







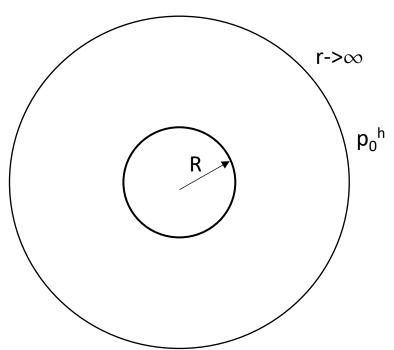
$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}$$

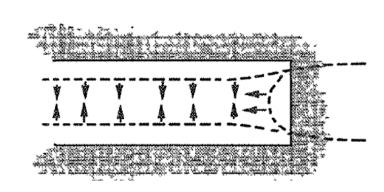
+ Conditions aux limites

$$\sigma_r(r=R)=0, \quad \sigma_r(r\to\infty)=p_0^h$$

+ Solution du problème isotrope et sous la charge hydrostatique

$$u = a.r + \frac{b}{r}$$



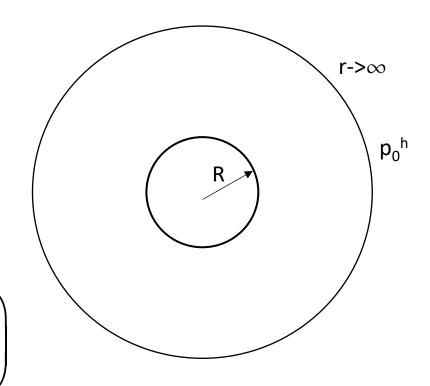


$$u = a.r + \frac{b}{r}$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = a - \frac{b}{r^2}, \quad \varepsilon_\theta = a + \frac{b}{r^2}$$

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu) \left( a - \frac{b}{r^2} \right) + \nu \left( a + \frac{b}{r^2} \right) \right)$$

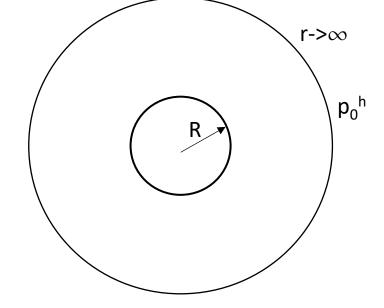
$$\sigma_{\theta} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu) \left( a + \frac{b}{r^2} \right) + \nu \left( a - \frac{b}{r^2} \right) \right)$$



$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left( (1-\nu) \left( a - \frac{b}{r^2} \right) + \nu \left( a + \frac{b}{r^2} \right) \right)$$

+ Conditions aux limites

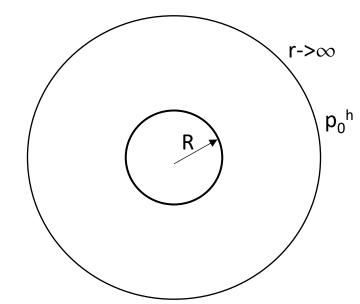
$$\begin{cases}
\sigma_r(r=R) = \frac{E(aR^2 - b(1-2\nu))}{(1+\nu)(1-2\nu)} = 0 \\
\sigma_r(r \to \infty) = \frac{aE}{(1+\nu)(1-2\nu)} = p_0^h
\end{cases}$$





$$\begin{cases} a = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} p_0^h \\ b = \frac{(1+\nu)R^2}{E} p_0^h \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{E} p_0^h \\ b = \frac{(1+\nu)R^2}{E} p_0^h \end{cases}$$



$$u = a.r + \frac{b}{r} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)p_0^h}{E}r + \frac{1+\nu}{E}\frac{R^2p_0^h}{r} = \frac{p_0^h}{3K}r + \frac{R^2p_0^h}{2G.r}$$

Module de compressibilité et module de cisaillement

$$K = \frac{E}{3(1+\nu)(1-2\nu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Cas du matériau incompressible:

$$\nu = 0.5, K \rightarrow \infty$$



$$u = \frac{p_0^h}{3K}r + \frac{R^2p_0^h}{2G.r}$$

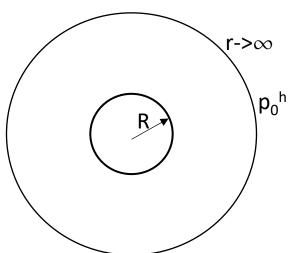
$$u_R^{elast}(r=R) = \frac{Rp_0^h}{2G}$$

$$\begin{cases} \sigma_r = (1 - \frac{R^2}{r^2})p_0^h \\ \sigma_\theta = (1 + \frac{R^2}{r^2})p_0^h \end{cases}$$

r->∞

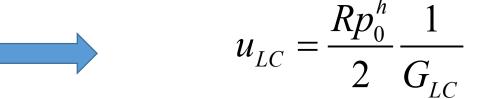
Attention: l'état de contrainte dans le massif n'évolue pas en fonction du temps.

