Logique

Introduction au calcul des prédicats

Jules Chouquet

2025

Contexte

On a étudié la logique propositionnelle sous à peu près tous les angles.

C'est super, on peut faire pas mal de chose avec :

- Étudier le fonctionnement interne des circuits informatiques (cf cours d'architecture).
- Exprimer des propriétés, et regarder sous quelles conditions elles sont vérifiées. (applications en programmation par contraintes et programmation logique [1])
- Prouver formellement des théorèmes.

1. Que vous verrez plus tard dans votre cursus

Mais...

Supposons que je veuille prouver une propriété logique exprimée ainsi :

Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés [2]

La formalisation en logique propositionnelle est de cette forme :
$p =$ "les mammifères sont vertébrés"
$q =$ "les étudiants sont des mammifères"
$r =$ "les étudiants sont vertébrés"

2. Pour le prouver sans passer par la logique, tenez-vous droit !

Mais. . .

Supposons que je veuille prouver une propriété logique exprimée ainsi :

Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés [2]

La formalisation en logique propositionnelle est de cette forme :
$p =$ "les mammifères sont vertébrés"
$q =$ "les étudiants sont des mammifères"
$r =$ "les étudiants sont vertébrés"
Et la formule :

$$(p \wedge q) \rightarrow r$$

2. Pour le prouver sans passer par la logique, tenez-vous droit !

Problème

$(p \wedge q) \rightarrow r$ n'est pas une tautologie, alors que la propriété semble **logiquement valide** .

Pourquoi ?

Problème

$(p \wedge q) \rightarrow r$ n'est pas une tautologie, alors que la propriété semble **logiquement valide** .

Pourquoi ?
$\rightarrow$ Parce que les propositions représentent des faits, ou des états de choses.

Or, "les mammifères sont vertébrés" et "les étudiants sont des mammifères" sont deux faits distincts.

$\rightarrow$ La logique propositionnelle ne permet pas d'exprimer qu'il y a un lien entre les deux...

Décomposer les faits

Une première solution

Il faut séparer les faits en plusieurs parties, pour pouvoir exprimer “être un mammifère” (M), “être un vertébré” (V), “être un étudiant” (E)...

Décomposer les faits

Une première solution

Il faut séparer les faits en plusieurs parties, pour pouvoir exprimer "être un mammifère" (M), "être un vertébré" (V), "être un étudiant" (E)...

Alors, la formule pourrait se lire :

$$((M \to V) \land (E \to M)) \to (E \to V)$$

Qui est bien une tautologie.

Décomposer les faits

Une première solution

Il faut séparer les faits en plusieurs parties, pour pouvoir exprimer “être un mammifère” (M), “être un vertébré” (V), “être un étudiant” (E)...

Alors, la formule pourrait se lire :

$$((M \rightarrow V) \wedge (E \rightarrow M)) \rightarrow (E \rightarrow V)$$

Qui est bien une tautologie.

C’est tout, il suffit de changer un peu la formalisation ?

Évidemment, non...

Tous v.s. Certains

Imaginons que je veuille dire :

"Si tous les mammifères sont des vertébrés et que certains étudiants sont invertébrés, alors tous les étudiants ne sont pas des mammifères "

Ça semble vrai, et on pourrait vouloir le formuler comme précédemment :

$$((M \rightarrow V) \wedge (E \rightarrow \neg V)) \rightarrow (E \rightarrow \neg M)$$

Tous v.s. Certains

Imaginons que je veuille dire :

"Si tous les mammifères sont des vertébrés et que certains étudiants sont invertébrés, alors tous les étudiants ne sont pas des mammifères "

Ça semble vrai, et on pourrait vouloir le formuler comme précédemment :

$$((M \to V) \land (E \to \neg V)) \to (E \to \neg M)$$

Ça ne marche plus

$\neg V$ et $\neg M$ ne concernent que **certains** étudiants, alors que V et M sont pour **tous** .

En calcul des prédicats, on va distinguer ces deux cas de figure très précisément.

Individus

Retour à une logique de termes, un peu comme chez Aristote

En fait, les lettres V, M, E seules ne suffisent plus, car "être un mammifère" n'est pas un fait. Le fait, ce serait plutôt :

"x est un mammifère"

Où x est un **individu** .

Qu'est-ce que ça change ?

On peut maintenant dire que **tous** les x qui sont des mammifères sont aussi des vertébrés.
Mais aussi que **certains** x (ou y) qui sont étudiants ne sont pas des mammifères, etc. . .

À quoi ressembleront nos formules ?

Si M correspond à “être un mammifère” :

“x est un mammifère”

Sera noté $M(x)$.

Comme ça je peux écrire $M(x)$ ou $M(y)$, et ça ne concernera pas forcément les mêmes individus.

