

## TD5 : Calcul des prédicats — Sémantique

**Exercice 1 Rappel** Rappelez la définition d'une interprétation pour le calcul des prédicats.

**Exercice 2 Vérité des formules dans une interprétation fixée** On fixe une interprétation pour un langage avec deux symboles de prédicats  $P, Q$ . Domaine =  $\mathbb{R}$ ,  $\llbracket P \rrbracket = \mathbb{N}$ ,  $\llbracket Q \rrbracket = \mathbb{Q}$ <sup>1</sup>.

Pour chacune des formules suivantes, déterminez elle est vraie dans l'interprétation ou non. Rédigez une démonstration précise.

1.  $\exists x \neg Q(x)$
2.  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$
3.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
4.  $\forall x Q(x) \rightarrow \exists y \neg P(y)$
5.  $\forall x \forall y ((\neg Q(x) \vee \neg Q(y)) \rightarrow (\neg P(x) \vee \neg P(y)))$

**Exercice 3 Interprétations des formules** Pour chacune des formules suivantes, proposez une interprétation dans laquelle elle est vraie, et une interprétation dans laquelle elle est fausse (cherchez les exemples les plus simples possibles)

1.  $\forall x P(x) \wedge \exists y \neg Q(y)$
2.  $\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))$
3.  $\exists y (\neg P(y) \vee \neg Q(y))$
4.  $\exists x \forall y (P(y) \rightarrow Q(x))$

**Exercice 4 Théorèmes** Pour chacune des formules suivantes, déterminez si c'est un théorème du calcul des prédicats, en justifiant précisément votre réponse.

1.  $\forall x (P(x) \vee Q(x))$
2.  $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \wedge \forall z Q(z))$
3.  $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \rightarrow (\forall y P(y) \vee \forall z Q(z))$
4.  $\exists x (P(x) \vee \neg P(x))$
5.  $\forall x (P(x) \rightarrow \exists y P(y))$
6.  $\exists x (P(x) \rightarrow \forall y P(y))$
7.  $\exists x P(x) \rightarrow \forall y P(y)$

---

1. On rappelle que  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ . C'est en fait tout ce que nous avons besoin de savoir...