$$\begin{cases} \sigma_r = (1 - \frac{R^2}{r^2})p_0^h \\ \sigma_\theta = (1 + \frac{R^2}{r^2})p_0^h \end{cases}$$



L'état de contrainte dans le massif n'évolue pas en fonction du temps: ainsi dans le cas du massif viscoélastique linéaire on applique le théorème de correspondance (le problème est équivalent au problème de fluage)

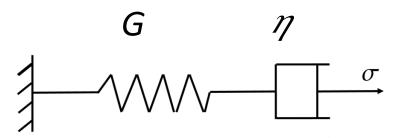
$$u_R^{elast} = \frac{Rp_0^n}{2G}$$



#### - Modèle de Maxwell du massif rocheux

$$u_R^{elast} = \frac{Rp_0^h}{2G}$$

$$G_{LC} = \frac{G.s.\eta}{\eta s + G}$$



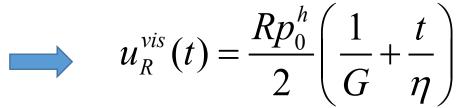


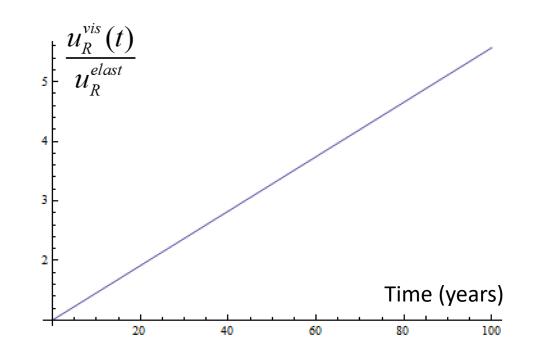


• Numerical application: G=6.0(GPa), 
$$\eta$$
=4.14x10<sup>9</sup>(GPa/s)

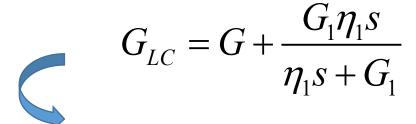
$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2} \frac{G + s.\eta}{G.s.\eta}$$



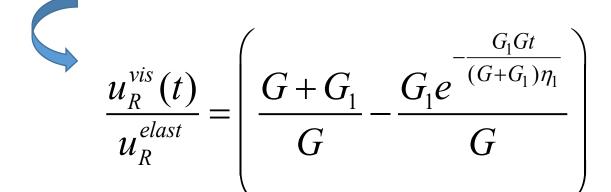


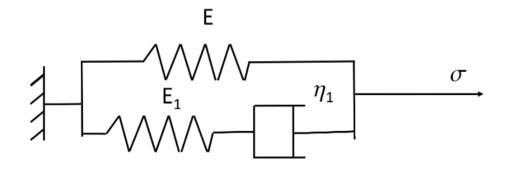


- Modèle de Zener du massif rocheux

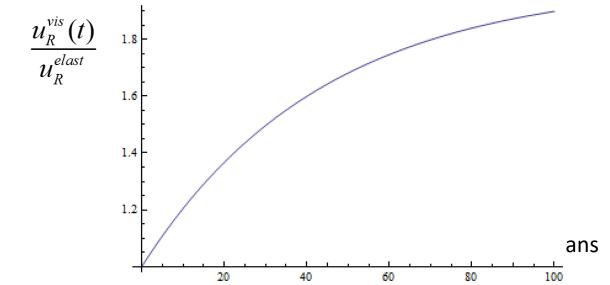


$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2} \frac{1}{\left(G + \frac{G_1\eta_1 S}{\eta_1 S + G_1}\right)}$$

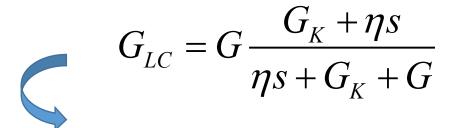




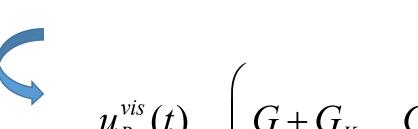
$$u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2} \left( \frac{1}{G} - \frac{G_1e^{-\frac{G_1Gt}{(G+G_1)\eta_1}}}{G(G+G_1)} \right)$$



