

# Logique Relations

Jules Chouquet



2025

## Contexte

On a défini un nouveau langage plus expressif que la logique des propositions, ainsi que sa sémantique.

On a rajouté les quantificateurs  $\forall$  et  $\exists$ , ainsi que les prédictats (comme  $P(x)$ ).

Ça permet de parler de propriétés des individus.

# Mais

On ne peut pas traduire des phrases comme :

« Si  $x$  est plus petit que  $y$ , qui est plus petit que  $z$ , alors  $x$  est plus petit que  $z$  »

ou

« un nombre est plus petit que les autres »

Qu'est-ce qui manque ?

# Dans ce cours

On va voir comment étendre le langage avec des **relations**.

## Définition

Une **relation** est un symbole de prédicat qui attend deux variables.

On les note par exemple  $R(x, y)$ .

Et on lit cette formule  $x$  est en relation  $R$  avec  $y$ .

## Remarques

- On ne change rien d'autre aux langage,  $R(x, y)$  est une formule de base comme  $P(x)$ .

## Remarques

- On ne change rien d'autre aux langage,  $R(x, y)$  est une formule de base comme  $P(x)$ .
- $R(x, y)$  et  $R(y, x)$  ne sont pas la même formule. Par exemple  $\exists x \forall y R(y, x)$  peut vouloir dire « il existe quelqu'un que tout le monde connaît ». Ce n'est pas pareil que « il existe quelqu'un qui connaît tout le monde » ( $\exists x \forall y R(y, x)$ )

## Remarques

- On ne change rien d'autre aux langage,  $R(x, y)$  est une formule de base comme  $P(x)$ .
- $R(x, y)$  et  $R(y, x)$  ne sont pas la même formule. Par exemple  $\exists x \forall y R(y, x)$  peut vouloir dire « il existe quelqu'un que tout le monde connaît ». Ce n'est pas pareil que « il existe quelqu'un qui connaît tout le monde » ( $\exists x \forall y R(y, x)$ )
- On a le droit d'écrire  $R(x, x)$ , ça peut vouloir dire « tout le monde se connaît lui-même » (et ça peut être vrai ou faux)

# Interprétations

## Du langage étendu avec les relations

C'est à peu près la même que pour le calcul des prédictats vu précédemment.

# Interprétations

## Du langage étendu avec les relations

C'est à peu près la même que pour le calcul des prédictats vu précédemment.

Différence :  $R(x, y)$  n'est plus une propriété, mais une relation entre deux éléments.

Donc  $\llbracket R \rrbracket$  n'est pas juste un sous-ensemble du domaine d'interprétation.