

TD4 : Prédicats

Exercice 1 Traduction (version)

- P : « Mammifère »
- Q : « Ovipare »
- R : « Volants »

Le domaine de définition est celui des animaux.

1. Il existe au moins un mammifère ovipare¹, mais qui n'est pas volant.
2. Tous les animaux volants ne sont pas ovipares.
3. Un animal volant qui n'est pas ovipare est forcément un mammifère².

Exercice 2 Traduction (version)

On considère deux symboles de prédicats : P : « Pair », Q : « Premier »
Le domaine de définition est celui des entiers naturels \mathbb{N} . Traduisez les phrases suivantes.

1. Il existe un nombre pair qui est premier.
2. Tous les nombres premiers ne sont pas des nombres impairs.
3. Si un nombre est pair et impair, alors il est premier.
4. Si tous les nombres premiers sont pairs, alors les nombres impairs ne sont pas premiers.

Exercice 3 Traduction (thème)

Pour les formules suivantes, donnez une traduction en français. L'interprétation est la suivante, où le domaine est celui des êtres humains.

- P = « Artistes »
 - Q = « Sérieux »
1. $\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$
 2. $\forall x(Q(x) \rightarrow \neg P(x))$
 3. $\neg \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \wedge \exists y \neg(Q(y) \wedge P(y))$
 4. $\forall y P(y) \rightarrow \exists x(Q(x) \wedge P(y))$

Exercice 4 Sémantique

Considérons un langage avec les symboles de prédicats, P, Q , et R , et deux interprétation pour ce langage :

- $I_1 : D = \{\star, \bullet, \diamond\}, \llbracket P \rrbracket = \{\star, \diamond\}, \llbracket Q \rrbracket = \{\star\}, \llbracket R \rrbracket = \{\bullet, \diamond\}$
- $I_2 : D = \{\star, \bullet, \diamond, \circ\}, \llbracket P \rrbracket = D, \llbracket Q \rrbracket = \{\star, \circ\}, \llbracket R \rrbracket = \{\bullet, \diamond\}$
- $I_3 : D = \mathbb{N}, \llbracket P \rrbracket = \{k \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } k \text{ premier}\}, \llbracket Q \rrbracket = \{2k + 1 \mid k \in \mathbb{N}\}, \llbracket R \rrbracket = \{2\}$.
- $I_4 : D = \{1, 2, 3\}, \llbracket P \rrbracket = \emptyset, \llbracket Q \rrbracket = \llbracket P \rrbracket, \llbracket R \rrbracket = \{2, 4, 6, 8\}$

Pour chacune des interprétations, déterminez et démontrez la vérité ou fausseté des formules suivantes :

1. $\forall x(P(x) \rightarrow (Q(x) \vee R(x)))$
2. $\forall z(Q(z) \rightarrow P(z)) \wedge \exists y \neg(Q(y) \vee R(y))$
3. $\exists x(R(x) \wedge P(x) \wedge Q(x)) \vee \forall x P(x)$

1. C'est le cas de l'ornithorynque ou de l'échidné australien.
2. C'est le cas de la chauve-souris.