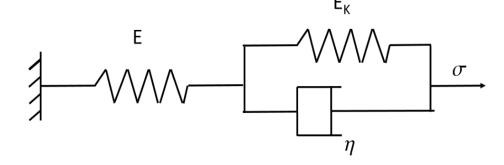
#### - Modèle de Kelvin-Voigt du massif rocheux



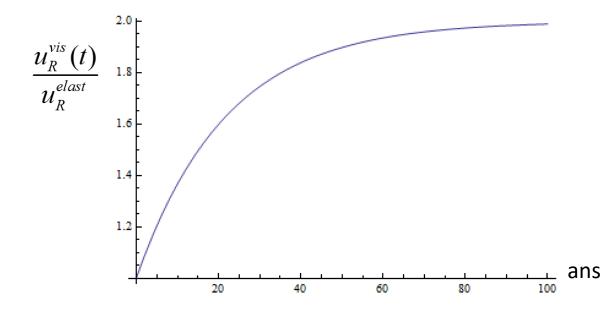
$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2} \frac{\left(G + G_K + \eta s\right)}{G\left(G_K + \eta s\right)}$$



$$\frac{u_R^{vis}(t)}{u_R^{elast}} = \left(\frac{G + G_K}{G_K} - \frac{Ge^{-\frac{G_K t}{\eta}}}{G_K}\right)$$

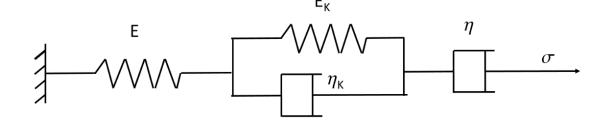


$$u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2} \left( \frac{1}{G} + \frac{1}{G_K} (1 - e^{-\frac{G_K t}{\eta}}) \right)$$



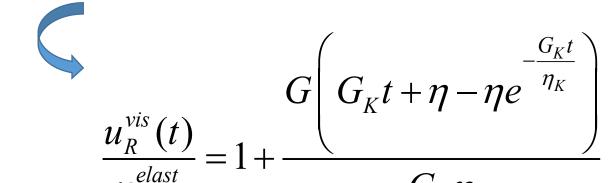
- Modèle de Burger du massif rocheux

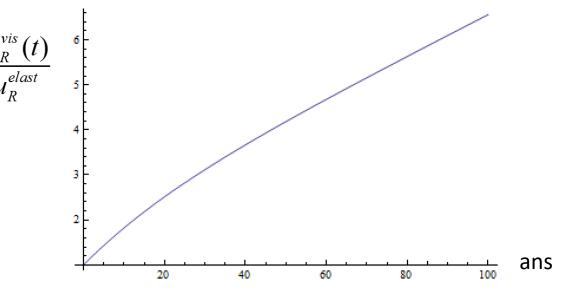
$$G_{LC} = \frac{Gs(G_K + \eta_K s)}{Gs + (\eta_K s + G_K)(G/\eta + s)}$$



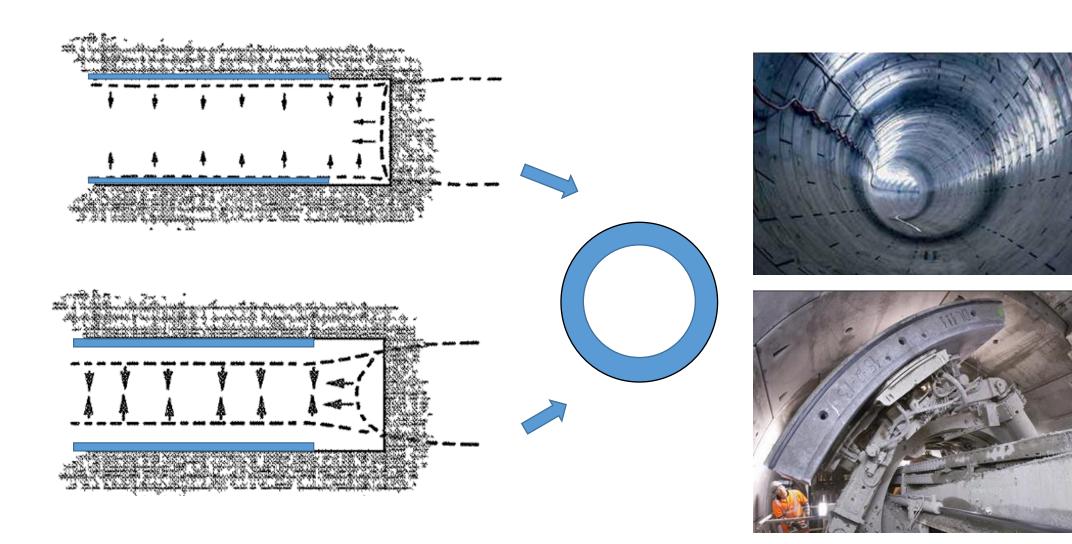
$$u_{LC} = \frac{Rp_0^h}{2} \frac{\left(Gs + \left(G_K + \eta_K s\right)\left(G/\eta + s\right)\right)}{Gs\left(G_K + \eta_K s\right)}$$