Prédicats et formalisation

Prédicat

Un **prédicat** est un symbole qui attend un argument.

Les prédicats sont représentés par des lettres majuscules ($P, Q, \ldots$), et les arguments sont notés comme pour des fonctions : on écrit par exemple $P(x), Q(y), \ldots$ si les arguments sont x et y.
($\underline{P \text{ tout seul ne veut rien dire}}$)

Remarque : on verra plus tard que les prédicats peuvent en fait avoir plus d'un seul argument

Reprenons. . .

Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés

Sera formalisé comme ci-dessous.

Si :

Pour tout x[3] :

$((M(x) \to V(x))$

et pour tout y :

$(E(y) \to M(y)))$

Alors :

Pour tout z :

$(E(z) \to V(z))$

3. Ou "Quel que soit x"

“Si tous les mammifères sont des vertébrés et que certains étudiants sont invertébrés, alors tous les étudiants ne sont pas des mammifères “

Sera formalisé comme ci-dessous.

Si :

Pour tout x[4] :

$((M(x) \rightarrow V(x))$

et pour certains y :

$(E(y) \wedge \neg M(y)))$

Alors :

Pour certains z :

$(E(z) \rightarrow \neg V(z))$

4. Ou “Quel que soit x”

Remarque

Pourquoi "tous les M sont V" se traduit avec "pour tout $x, M(x) \to V(x)$" alors que :
"certains M sont V" se traduit avec "pour certains x, $M(x) \wedge V(x)$"

$$???$$

$\to$ L'utilisation de ces deux différents connecteurs est **très importante**

Pour tout x

Que veut vraiment dire “Tous les mammifères sont vertébrés” ?

Je prends un individu n’importe où dans l’univers. **si** c’est un mammifère, **alors** c’est aussi un vertébré.

Un autre connecteur que $\rightarrow$ ne serait pas adapté pour traduire la phrase...

Certains x

Que veut vraiment dire “certains mammifères sont vertébrés” ?

Je peux **trouver** un individu quelque part dans l’univers, tel que cet individu soit un mammifère **et** soit vertébré. (si j’en suis incapable, la phrase est fausse, car il n’y en a aucun, ça correspond donc bien à ma traduction)

Un autre connecteur que $\wedge$ ne serait pas adapté pour traduire la phrase...

Symboles de quantification

On va pouvoir écrire des nouvelles formules en suivant ces constructions.

Pour celà, on introduit, en plus des prédicats, deux nouveaux symboles, les **quantificateurs** :

- $\forall$ Quantificateur **universel** "pour tout..."[5]
- $\exists$ Quantificateur **existentiel** "il existe au moins un..."[6]

5. C'est un A inversé, pour *All*
6. E inversé, pour *Exists*

Nouvelle définition des formules

On considère une infinité de **variables** possibles[7] notées x, y, z (ou $y', x_{42}, \ldots$ s'il en faut plus), et des **symboles de prédicats** $P, Q, R, \ldots$

Definition

Une formule du **calcul des prédicats** est soit :

- Un prédicat avec une variable en argument, comme $P(x)$.
- Une formule F précédée d'une quantification de variable, c'est-à-dire $\forall x F$ ou $\exists x F$.
- Des formules F_1, F_2 combinées avec les connecteurs propositionnels, comme $\neg F_1, F_2 \wedge F_2, \ldots$

ATTENTION : Les variables propositionnelles $p, q, \ldots$ ne **font pas partie du langage** ! (les formules les plus élémentaires sont $P(x)$, ou $Q(y)$, etc...)

7. Ce ne sont pas des variables propositionnelles ! Parfois on les appelle variables *de premier ordre*. Dans le cours on les appellera juste "variables".

Revenons sur nos exemples

"Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés"[8]

$$(\forall x(M(x) \rightarrow V(x)) \wedge \forall y(E(y) \rightarrow M(y))) \rightarrow \forall z(E(z) \rightarrow V(z))$$

8. Remarque : pour les parenthèses, les quantificateurs fonctionnent comme la négation, pas besoin de parenthéser *autour de* $\forall xF$ *à chaque fois*

Revenons sur nos exemples

"Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés"[8]

$$(\forall x(M(x) \to V(x)) \land \forall y(E(y) \to M(y))) \to \forall z(E(z) \to V(z))$$

"Si tous les mammifères sont des vertébrés et que certains étudiants sont invertébrés, alors tous les étudiants ne sont pas des mammifères "

$$(\forall x(M(x) \to V(x)) \land \exists y(E(y) \land \neg V(y))) \to \neg \forall z(E(z) \to M(z))$$

8. Remarque : pour les parenthèses, les quantificateurs fonctionnent comme la négation, pas besoin de parenthéser *autour de* $\forall xF$ *à chaque fois*

Revenons sur nos exemples

"Si tous les mammifères sont des vertébrés, et que tous les étudiants sont des mammifères, alors tous les étudiants sont des vertébrés"[8]

$$(\forall x(M(x) \to V(x)) \land \forall y(E(y) \to M(y))) \to \forall z(E(z) \to V(z))$$

"Si tous les mammifères sont des vertébrés et que certains étudiants sont invertébrés, alors tous les étudiants ne sont pas des mammifères "

$$(\forall x(M(x) \to V(x)) \land \exists y(E(y) \land \neg V(y))) \to \neg \forall z(E(z) \to M(z))$$

Ce sont en effet des théorèmes du calcul des prédicats, on verra comment le montrer plus tard (évidemment, les tables de vérité ne suffisent plus...)

8. Remarque : pour les parenthèses, les quantificateurs fonctionnent comme la négation, pas besoin de parenthéser *autour de* $\forall xF$ *à chaque fois*

Remarque Bis

Vous trouverez rarement des formules de la forme $\exists x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Car cela veut dire qu'il existe au moins un individu x, tel que **SI** il est P, **ALORS** il est Q.

Il suffit de trouver un élément qui n'est pas P pour que la formule soit vraie, donc cette formule ne nous dit pas grand chose...[9]

De la même façon, $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ sera plus rare que $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Le premier voulant dire "tout le monde est à la fois P et Q" ; et le second "tous les P sont Q"[10]

9. Les seuls cas où elle est fausse, c'est quand tout le monde est P, et personne n'est Q.

10. Les théorèmes ont plus souvent cette forme.

Univers/domaine de définition

Pour savoir ce que dit une formule, il faut savoir plusieurs choses :

- quel sens on a donné aux prédicats (E = étudiant, etc...).
- quel sens ont les connecteurs et les quantificateurs[11].

11. Ils ont toujours le même sens, on les appelle parfois "constantes logiques"
12. Qui veut dire : "tout individu est un animal".

Univers/domaine de définition

Pour savoir ce que dit une formule, il faut savoir plusieurs choses :

- quel sens on a donné aux prédicats ($E =$ étudiant, etc...).
- quel sens ont les connecteurs et les quantificateurs [11].

Mais ça ne suffit pas...
Prenons le prédicat $A =$ "Animal". Est-ce que $\forall x A(x)$ [12] sera interprétée comme vraie ?

11. Ils ont toujours le même sens, on les appelle parfois "constantes logiques"
12. Qui veut dire : "tout individu est un animal".

Univers/domaine de définition

Pour savoir ce que dit une formule, il faut savoir plusieurs choses :

- quel sens on a donné aux prédicats ($E =$ étudiant, etc...).
- quel sens ont les connecteurs et les quantificateurs [11].

Mais ça ne suffit pas...
Prenons le prédicat $A =$ "Animal". Est-ce que $\forall x A(x)$ [12] sera interprétée comme vraie ?

Ça dépend d'où on se place...

11. Ils ont toujours le même sens, on les appelle parfois "constantes logiques"
12. Qui veut dire : "tout individu est un animal".

Univers/domaine de définition

Quand on interprète une formule du calcul des prédicats, il faut **toujours** préciser l'ensemble des "individus" qu'on considère.

Domaine de définition

C'est l'ensemble des "choses" dans lequel on interprète les formules. Ça peut être :

- Les être vivants
- Les objets physiques
- Les nombres entiers
- Les nombres réels
- ...

On considère toujours que le domaine **n'est pas vide**

Selon le domaine de définition [13], une même formule peut être vraie ou non...

13. On dit aussi l'"Univers".

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)
- $\forall x(A(x) \to L(x))$

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)
- $\forall x(A(x) \rightarrow L(x))$ "tous les animaux sont des êtres vivants."

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)
- $\forall x(A(x) \to L(x))$ "tous les animaux sont des êtres vivants."
- $\exists x \neg L(x)$

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai. . .)
- $\forall x(A(x) \rightarrow L(x))$ "tous les animaux sont des êtres vivants."
- $\exists x \neg L(x)$ "il existe des individus non vivants"

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)
- $\forall x(A(x) \to L(x))$ "tous les animaux sont des êtres vivants."
- $\exists x \neg L(x)$ "il existe des individus non vivants"
- $\neg \exists x L(x)$

Exemples

Prédicats : L (être vivant), A (animal), V (vertébré), E (étudiant).
L'univers est celui des objets physiques.

- $\forall x(L(x))$ "tous les individus sont vivants"
  (C'est faux, mais si mon domaine était celui des animaux, ce serait vrai...)
- $\forall x(A(x) \to L(x))$ "tous les animaux sont des êtres vivants."
- $\exists x \neg L(x)$ "il existe des individus non vivants"
- $\neg \exists x L(x)$ "Il n'existe pas d'individu vivant"

Quantification et variables libres

Considérez la formule suivante : $\forall x V(y)$. Ou même simplement $V(y)$. Comment l'interpréter ?