$$= \frac{Rp_0^h}{2} \frac{\left(Gs + \left(G_K + \eta_K s\right)(G/\eta + s)\right)}{Gs\left(G_K + \eta_K s\right)} \Longrightarrow u_R^{vis}(t) = \frac{Rp_0^h}{2} \left(\frac{1}{G} + \frac{1}{G_K}(1 - e^{-\frac{G_K t}{\eta_K}}) + \frac{t}{\eta}\right)$$



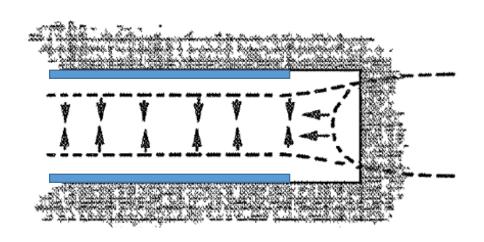


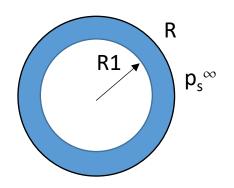
Influence du comportement différé du massif rocheux à la conception du revêtement (béton, acier)



Influence du comportement différé du massif rocheux à la conception

du revêtement (béton, acier)





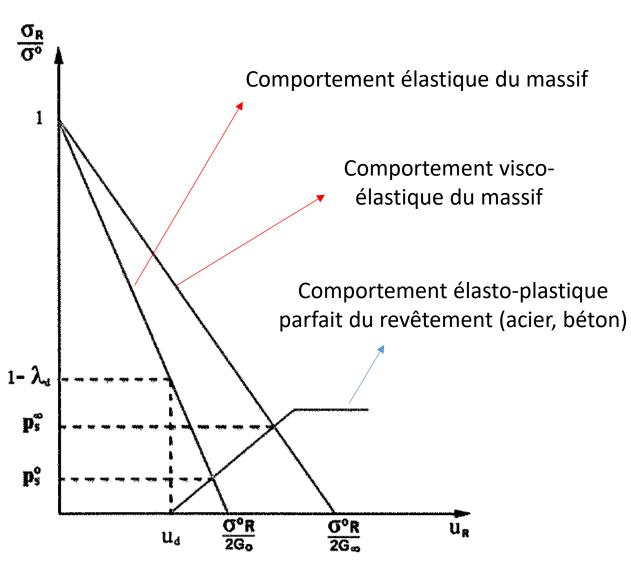
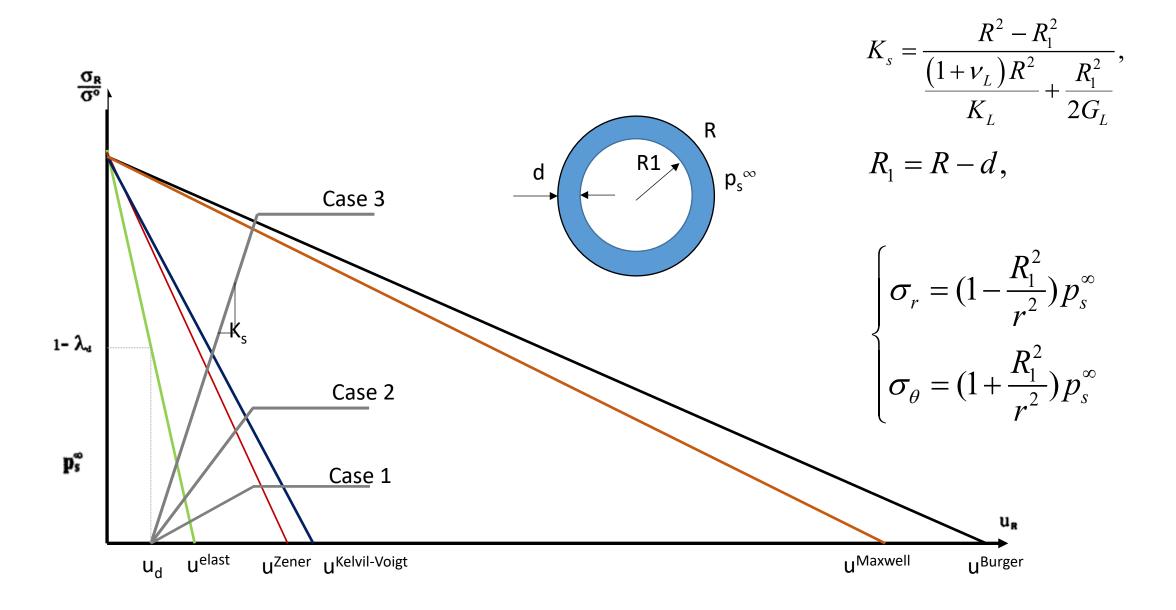
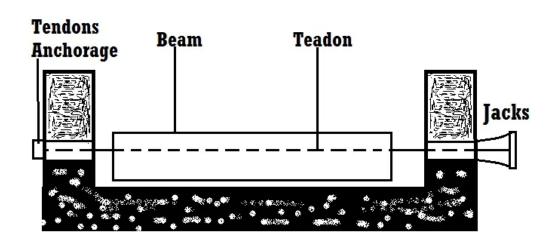


Figure 15 - Représentation graphique de la méthode convergence confinement dans le cas exisymétrique - massif viscoélastique

#### - Comportement élastique linéaire du revêtement (béton, acier)

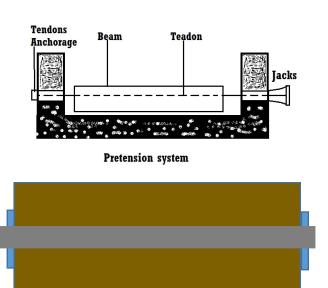




Pretension system



- Précontrainte le béton dont le comportement est viscoélastique linéaire par les armatures élastique (tendue et ancrée sur les deux plaques)



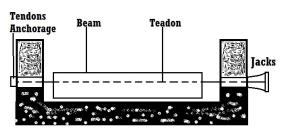
- La contrainte tendue des armatures à l'instant initial  $t_0$  est  $\sigma_0$
- + En notant la contrainte dans les armatures  $\sigma_1(t)$  et dans le béton  $\sigma_2(t)$ .

$$\sigma_1(t_0) = \sigma_0, \quad \sigma_2(t_0) = -\sigma_0$$

+ Le comportement instantané (t=t<sub>0</sub>)  $\varepsilon_1(t_0) = \frac{\sigma_0}{E_s}$ ,  $\varepsilon_2(t_0) = -f(t_0)\sigma_0$ 

E<sub>s</sub>: module élastique d'armature, f(t): fonction de retard du béton

- En fonction du temps: le comportement viscoélastique du béton crée une déformation en compression (dans le béton et aussi dans l'armature) et une diminution de la contrainte dans chaque élément (béton, acier)
- + il n'y a pas de chargement extérieure du système, nous avons:



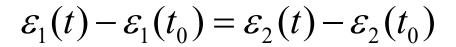
Pretension system



$$\sigma_1(t) + \sigma_2(t) = 0$$

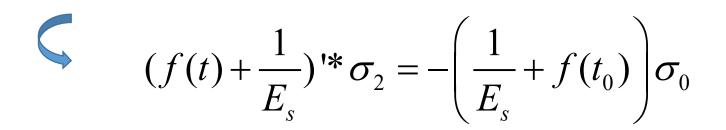
$$\sigma_2(t) = -\sigma_1(t)$$

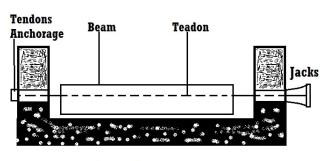
+ la liaison entre béton et acier conditionne le même raccourcissement dans ces deux matériaux:  $\varepsilon_1(t) - \varepsilon_1(t_0) = \varepsilon_2(t) - \varepsilon_2(t_0)$ 



$$\frac{\sigma_1(t) - \sigma_1(t_0) - \sigma_2(t) - \sigma_2(t_0)}{E_s} = f' * \sigma_2 - f(t_0) \sigma_2(t_0)$$

avec: 
$$\sigma_2(t_0) = -\sigma_1(t_0) = -\sigma_0$$
  
 $\sigma_2(t) = -\sigma_1(t)$ 

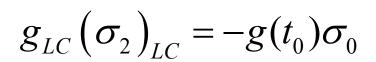




Pretension system

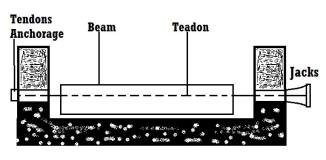


$$g'*\sigma_2 = -g(t_0)\sigma_0, \quad g(t) = f(t) + \frac{1}{E_s}$$



$$(\sigma_2)_{LC} = -g(t_0)\sigma_0 R_{LC}, \quad R_{LC}g_{LC} = 1$$

$$\sigma_2(t) = -\sigma_0 \frac{R(t)}{R(t_0)} \qquad \qquad \qquad \left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right|$$