Quantification et variables libres

Considérez la formule suivante : $\forall x V(y)$. Ou même simplement $V(y)$. Comment l'interpréter ?

C'est impossible.

Définition

On dit qu'une variable x est **libre** dans une formule F si elle n'apparaît pas dans une sous formule de la forme $\exists x G$ ou $\forall x G$.

Sinon, on dit qu'elle est **liée** par le quantificateur.

On ne peut pas interpréter une formule si elle a des variables libres. Dans ce cours, on ne considèrera que des formules dont toutes les variables sont *liées*.

Sous-formules

Les parenthèses en calcul des prédicats

Rappel : comme la négation, la quantification n'admet qu'une sous formule. Donc la formule $\forall x F$ n'a pas besoin de parenthèses supplémentaires comme $\forall x (F)$.

Sous-formules

Les parenthèses en calcul des prédicats

Rappel : comme la négation, la quantification n'admet qu'une sous formule. Donc la formule $\forall x F$ n'a pas besoin de parenthèses supplémentaires comme $\forall x(F)$.

MAIS en présence de connecteurs binaires, il faut être très attentif : Par exemple $\forall x(F \wedge G)$ et $\forall x F \wedge G$ ne sont pas la même formule !
Dans la première, la quantification *couvre* G.

Rappel : comme la négation, la quantification n'admet qu'une sous formule. Donc la formule $\forall x F$ n'a pas besoin de parenthèses supplémentaires comme $\forall x(F)$.
MAIS en présence de connecteurs binaires, il faut être très attentif : Par exemple $\forall x(F \wedge G)$ et $\forall x F \wedge G$ ne sont pas la même formule !
Dans la première, la quantification *couvre* G.

En particulier :

- $\forall x P(x) \wedge Q(x)$ contient une variable libre (le deuxième x)
- $\forall x(P(x) \wedge Q(x))$ non.

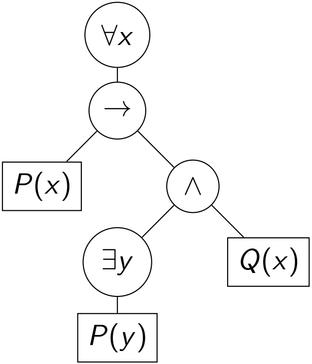
Pensez à la différence entre $\neg p \wedge q$ et $\neg(p \wedge q)$, c'est la même idée.

Parenthèse

Les sous-formules en calcul des prédicats

La quantification fonctionne comme un connecteur unaire. On peut illustrer les formules de cette façon :

$\forall x(P(x) \rightarrow (\exists y P(y) \wedge Q(x)))$



Une variable est libre si elle n'est pas quantifiée par un nœeud *parent* dans l'arbre.

(ici toutes les variables sont liées)

Exemples

- $\forall x V(x) \wedge \forall y (A(x) \rightarrow V(y))$

Exemples

- $\forall x V(x) \land \forall y (A(x) \rightarrow V(y))$
- $\forall x \exists y \forall z A(z)$

Exemples

- $\forall x V(x) \wedge \forall y (A(x) \rightarrow V(y))$
- $\forall x \exists y \forall z A(z)$
- $\forall x \exists y \forall z A(x)$

Exemples

- $\forall x V(x) \land \forall y (A(x) \to V(y))$
- $\forall x \exists y \forall z A(z)$
- $\forall x \exists y \forall z A(x)$
- $\forall x (\exists y P(y) \land (Q(x) \lor V(y))$

Portée et masquage des quantificateurs

En pratique, on évite d'utiliser plusieurs fois la même variable pour les quantificateurs, de façon à être plus facilement compréhensible.

Mais... si un jour vous voyez une formule comme ça :
$\exists x(P(x) \to \forall x P(x))$, que faire ?

Portée et masquage des quantificateurs

En pratique, on évite d'utiliser plusieurs fois la même variable pour les quantificateurs, de façon à être plus facilement compréhensible.

Mais... si un jour vous voyez une formule comme ça :
$\exists x (P(x) \to \forall x P(x))$, que faire ?

Quel quantificateur s'applique au second x ?

C'est toujours le plus proche ($\forall$), c'est-à-dire le premier parent en remontant dans l'arbre.

Du coup, la formule est en fait équivalente à $\exists x (P(x) \to \forall y P(y))$, car le deuxième quantificateur a <u>masqué</u> le premier.

Pensez à ce qui se passe en Python quand vous écrivez :

```
x=1
x=2
print(x)
```

Dans la suite du cours

On va voir plus précisément à quelles conditions une formule du calcul des prédicats est *vraie* ou *fausse*.