Pretension system



- Modèle Maxwell du béton

$$f(t) = \frac{1}{E} + \frac{t}{\eta}$$
  $\Rightarrow$   $g(t) = f(t) + \frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_s} + \frac{t}{\eta}$ 

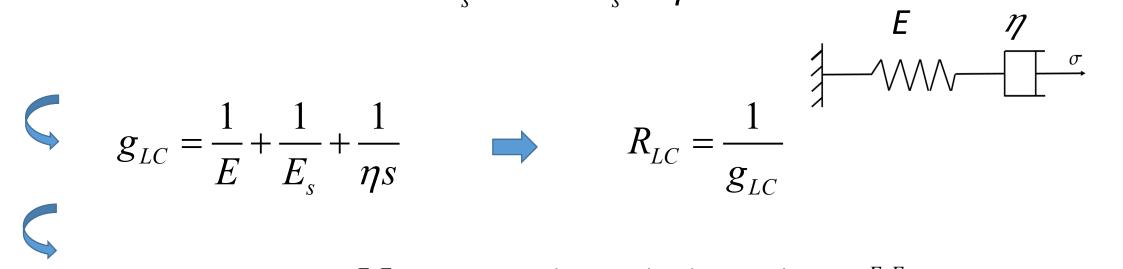




$$g_{LC} = \frac{1}{E} + \frac{1}{E_s} + \frac{1}{\eta s}$$



$$R_{LC} = \frac{1}{g_{LC}}$$





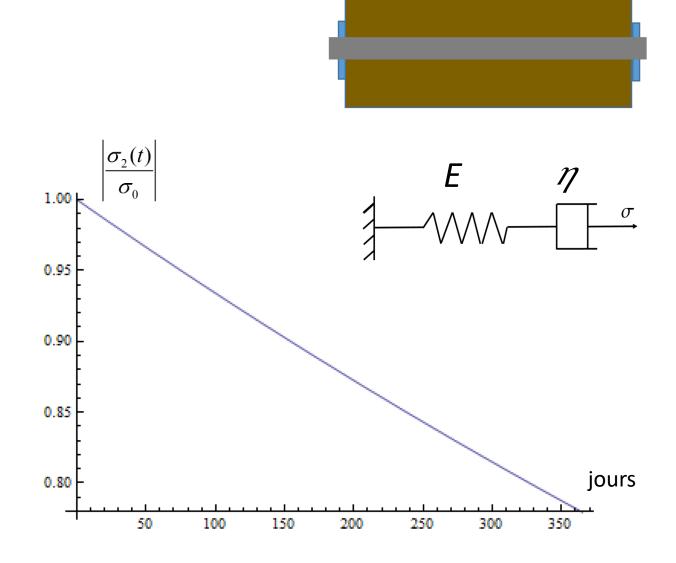
$$R(t) = \frac{E_s E}{E_s + E} e^{-\frac{E_s E}{E_s + E \eta}} \qquad \Longrightarrow \left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right| = e^{-\frac{E_s E}{E_s + E \eta}}$$

$$\left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right| = e^{-\frac{E_s E}{E_s + E} \frac{t}{\eta}}$$

- Modèle Maxwell du béton

$$\left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right| = e^{-\frac{E_s E}{E_s + E} \frac{t}{\eta}}$$

+ Application numérique:  $E_s$ =200(GPa), E=39.1(GPa),  $\eta$ =4.14x10<sup>9</sup>(GPa/.s)



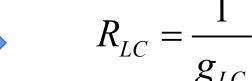
- Modèle de Kelvin du béton

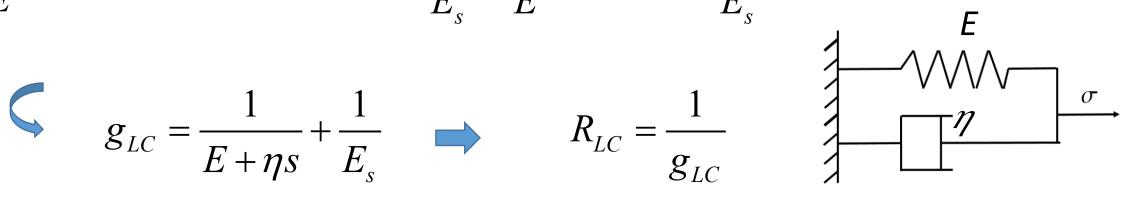
$$f(t) = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) \implies g(t) = f(t) + \frac{1}{E_s} = \frac{1}{E} (1 - e^{-\frac{E}{\eta}t}) + \frac{1}{E_s}$$





$$g_{LC} = \frac{1}{E + \eta s} + \frac{1}{E_s}$$





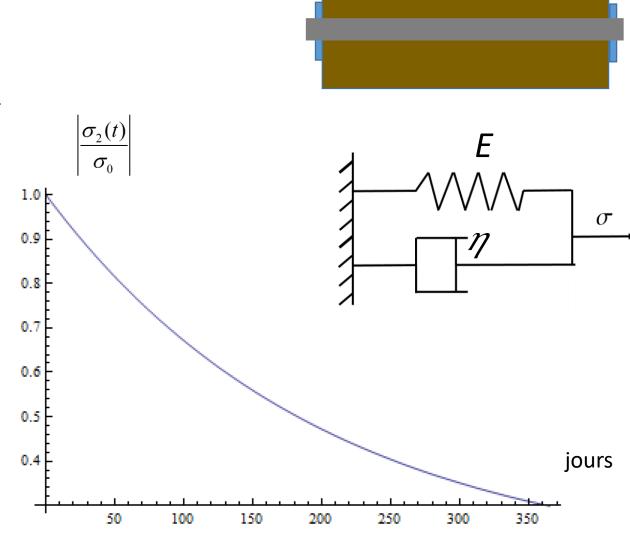


$$R(t) = \frac{E_s E}{E_s + E} + \frac{E_s^2}{E_s + E} e^{-\frac{E_s + E}{\eta}t} \longrightarrow \left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right| = \frac{E + E_s e^{-\frac{E_s + E}{\eta}t}}{E + E_s}$$

- Modèle de Kelvin du béton

$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = \frac{E + E_s e^{-\frac{E_s + E}{\eta}t}}{E + E_s}$$

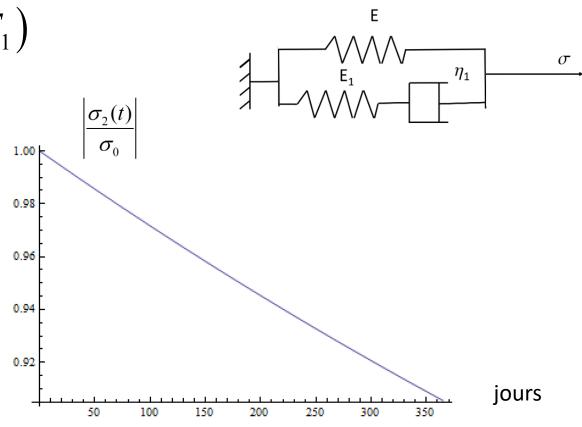
+ Application numérique:  $E_s$ =200(GPa), E=39.1(GPa),  $\eta$ =4.14x10<sup>9</sup>(GPa/.s)



- Modèle de Zener du béton

$$\left| \frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0} \right| = \left| \frac{R(t)}{R(t_0)} \right| = \frac{E(E + E_1 + E_s) + E_1 E_s e^{-\frac{E_1(E_s + E)}{E + E_1 + E_s} \frac{t}{\eta_1}}}{(E + E_s)(E + E_1)}$$

+ Application numérique:  $E_s$ =200(GPa), E= $E_1$ = 39.1(GPa),  $\eta_1$ =4.14x10<sup>9</sup>(GPa/.s)

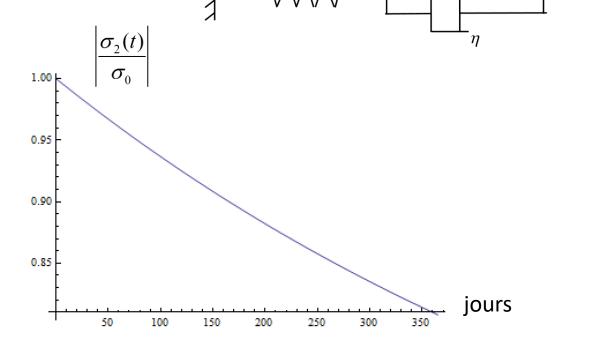


- Modèle de Kelvin-Voigt du béton

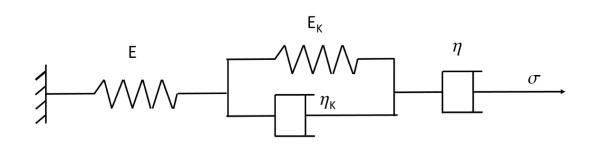
$$\left|\frac{\sigma_2(t)}{\sigma_0}\right| = \left|\frac{R(t)}{R(t_0)}\right| = \frac{E_K(E + E_s) + E_s E e^{-\frac{E_s E + E_K(E + E_s)}{E + E_s} \frac{t}{\eta}}}{E_s E + E_K(E + E_s)}$$

 $\begin{array}{c|c} & & & & E_{\mathsf{K}} \\ & & & & & & \sigma \end{array}$ 

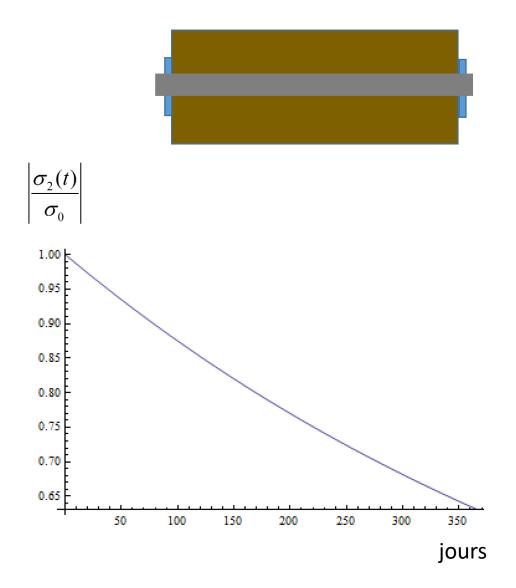
+ Application numérique:  $E_s$ =200(GPa), E= $E_K$ = 39.1(GPa),  $\eta_1$ =4.14x10<sup>9</sup>(GPa/.s)



- Modèle de Burger du béton



+ Application numérique:  $E_s=200(GPa)$ ,  $E=E_K=39.1(GPa)$ ,  $\eta = \eta_K=4.14 \times 10^9 (GPa/.s)$ 



# DM (à rendre au 14/11 à 23h55):

#### Exercice 1: Comportement différé du revêtement en béton d'un tunnel profond

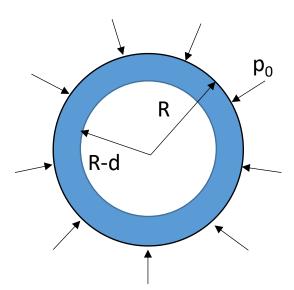
Soit le revêtement en béton d'un tunnel profond de rayon R. L'épaisseur du revêtement est *d*. Le comportement du béton est viscoélastique linéaire. Le chargement transmit du massif rocheux du tunnel au revêtement p0 est uniforme.

En utilisant la solution analytique, comparez le déplacement radial ( $u_R$ ) et la déformation ortho-radiale ( $\epsilon_{\theta\theta}$ ) à l'intrados du revêtement (c'est-à-dire au point de rayon r=R-d) à 100 ans du revêtement en considérant: le modèle de l'EC2 et les modèles rhéologiques (Maxwell, Kelvin, Kelvin-Voigt, Burger) pour caractériser le comportement différé du béton C40/50

Données: p0=1.5(MPa), R=5m, d=0.5m, E= $E_M$ = $E_K$ = $E_c$ ,  $\eta = \eta_M = \eta_K$ =4.14x10<sup>9</sup>(GPa/.s)







# DM (à rendre au 14/11 à 23h55):

#### Exercice 2: Comportement différé d'une poutre continue en béton

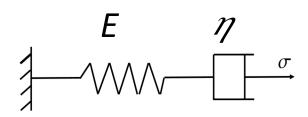
En utilisant le logiciel Robobat, comparez la flèche à 50 ans d'une poutre continue **sous la charge ponctuelle et son poids propre** en considérant: l'EC2 et les modèles rhéologiques (Maxwell, Kelvin, Kelvin-Voigt, Burger) pour caractériser le comportement différé du béton C25/30

Données: F=30(kN), L=18m, E = $E_M = E_K = E_c$ ,  $\eta = \eta_M = \eta_K = 4.14 \times 10^9 (GPa/.s)$ 

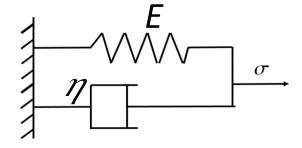


$$E_{c,eff}(t) = \frac{E_c(t_0)}{1 + \varphi(t, t_0)} \qquad E_c = 22000 \left(\frac{f_{cm}}{10}\right)^{0.3}$$

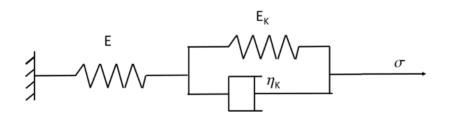
#### + Modèle Maxwell



#### + Modèle de Kelvin



#### + Modèle de Kelvin-Voigt



#### + Modèle de Burger

